模糊逻辑及其代数分析

●张小红 著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-3217.0101)

作 者 简 介



张小红，教授、博士、博士生导师．1965年7月出生于陕西南郑，2005年11月博士毕业于西北工业大学计算机学院．现任宁波大学理学院教授、宁波大学教学委员会委员、信息与计算研究所副所长，担任中国人工智能学会理事．

主要研究方向为代数学、计算机科学中的非经典数理逻辑、模糊集与Rough集理论及其在智能信息处理中的应用，先后在《中国科学》、《数学学报》等国内刊物以及美国、德国、日本、韩国、荷兰、波兰、捷克等国学术刊物发表论文100余篇，其中20余篇被SCI/EI/ISTP检索．在科学出版社、高等教育出版社、清华大学出版社等出版专著、教材等20余部．曾主持国家自然科学基金项目、浙江省自然科学基金项目、陕西省教育厅专项科研项目、宁波市青年基金项目，主持浙江省重点建设专业（信息与计算科学）项目．曾获得陕西省政府科学技术成果奖、陕西省政府优秀教学成果奖、陕西高等学校科学技术成果奖．入选浙江省151人才工程、浙江省高等学校中青年学科带头人培养对象．

ISBN 978-7-03-022145-2

9 787030 221452 >

定 价：58.00 元

模糊逻辑及其代数分析

张小红 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书论述模糊逻辑形式化系统及相关代数结构问题，主要是作者近年研究工作的总结，同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新成果.全书共7章，涉及互相关联的4个部分的内容：基础知识（包括 t–模、伪 t–模与剩余格的基本概念与基本理论）；基于 t–模的可换模糊逻辑研究（包括模糊命题逻辑系统BL, $\mathscr{L}^*$, MTL, UL*, RSL等）；基于伪 t–模的非可换模糊逻辑研究(包括非可换模糊命题逻辑系统PL, psBL, psMTL, PL*, PUL*等)；BCK/BIK$^+$逻辑及源于非经典逻辑的代数结构的系统研究.

本书可作为基础数学、应用数学、计算机科学与技术、逻辑学、智能信息处理技术、管理科学与决策分析等专业或方向的研究生选修课教材，对前述相关领域的科技人员均有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

模糊逻辑及其代数分析/张小红著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-022145-2

I. 模… II. 张… III. ① 模糊逻辑–基本知识 ② 模糊逻辑–数学分析

IV. B815.6 O142

中国版本图书馆CIP数据核字(2008) 第076441号

责任编辑：范庆奎 房 阳／责任校对：曾 茹
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年7月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008年7月第一次印刷 印张：21 1/2
印数：1—2 500 字数：408 000

定价：58.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新蕾〉)

前　言

模糊集与模糊推理方法为描述和处理事物的模糊性和系统的不确定性以及模拟人的智能和决策推理能力提供了十分有效的工具. 近年来模糊推理的逻辑基础得到活跃而深入的研究, 在这些国内外研究工作的基础上, 作者进行了一些新的探索, 主要涉及模糊逻辑的形式化及相关代数结构问题. 本书正是作者近年研究工作的总结, 同时也介绍了与之相关的国内外众多学者的最新研究成果.

本书共 7 章, 可分成如下 4 个部分:

(1) 基础知识, 包括第 1、2 章. 其中, 第 1 章为引言及预备知识. 为了阐明代数逻辑方法, 第 1 章还介绍了经典命题逻辑与布尔代数的关系. 第 2 章介绍 t–模、伪 t–模、剩余蕴涵与剩余格的基本概念与基本理论, 包括作者提出的伪 R_0 t–模. 特别强调的是本书 "剩余格" 概念包括可换和非可换两大类, 且有一些结果是新得到的.

(2) 基于 t–模的可换模糊逻辑研究, 包括第 3~5 章. 其中, 第 3 章介绍著名模糊命题逻辑系统 **BL**, $\mathscr{L}^*$ 及其各种扩张. 第 4 章介绍 **MTL**, **ΠMTL** 系统, 并重点论述作者提出的模糊命题逻辑系统 **UL***, 它是基于一般左连续 t–模的具有对合性、换质位对称性的命题演算形式系统, 其中包括 **UL*** 的完备性定理的证明. 第 5 章介绍作者提出的一个 Rough 逻辑系统 **RSL**, 它本质上是 t–模基模糊逻辑系统 **IMTL** 的一种 Rough 解释 (这也是将其归入本书的原因).

(3) 基于伪 t–模的非可换模糊逻辑研究, 即本书的第 6 章. 概述了著名的非可换模糊逻辑系统 **PL**, **psBL**(包括 **psBL**$^{\mathbf{r}}$) 及 **psMTL**(包括 **psMTL**$^{\mathbf{r}}$), 并重点论述作者建立的基于伪 R_0 t–模的非可换逻辑系统 **PL*** 及基于一般左连续伪 t–模的非可换模糊逻辑系统 **PUL***.

(4) **BCK/BIK**$^+$ 逻辑及源于非经典逻辑的代数结构的系统研究, 即第 7 章. 首先论述 **BCK** 逻辑、模糊 **BCK** 逻辑, 以及作者提出的 **BIK**$^+$ 逻辑及模糊 **BIK**$^+$ 逻辑, 它们都属于模糊逻辑的一般化研究 (即期望给出各种模糊逻辑的公共基础系统). 其次是揭示各种源于非经典逻辑的代数结构之间的内在联系, 将 BCK–代数、$BCC(BIK^+)$–代数作为它们的共同基础, 对滤子 (理想) 理论进行了统一处理. 同时, 对 (伪)BL–代数、(伪)MTL–代数、伪 BCK–代数、(伪)Hoop 等代数结构进行了深入研究, 并研究了模糊逻辑代数与量子 (伪) 效应代数之间的关系. 此外, 本章还介绍了作者新近提出的强 De Morgan 代数以及蕴涵格的一般滤子理论.

本书不仅涉及模糊逻辑的形式化系统及其可靠性、完备性等理论问题, 而且注意阐述形式化系统蕴涵的实际意义, 这对模糊控制、近似推理、知识表示、决策支持、计算语言学等应用领域有一定参考价值. 同时, 本书关于各种源于逻辑的代数结构内在联系的分析与统一处理, 从一个特殊的角度窥视了各种非经典逻辑之间的

联系, 对这些逻辑系统的进一步研究提供了新的思路.

为便于研究生学习和研究, 本书安排了习题 (包括一些研究课题), 并列出了丰富详细的参考文献. 此外, 为了避免混淆, 本书对于逻辑形式系统均使用黑正体或黑花体表示, 与其配套的代数结构则用斜体并加中短线 (如 **BL** 与 *BL*-代数).

作者在从事该领域研究工作的过程中, 先后得到清华大学应明生教授、北京师范大学李洪兴教授、陕西师范大学王国俊教授、四川省信息产业厅徐扬教授等众多前辈的鼓励和指导; 同时, 西安电子科技大学刘三阳教授、陕西师范大学李永明教授、西北大学辛小龙教授、四川师范大学王学平教授、西南交通大学秦克云教授、浙江理工大学裴道武教授、樊太和教授以及捷克科学院计算机科学研究所 Petr Cintula 教授、美国 Vanderbilt 大学 C. Tsinakis 教授、加拿大 Regina 大学 Y.Y. Yao 教授、韩国 Gyeongsang National 大学 Y.B.Jun 教授、波兰 Technical University 的 W.A.Dudek 教授、罗马尼亚 Academy of Economic Studies 的 Afrodita Iorgulescu 教授都给予作者极大的支持和帮助, 在此向他们表示衷心的感谢! 在本书的写作过程中, 日本千叶大学 Yuichi Komori 教授、美国 Chapman University 的 Peter Jipsen 教授、德国 Technische Universitat Darmstadt (TU Darmstadt) 的博士后 Laurentiu Leustean、捷克 Palacky University 的 Jan Kuhr、罗马尼亚 University of Bucharest 的 Andrei Popescu 博士以及 Ioana Leustean 博士寄来宝贵的最新研究论文, 使本书能紧跟国际学术研究的前沿, 谨向他们表示诚挚的谢意! 作者特别感谢尊敬的导师何华灿教授、孟杰教授、蒲义书教授多年来给予的热情关怀与悉心指导. 感谢杨永保、祝峰、王永全、王三民、刘用麟、薛占熬、马盈仓、罗敏霞等教授 (博士) 给予的帮助! 感谢家人给予的理解和支持!

本书的出版得到下列基金的支持: 国家自然科学基金项目 (编号: 60775038)、浙江省自然科学基金项目 (编号: Y605389)、宁波大学学术著作出版基金西北工业大学基础研究基金重点项目 (编号: W018101)、宁波大学研究生教育科研计划重大专项项目. 特此致谢. .

模糊逻辑基础理论及其应用是一个涉及范围广、日新月异的活跃研究领域, 本书仅从作者的兴趣出发论述了模糊命题逻辑形式系统及其相关代数结构方面的内容. 令人遗憾的是, 本书未能涉及模糊谓词逻辑. 作者最终没有将这部分内容包含在书中, 其原因有二: 一是篇幅已足够大而时间却不足; 二是作者看重带有一般语言量词 (即全称量词和存在量词以外的模糊量词) 的模糊逻辑系统, 然而这方面的研究成果却不多, 因此将语言量词和模糊谓词逻辑方面的内容放在以后的著作中可能更合适一些. 同时, 因作者水平和能力的限制, 加之研究生教育工作的迫切需要而对完成时间的严格要求, 本书难免不够完整和全面, 甚至存在疏漏, 敬请各位专家和广大读者批评指正!

张小红

2008 年 4 月于宁波大学文萃新村

目　录

第1章　引言与预备知识

1.1　引　　言

Zadeh 于 1965 年创立了模糊集合论 [1], 并在 1973 年提出模糊推理的 CRI 方法, 从而为描述和处理事物的模糊性和系统的不确定性以及模拟人的智能和决策推理能力提供了十分有效的工具. 模糊推理被应用于工业控制与家电产品的制造中, 取得了极大成功. 然而, 与应用相比, 模糊推理的理论基础并非无懈可击, 如 1993 年 7 月 Elken 博士 (现为加利福尼亚大学教授) 在美国第 11 届人工智能年会上作了题为 "模糊逻辑的似是而非的成功" 的报告 [2], 引起了一场轩然大波. 在洛杉矶出版的《IEEE 专家智能系统及其应用》杂志编委会组织模糊界和人工智能界的 15 位专家、学者对 Elkan 的文章进行评论 (如 Zadeh 的评论 [3]), 并于 1994 年 8 月在该刊物上出了一个专栏, 题为 *A Fuzzy Logic Symposium*, 其中包括 Elkan 的答复文章 [4] "关于模糊逻辑似是而非的争论". 这说明这场争论并未取得一致的意见. 事实上, 这场争论始终没有平息. 例如, 2001 年西班牙学者 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 在 *International Journal of Approximate Reasoning* 上撰文 [5] 再次论及 Elken 提出的问题, 有趣的是, 针对上述 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 的论文, Elken 本人在同一刊物发表了反驳文章 [6], 而 Enric Trillas 与 Claudi Alsina 又在同期杂志上发表了对 Elken 的反驳的 "注解" [7], 他们各持己见, 仍然没能得到一致的结论.

关于这场争论, 吴望名教授在文献 [8] 中进行了介绍和讨论, 应明生教授在文献 [9] 中说: "虽然 Elkan 的许多观点是错误的, 吴望名已经给予一定的澄清, 但模糊逻辑缺乏系统深入的理论研究却是不争的事实." 也正因为如此, 近年来模糊推理的逻辑基础得到活跃而深入的研究, 我国学者在这一领域取得了众多重要成果 (参见文献 [9]~[19]).

为了后续讨论的方便, 以下首先就几个与上述争论有关的问题、本书内容的研究背景等作一些说明.

1.1.1　关于狭义模糊逻辑、广义模糊逻辑与多值逻辑

在上述的 "争论" 中, Zadeh 在评述文章 [3] 中首次将模糊逻辑明确地划分为广义模糊逻辑与狭义模糊逻辑两种. Zadeh 指出: 从狭义上说, 模糊逻辑是一个逻辑系统, 它是多值逻辑的一个推广且作为近似推理的基础; 从广义上说, 模糊逻辑是一个更广的理论, 它与 "模糊集理论" 是模糊的同义语, 即没有明确边界的类的

理论.

Zadeh 还进一步指出 (参见著名的 *Handbook of Philosophical Logic* [20] 的 332 页): "狭义地说, 模糊逻辑 (FLn) 是这样的逻辑系统, 它的目标是近拟推理的形式化. 从这个意义上说, 模糊逻辑 (FLn) 是多值逻辑的扩展. 但模糊逻辑 (FLn) 的议题与传统多值逻辑有较大的差别. 特别是模糊逻辑 (FLn) 的许多关键概念在传统多值逻辑中是没有位置的, 如语言变量 (linguistic variable)、规范型、模糊 if-then 规则、模糊化与去模糊、谓词修正、真值量化、扩张原理、推理的运算规则和插值推理等. 广义地说, 模糊逻辑 (FLw) 是模糊集论 (fuzzy set theory, FST) 的同义语, 模糊集是具有不清晰边界的那些类. 模糊集论 (FST) 是如此的广阔, 它包括模糊逻辑为其分支."

捷克著名逻辑学专家 Hájek 在其专著 [22] 中指出: "即使我同意 Zadeh 关于多值逻辑与狭义模糊逻辑之区别的说法, 我还是认为多值逻辑的形式推演 (自然包括非传统) 是狭义模糊逻辑的内核或基础, 而搞清楚 Zadeh 提及的那些演算方法, 是一项很有前途的工作 (至今没有完成)."

引用上述经典论述的目的是想说明, 本书所涉及的 "模糊逻辑" 主要指 Zadeh 及 Hájek 所解释的 "狭义模糊逻辑", 并且着重于形式化演算方面.

1.1.2　关于 Elkan 的 "西瓜问题"

在上面提到的关于模糊逻辑的争论中, Elkan[2] 通过一个简单例子来说明模糊逻辑的困难, 姑且称其为 "西瓜问题":

考察一个系统在推理中以浅显的方式使用 "证据强度" 这一概念. 为具体化, 假设上下文是一堆西瓜, 在这一上下文中, 定义: 西瓜 $(x) \leftrightarrow$ 里红 $(x) \wedge$ 外绿 (x). 一个水果 m, 假如 t(里红 (m))=0.5, t(外绿 (m))=0.8, 意指 m 内部是红色的证据强度是 0.5, m 外表绿色的证据强度是 0.8, 于是 m 是西瓜的证据强度为 t(西瓜 (m))=min{0.5, 0.8}=0.5. 然而, 这一上下文中隐含的背景知识说明里红和外绿对于成为一个西瓜来说是互相加强的证据单元, 因此, m 是一个西瓜的证据强度应该超过 0.5.

关于上述 "西瓜问题", 吴望名教授在文献 [8] 中作了如下论述: 因为客观现象错综复杂, "与" 算子的选取也应具体问题具体分析. Elkan 所举西瓜 "证据强度" 的例子说明 min 算子用此例不合适, 但不能说采用别的算子就一定不合适. 目前 "与" 算子除采用 min 外, 还可以用有界积、乘积、各种 t- 模算子、一致 t- 模算子、广义模算子等. min 算子作为 "与" 算子可用于许多论域, 但不是所有论域. 其他的 "与" 算子在一定条件下适用于一定的实际问题, 数学的高度抽象性和客观世界的复杂多样性从来就是相辅相成的. 因此, 对模糊逻辑算子的否定是站不住脚的.

事实上, 对于模糊集理论中经常使用的 "取大取小" 算子, 许多学者都从不同角度阐述过它的不足, 如文献 [17] 中指出: "应用实践一再表明, 模糊命题联结词的运算模型不应该是一个固定不变的算子", 这与吴望名教授的上述观点是一致的. 此外, 文献 [23] 中也举例说明了模糊数学中 "取大取小" 运算引发的问题.

综上所述, 对于 "西瓜问题" 所揭示的 "取大取小" 的不足, 大家是有 "共识" 的, 用 Elkan 的话说即是不确定性的合取度一般不是由进入合取的判断的不确定性程度所唯一决定的. 不存在一个函数 f, 使规则 $t(A \wedge B) = f(t(A), t(B))$ 是普遍有效的, 不管采用什么类型的不确定性来表示 $t(\cdot)$.

1.1.3 关于代数逻辑 (algebraic logic)

事实上, 上述那场争论中有一些问题是由于同一名词的不同范围或不同内涵所引起的, 比如对逻辑公式 "赋值" 概念的不同理解可能导致不同的断言, 使用不同的 t- 模算子解释 "逻辑与" 会得到不同的逻辑结论. 因此, 要为模糊推理建立严格的逻辑基础, 必须建立起模糊逻辑演算的严密的形式化体系, 将模糊推理纳入严格的逻辑框架, 这就需要代数逻辑方法. 对于代数逻辑, 著名的哲学逻辑手册第二卷 [20] 作了如下描述:

代数逻辑可分成两个主要部分, 一部分研究与逻辑有关的代数系统, 即从逻辑引出的代数系统. 由于它研究的是代数, 因此主要采用代数方法. 另一部分是研究和建立逻辑与代数之间的桥梁, 它解决逻辑问题的方法是: ① 将其转化成代数问题 (即代数化处理); ② 解决代数问题 (这实际上属于第一部分); ③ 将结果转换为逻辑形式. 这里的重点是③. 同时, 建立起的这个桥梁还可倒过来运用, 即用逻辑方法解决代数问题.

本书主要研究模糊逻辑的形式化问题 (当然, 也论及其实际应用背景), 基本属于代数逻辑, 因而自然与代数系统密切相关. 这里还要说明本书的题目, 其实是借用美国著名学者 Chang 的经典论文 [24], 其标题是 "多值逻辑的代数分析", 本书使用 "模糊逻辑及其代数分析", 这也表明本书的研究方法与 Chang 的经典论文相近.

1.1.4 近年国内外模糊逻辑基础研究综述

1. 关于 t- 模基模糊逻辑

在模糊逻辑理论中, 长期占主导地位的是基于 t- 模 (triangular norm, 也称为 t 范数或三角范数) 的逻辑系统 (也称为 t- 模基逻辑). 在这类逻辑中, 使用 t- 模作为合取联结词的解释, 并由此解释其他命题联结词, 如蕴涵、析取联结词分别解释为由 t- 模诱导的剩余型蕴涵、与 t- 模关于否定算子对偶的 t 余模, 而否定联结词通常经由蕴涵解释为 $A \to 0$. 这样定义的逻辑理论具有许多优良的逻辑性质, 反映了人类日常思维与推理中的许多逻辑特征, 这类逻辑理论在模糊推理和人工智能研

究中已经获得广泛的应用.

1996 年以来, 捷克逻辑学专家 Hájek 发表了一系列富有意义的研究成果, 其中基本逻辑系统 **BL** (basic logic) 的提出对模糊逻辑的基础研究影响较大, 几个重要的模糊逻辑系统都是 **BL** 系统的语义扩张 (即公理模式扩张, 关于语义扩张的严格定义请见定义 1.5.11), 如 Łukasiewicz 连续值系统、Gödel 系统、积逻辑系统等. 关于逻辑系统 **BL** 的相关理论, 集中反映在文献 [22] 中. Hájek 还基于剩余格理论提出了与基本逻辑 **BL** 对应的 BL– 代数理论, 它包括 MV– 代数 [24,25]、Gödel 代数和积代数作为特例. 每个连续 t– 模唯一地确定单位区间 [0, 1] 上一个 BL–代数, 文献 [22] 提出了这样的公开问题：如果公式 A 是 [0, 1] 上每个 BL–代数中的重言式, 那么 A 在系统 **BL** 中是否必定可证? 换言之, 形式系统 **BL** 是否是所有连续 t–模基逻辑的公共的完备公理化? 2000 年, 文献 [26] 对于这个问题给出了肯定的回答.

同样是 1996 年, 为了寻求模糊推理的可靠逻辑基础, 王国俊教授基于对模糊逻辑与模糊推理方面存在问题的分析, 在全国第七届多值逻辑与模糊逻辑年会上, 提出了一个新的形式演绎系统 $\mathscr{L}^*$. 此后, 该系统经多次修改完善, 并发展成一整套理论, 集中反映在著作 [10], [11] 及文献 [27]~[31] 中. 系统 $\mathscr{L}^*$ 是基于 R_0 t–模及其剩余蕴涵 R_0 蕴涵算子 (也称为修正的 Kleene 蕴涵算子) 的, 具有许多优良的逻辑性质. 与系统 $\mathscr{L}^*$ 相配套的代数结构是 R_0–代数, 它的一种推广形式被称为弱 R_0–代数, 它们与 BL– 代数互不包含 [31]. 同时, 王国俊教授倡导模糊逻辑与模糊推理的结合研究, 并于 1999 年提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法 (简称为三 I 算法, 参见文献 [32]), 有效地改进了 Zadeh 在 1973 年提出的求解 FMP 问题的合成推理规则 (compositional rule of inference, CRI). 关于三 I 算法, 还有一系列文献对其进行更深入的研究, 可参见文献 [33]~[39].

2001 年, 西班牙学者 Esteva 和 Godo[40] 建立了基于左连续 t– 模的模糊逻辑系统 **MTL** (monoidal t-norm-based logic), 并得到几个语义扩张系统, 即弱幂零极小逻辑 **WNM** (weak nilpotent minimum), 对合 Monoidal t– 模基逻辑 **IMTL** 及幂零极小逻辑 **NM** (nilponent minimum). 同时, 提出了与这些逻辑系统相关的代数结构 MTL– 代数, WNM– 代数, $IMTL$– 代数和 NM– 代数, 构建了这些形式系统的语义. **MTL** 逻辑系统的标准完备性的证明由 Jenei 与 Montagna 在文献 [41] 中完成. 有趣的是, 2003 年裴道武在文献 [42], [43] 中证明了系统 $\mathscr{L}^*$ 与 **NM** 是等价的, R_0– 代数和 NM– 代数实际上是相同的代数系统, 弱 R_0– 代数和 $IMTL$– 代数也是相同的代数系统.

2. 关于模糊蕴涵算子与含参 t– 模

在模糊逻辑中, 选择怎样的蕴涵算子对模糊推理的效果有直接影响. 如上所述, 在现已建立的各种模糊逻辑系统中, 所选择的蕴涵算子基本上都与某种 t– 模相伴,

即均为剩余蕴涵. 文献 [44], [45] 中涉及一些其他类型的模糊蕴涵算子. 一个值得注意的研究思路是带参数的模糊蕴涵算子, 如 Klement 与 Navara 在 1999 年研究了基于带参数的 Frank t- 模的模糊逻辑系统 [46]; 吴望名教授、王国俊教授等分别在 2000 年、2003 年研究了带参数的 Kleene 系统 [47] 和 H_α 系统 [48]; 而美国学者 Whalen 也于 2003 年在 *Fuzzy Sets & Systems* 上发表了长达 50 页的论文 [49], 专门论述带参数的 Schweizer-Sklar R-蕴涵, 并将其中的参数 p 与模糊规则之间交互作用的强度联系起来; 为了刻画逻辑柔性, 何华灿教授在建立新逻辑体系时选择了带参数的 t- 模 [17], 并用广义相关性和广义自相关性来描述代表柔性的参数的意义; 文献 [50]~[56] 则从不同侧面深入论述了含参联结词在模糊逻辑、模糊控制、决策支持、神经网络等中的重要意义等. 因此, 在模糊逻辑体系中加入适当参数, 已成为一个重要而有意义的研究方向, 这可能是模糊逻辑与模糊推理相结合的新途径.

3. *关于伪 t- 模与非可换模糊逻辑*

非可换逻辑由 Abrusci 与 Ruet 提出 (参见文献 [57]~[59]), 它统一了可换线性逻辑、cyclic 线性逻辑 (我国学者在非可换线性逻辑方面也进行了一些探索研究, 参见文献 [60], [61]), 是 Lambek 演算 [62] 的标准保守扩张. 非可换逻辑在不确定推理与决策、逻辑程序设计、模糊专家系统、模糊数据库及计算语言学等领域都有重要应用价值, 分别参见文献 [63]~[70] 等. 受非可换逻辑的影响, 模糊逻辑学界近年开始了非可换模糊逻辑的探索研究, 如 Flondor, Geogescu, Lorgulescu 在文献 [71] 中首次系统研究了伪 t-模, Hájek 在多个国际会议上报告了非可换 BL 系统 (正式发表的论文见文献 [72], [73]), Jenei, Montagna 及 Leustean 分别在文献 [74], [75] 中研究了非可换 **MTL** 逻辑和非可换 Łukasiewicz 逻辑系统. 与之相关的非可换逻辑代数也有深入研究 [76~78](事实上, 如同文献 [72] 所指出的那样, pseudo-BL-代数、pseudo-MV-代数, 即非可换 BL- 代数、非可换 MV- 代数的研究, 先于相应的非可换模糊逻辑). 也许有人会质疑非可换模糊逻辑研究的意义, 实际上, 非可换的模糊联结词很早就有学者进行研究, 近年在模糊控制、近似推理等应用的驱动下, 越来越多的学者注意到它的重要性, 如文献 [67]~[70]. 另一些相关研究可参阅文献 [79]~[82].

4. *模糊逻辑基础研究的其他方向*

除上述提到的模糊命题逻辑及与之对应的模糊谓词逻辑研究外, 还有若干重要研究方向值得关注, 比如关于模糊模态逻辑、模糊量词的研究 [83,84], 模糊逻辑与计量逻辑的结合研究 [11], 模糊逻辑与概率逻辑的关系及其结合研究 [14,85~88], 非单调模糊逻辑研究 [89], 模糊逻辑与 Rough 逻辑的结合研究 [90] 等.

这里对模糊 (语言) 量词研究稍作详细介绍. 经典一阶谓词逻辑的表达能力很

有限, 因为它仅有两个量词 (即全称量词 ∀ 和存在量词 ∃), 而自然语言中却大量存在诸如 "几个"、"大多数"、"不很多"、"大约十个" 等语义含糊的量词. 这就促使逻辑学家和语言学家对量词进行更深入的研究, 早在 1957 年 Mostowski[91] 就提出了广义量词的一般概念, 20 世纪 80 年代初 Barwise 和 Cooper[92] 开始了自然语言中广义量词的研究, 2002 年 Keenan 在文献 [93] 中论及了近年该领域的一些相关成果. 在人工智能学界, 人们已经清楚地认识到语言量词对高水平的知识表示和推理具有重要意义 [94], 这正是带词计算理论兴起的主要动机之一 [95~97]. 20 世纪七八十年代, Zadeh 首先用模糊集理论方法描述了语言量词 [98,99], 他把语言量词看成是模糊数, 一个语言上的量化命题的真值可以通过计算模糊集合的势 (基数) 来完成. 从此, 大量的文献开始热衷于在模糊集理论的框架下研究语言量词. 例如, Yager[101],[102] 提出了关于量化命题求值的替代方法, 它是基于 OWA(有序加权平均) 算子的, 文献 [103], [104] 对此方向的研究进行了系统总结. 同时, 模糊量化模型被用来解决许多不同领域的各种问题, 如数据库查询、数据挖掘和知识发现、信息融合、群体决策和多目标决策支持、归纳学习、优化和控制等 [105~108]. 近年来关于语言量词的一批重要成果相继问世, 特别是 2006 年发表的如下成果值得重点关注: 其一是德国学者 Glöckner 的专著 [109], 其中提出了一套自然语言量词的系统理论, 其特色是与广义量词理论相容且具有严格的公理化基础; 其二是我国著名学者应明生教授发表在国际权威期刊 *Artificial Intelligence* 上的长篇论文 [84], 应明生教授在其已有系列论文的基础上, 创造性地提出一个用于建立自然语言量词模型的新框架. 在这个框架下, 语言量词用 Sugeno 模糊测度来表示, 一个量化命题的真值可通过使用 Sugeno 积分求得. 从而能使语言量词具有一些好的逻辑性质 (如得到语言量词的前束范式定理), 且具有广泛的应用价值 (如数据归并、数据库查询、决策支持、归纳学习等). 在文献 [84] 的基础上, 已有一些新的研究进展, 可参阅文献 [110], [111].

5. 与模糊逻辑研究相关的其他方面

影响模糊逻辑向纵深发展的因素是多方面的, 这里主要介绍一个最新研究动向, 即泛逻辑 (universal logic). 2005 年 3 月 31 日 ~ 4 月 3 日, 首届世界泛逻辑学术会议 (1st World Congress and School on Universal Logic, www.uni-log.org) 在瑞士 Montreux 召开, 会议由国际符号逻辑联合会、瑞士国家科学基金会、瑞士数学学会、(巴西) 国家科学与技术发展委员会、瑞士 Neuchatel 大学等组织和单位联合举办, 旨在把各种各样的关于逻辑学的学术活动联合起来, 以促进不同领域的专家相互交流. 大会发起人之一瑞士 Béziau 教授这样描述泛逻辑: "与泛代数是代数结构的一般理论类似, 泛逻辑是逻辑结构的一般理论. 泛逻辑不是一个新的逻辑, 它是一个通过发展能用于所有逻辑的一般工具和概念以统一逻辑多样性的方法. 泛

逻辑的一个目标是确立这样一个合适的领域及元理论 (如完备性理论), 并给出元理论的一般形式化描述. 这不仅对应用来说是非常有益的, 而且有助于揭示各种特殊逻辑的本质区别, 从而能更好地理解这些特殊逻辑. 泛逻辑也可以看成根据给定的条件生成特殊逻辑的工具箱, 如次协调的义务时态逻辑." 有关国际泛逻辑学的研究可参阅文献 [112]~[115]. 我国学者何华灿教授独立于国际学术界初步建立了泛逻辑学理论 [17,116~118], 应邀参加了首届世界泛逻辑学大会, 并于 2007 年 8 月在西安组织承办了第二届世界泛逻辑学大会 (参见 www.uni-log.org, www.uni-log.cn).

可以预言, 国际泛逻辑研究 (已有泛逻辑学研究的国际专门期刊 *Logica Universalis*) 必将对模糊逻辑研究产生积极影响. 不过, 本书将主要涉及前 4 个方面的内容 (并非全部), 而本章的其他内容是一些预备知识.

1.2 序 与 格

本节主要内容选自文献 [119]~[121].

1.2.1 偏序集

非空集合 E 上的二元关系 R 是笛卡儿积 $E\times E=\{(x,\ y)|x,\ y\in E\}$的一个子集, 当 $(x,\ y)\in R$ 时, 称 $x,\ y$ 具有 R 关系, 写成 xRy. 一般地, 集合 E 上的二元关系满足一些特殊性质, 如等价关系具有以下性质:

自反性. $\forall x\in E,\ (x,\ x)\in R$.

对称性. $\forall x,\ y\in E$, 若 $(x,\ y)\in R$, 则 $(y,\ x)\in R$.

传递性. $\forall x,\ y,\ z\in E$, 若 $(x,\ y)\in R,\ (y,\ z)\in R$, 则 $(x,\ z)\in R$.

对于 E 上的关系 R, 如下定义 R 的对偶关系 R^{d}: $(x,\ y)\in R^{\mathrm{d}}\Leftrightarrow(y,\ x)\in R$. 这样, 等价关系中的对称性可表示为 $R=R^{\mathrm{d}}$. 另外, 与上述对称性相对, 有下述反对称性 (anti-symmetric):

$\forall x,\ y\in E$, 若 $(x,\ y)\in R,\ (y,\ x)\in R$, 则 $x=y$, 即 $R\cap R^{\mathrm{d}}=\mathrm{id}_E$, 其中, id_E 表示恒等关系.

定义 1.2.1 非空集合 E 上的二元关系 R 若具有自反性、反对称性和传递性, 则称 R 为 E 上的序关系或偏序关系.

通常用符号 $\leqslant$ 表示 (偏) 序关系, 而 $(x,\ y)\in\leqslant$ 被等价地表示为 $x\leqslant y$, 读作"x 小于等于 y". 集合 E 上若有偏序关系 $\leqslant$, 则称 $(E;\ \leqslant)$ 为一个偏序集 (partial ordered set, poset). 若 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$, 则记为 $x<y$. 若 $x\nleqslant y$ 且 $y\nleqslant x$, 则称 $x,\ y$ 不可比, 记为 $x\|y$. 称偏序集 $(E;\ \leqslant)$ 是一个链 (chain), 如是对任意 $x,\ y\in E,\ x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$; 此时 $\leqslant$ 称为是全序关系. 相对地, 如是对任意两个不同元 $x,\ y\in E,\ x,\ y$ 均不可比, 则称 $(E;\ \leqslant)$ 是一个反链 (anti-chain), 此时 $\leqslant$ 实际上就是相等关系.

容易验证, 任一非空集合 E 的所有子集组成的集合 $P(E)$, 关于集合的包含关系 $\subseteq$ 构成偏序集; 自然数集 $\mathbf{N}$ 上的整除关系 $|$ ($m|n$ 当且仅当 m 整除 n) 是 $\mathbf{N}$ 上的偏序关系; 如果 $(P;\leqslant)$ 为偏序集, $Q\subseteq P$, Q 上定义二元关系 $\leqslant_Q$ 为: $\forall x, y\in Q$, $x\leqslant_Q y\Leftrightarrow x\leqslant y$, 则 $\leqslant_Q$ 为 Q 上的序关系, 常把 $\leqslant_Q$ 简写成 $\leqslant$, 并称 Q 继承了 P 上的序关系 $\leqslant$.

例 1.2.1　如果 $(E_\alpha;\leqslant)_{\alpha\in A}$ 为偏序集簇, 那么定义笛卡儿积集 $\prod\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$ 上的关系 $\leqslant$ 如下:

$$(x_\alpha)_{\alpha\in A}\leqslant(y_\alpha)_{\alpha\in A}\Leftrightarrow(\forall\alpha\in A)\quad x_\alpha\leqslant y_\alpha,$$

则 $\left(\prod\limits_{\alpha\in A}E_\alpha;\leqslant\right)$ 为偏序集, 称 $\leqslant$ 为笛卡儿序 (Cartesian order). 注意, 每一个偏序集中用了相同的符号 $\leqslant$.

例 1.2.2　设 E, F 为偏序集, 定义映射集 $\mathrm{Map}(E, F)$ 上的关系 $\leqslant$ 如下:

$$f\leqslant g\Leftrightarrow(\forall x\in E)f(x)\leqslant g(x),$$

则 $(\mathrm{Map}(E, F);\leqslant)$ 为偏序集. 这里 $\mathrm{Map}(E, F)$ 表示集 E 到集 F 的所有映射构成的集合.

例 1.2.3　设 $(P_1;\leqslant_1)$, $(P_2;\leqslant_2)$ 为偏序集, 定义笛卡儿积集 $P_1\times P_2$ 上的关系 $\leqslant$ 如下:

$$(x_1,x_2)\leqslant(y_1,y_2)\Leftrightarrow(x_1<_1 y_1,\ \text{或}\ x_1=y_1\ \text{且}\ x_2\leqslant_2 y_2),$$

则 $(P_1\times P_2;\leqslant)$ 为偏序集, 称 $\leqslant$ 为字典序 (lexicographic order). 容易验证, $\leqslant$ 为全序当且仅当 $\leqslant_1$, $\leqslant_2$ 均为全序.

定理 1.2.1　如果 R 为 E 上的偏序, 则其对偶 R^{d} 也是 E 上的偏序.

对于偏序集 $(E;\leqslant)$, 记与序关系 $\leqslant$ 的对偶关系为 $\geqslant$, 则 $(E;\geqslant)$ 称为 $(E;\leqslant)$ 的对偶, 通常记为 E^{d}.

作为定理 1.2.1 的推论, 可以得到

对偶原理(principle of duality)　每一个关于偏序集 E 的定理, 都有与之相应的关于对偶序集 E^{d} 的定理. 这可通过替换每一个关于 $\leqslant$ 的 (显式或隐式的) 陈述为关于对偶序 $\geqslant$ 的陈述所得到的.

设 $(E;\leqslant)$ 为偏序集, 若存在一元素 $x\in E$, 使得对每一 $y\in E$ 都有 $y\leqslant x$, 则称 x 为 E 的顶元 (top element) 或最大元 (maximum element). 对偶的概念是底元 (bottom element) 或最小元 (minimum element), 即若对任意 $y\in E$ 都有 $y\geqslant z$, 则

称 z 为 E 的底元或最小元. 最大元 (最小元) 若存在, 则必是唯一的. 一个偏序集若同时存在最大元和最小元, 则称它是有界的 (bounded).

定义 1.2.2 设 $(E;\leqslant)$ 为偏序集, 如果 $x<y$ 且不存在 $a\in E$ 使得 $x<a<y$, 那么就称 x 被 y 覆盖 (或者 y 覆盖 x), 也称 x 是 y 的下邻 (或者 y 是 x 的上邻), 记为 $x\prec y$. 若 E 有最小元, 则最小元的上邻 (若存在) 称为原子 (atom); 对偶地, 若 E 有最大元, 则最大元的下邻 (若存在) 称为余原子 (coatom).

对于有限序集, 可以用 Hasse 图 (Hasse diagram) 来表示, 即用圈或点表示元素, 当且仅当 $x\prec y$ 时把 y 画在较 x 高的位置上并用线段将 x 和 y 连接起来. 例如, 令 $E_1=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, 即能被 12 整除的所有正整数组成的集合, 规定其上的序为整除关系, 则偏序集 $(E_1;\leqslant)$ 可由如图 1.1 所示的 Hasse 图表示. 令 $E_2=P(\{a, b, c\})$, 即集合$\{a, b, c\}$的幂集, 规定其上的序为包含关系, 则偏序集 $(E_2;\leqslant)$ 可由如图 1.2 所示的 Hasse 图表示.

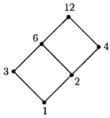


图 1.1 Hasse 图示例(1)

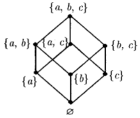


图 1.2 Hasse 图示例(2)

1.2.2 保序映射、剩余映射与序同构

定义 1.2.3 设 $(A;\leqslant_1)$ 和 $(B;\leqslant_2)$ 为偏序集, 映射 $f\colon A\to B$ 称为是保序的 (order-preserving, 或 isotone), 如果成立:

$$(\forall x, y\in A)x\leqslant_1 y\Rightarrow f(x)\leqslant_2 f(y).$$

映射 $f\colon A\to B$ 称为是反序的 (order-inverting, 或 antitone), 如果成立:

$$(\forall x, y\in A)x\leqslant_1 y\Rightarrow f(x)\geqslant_2 f(y).$$

定义 1.2.4 设 $(E;\leqslant)$ 为偏序集, $D\subseteq E$. 如果 D 具有以下性质:

$$\forall x\in D, y\in E, y\leqslant x\Rightarrow y\in D,$$

则称 D 为 E 的下集 (down-set). 空集也为下集. 称 $x\downarrow=\{y\in E|y\leqslant x\}$为主下集 (principle down-set). 对偶地, 定义上集 (up-set) 为满足以下条件的子集:

$$\forall x \in D, y \in E, y \geqslant x \Rightarrow y \in D.$$

称 $x\uparrow=\{y \in E | y \geqslant x\}$为主上集 (principle up-set).

定理 1.2.2　设 E, F 为偏序集, $f\colon E \to F$ 为任一映射, 则以下条件等价:

(1) f 是保序映射;

(2) F 的每一个主下集的逆象为 E 的下集;

(3) F 的每一个主上集的逆象为 E 的上集.

分析上面的结论, 一个很自然的问题是, 在什么条件下主下集的逆象还是主下集呢? 下面的定理圆满地回答了这一问题.

定理 1.2.3　设 E, F 为偏序集, 则以下关于映射 $f\colon E \to F$ 的两个条件等价:

(1) F 的每一个主下集在 f 下的逆象为 E 的主下集;

(2) f 是保序的且存在一个保序映射 $g\colon F \to E$ 使得 $g \circ f \geqslant \mathrm{id}_E$, $f \circ g \leqslant \mathrm{id}_F$.

容易证明, (2) 中的保序映射 $g\colon F \to E$ 是唯一的.

定义 1.2.5　满足定理 1.2.3 中任何一个条件的映射 $f\colon E \to F$ 称为是剩余的 (residuated), 相应的唯一保序映射 $g\colon F \to E$ 称为 f 的剩余, 记为 f^+.

容易验证: (1) $\forall y \in F$, $f^+(y)=\max f^{-1}(y\downarrow)=\max\{x \in E | f(x) \leqslant y\}$. (2) $f \circ f^+ \circ f = f$, $f^+ \circ f \circ f^+ = f^+$.

定理 1.2.4　设 $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ 均是剩余映射, 则 $g \circ f$ 也是剩余映射且 $(g \circ f)^+ = f^+ \circ g^+$.

定义 1.2.6　偏序集 E 到偏序集 F 的序同构 (order isomorphism) 是指这样的映射 $f\colon E \to F$, 它是保序的双射且其逆映射 f^{-1} 也是保序的.

如果存在序同构 $f\colon E \to F$, 那么就说 E, F 是同构的. 例如, 具有图 1.3 所示的 Hasse 图的两个偏序集是同构的.

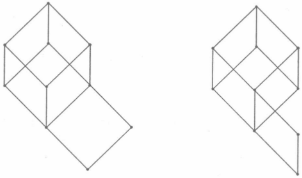


图 1.3　序同构示例

定理 1.2.5 偏序集 E 和 F 是同构的当且仅当存在满射 f: $E \to F$ 使得

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

1.2.3 格及其理想 (滤子)

如果 E 为偏序集, $x \in E$, 那么 $x\downarrow$ 到 E 的典型嵌入 (canonical embedding, 即 E 上恒等映射在 $x\downarrow$ 上的限制) 显然是保序的. 下面的结论表明, 当该嵌入为剩余映射时, 将对描述 E 的构造有重要作用.

定理 1.2.6 如果 E 为偏序集, 则以下条件等价:

(1) $\forall x \in E$, $x\downarrow$ 到 E 的典型嵌入为剩余映射;

(2) 任意两个主下集的交为主下集.

定义 1.2.7 如果偏序集 E 满足定理 1.2.6 中的等价条件, 则称 E 为交半格 (meet semilattice, 或 $\wedge$-semilattice); 并将满足 $x\downarrow \cap y\downarrow = \alpha\downarrow$ 的元素 α 记为 $x \wedge y$, 称为 x 与 y 的交 (meet).

交半格可用纯代数的方法来定义, 因为有下述结论成立: 若 $(E; \leqslant)$ 为交半格, 则 $(E; \wedge)$ 为可换幂等半群. 反之, 任一可换幂等半群 $(E; \cdot)$ 均可诱导出一个交半格, 这里, $x \leqslant y$ 定义为 $x \cdot y = x$, 且由此得到的交半格中 $(\forall x, y \in E)$, $x \wedge y = x \cdot y$. 另外, 交半格还可由下确界概念来定义.

定义 1.2.8 设 E 为偏序集, $F \subseteq E$, $x \in E$. 如果 $\forall y \in F$, $x \leqslant y$, 则称 $x \in E$ 为 F 的下界 (lower bound). 如果 $\forall y \in F$, $x \geqslant y$, 则称 x 为 F 的上界 (upper bound).

一般地, F 在 E 中的下界之集用 $F\downarrow$ 表示, 上界之集用 $F\uparrow$ 表示. 特别地, $\{x\}\uparrow = x\uparrow$, $\{x\}\downarrow = x\downarrow$. 注意, $F\uparrow$ 和 $F\downarrow$ 可能为空集, 但 E 有界的话它们一定非空. 如果 E 有最大元 1, 则 $E\uparrow = \{1\}$, 否则 $E\uparrow = \varnothing$. 同理, 如果 E 有最小元 0, 则 $E\downarrow = \{0\}$, 否则 $E\downarrow = \varnothing$. 如果 F 为空集, 那么对每一个 $x \in E$ 满足关系 $y \leqslant x$, $\forall y \in F$, 故 $\varnothing\uparrow = E$. 类似地, $\varnothing\downarrow = E$.

定义 1.2.9 设 E 为偏序集, $F \subseteq E$. 如果 F 的下界之集 $F\downarrow$ 有最大元, 则称此最大元为 F 的下确界 (infimum, 或 greatest lower bound), 记为 $\inf_E F$, 在不引起混淆的情况下, 简记为 $\inf F$.

由于 $\varnothing\downarrow = E$, 所以 $\inf_E\varnothing$ 存在当且仅当 E 有最大元 1, 此时 $\inf_E\varnothing=1$. 同时, 交半格也可这样定义: 偏序集 E 称为是交半格, 如果对于任意 $x,y \in E$, $\{x,y\}$ 总有下确界, 且有 $\inf\{x, y\}=x \wedge y$. 显然, 对每一交半格的有限子集$\{x_1, \cdots, x_n\}$, $\inf\{x_1, \cdots, x_n\}$存在且为 $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$.

对上述概念进行对偶性扩展, 可得到并半格 (join semilattice 或 $\vee$-semilattice) 的概念: 一个偏序集 E, 如果任意两主上集的交为主上集, 则称 E 为并半格. 这样, 存在元素 β 使得 $x\uparrow \cap y\uparrow = \beta\uparrow$, 记 β 为 $x \vee y$, 称作 x 和 y 的并. 同样, 并半格也

可定义为可换幂等半群 $(E;\cdot)$, 这里 $x \leqslant y$ 被定义为 $x \cdot y = y$. 同样地, 可定义上确界 (supermum, 或 least upper bound) 的概念, 记为 $\sup_E F$. 特别地, $\sup_E \varnothing$ 存在当且仅当 $\varnothing \uparrow = E$ 有最小元 0, 此时 $\sup_E \varnothing = 0$. 在并半格中, $\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\sup\{x_1, \cdots, x_n\} = x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

定义 1.2.10　称偏序集 $(E; \leqslant)$ 是一个格, 如果它同时为并半格和交半格.

这样, 一个格是一个偏序集, 它的每一对元素 (每一有限子集) 都有下确界和上确界, 通常把格记为 $(E; \wedge, \vee, \leqslant)$.

定理 1.2.7　一个集合 E 有格结构的充要条件是存在两个二元运算 $\cap$, $\cup$, 使得

(1) $(E; \cap)$ 和 $(E; \cup)$ 为交换半群;

(2) 吸收律 (absorption law) 成立: $(\forall x, y \in E) x \cap (x \cup y) = x = x \cup (x \cap y)$.

定义 1.2.11　如果交半格 L 的每一个子集 E 均有下确界 (记为 $\inf_L E$ 或 $\wedge E$), 则称 L 是 $\wedge$ 完备的 ($\wedge$-complete). 如果并半格 L 的每一个子集 E 均有上确界 (记为 $\sup_L E$ 或 $\vee E$), 则称 L 是 $\vee$ 完备的 ($\vee$-complete). 如果一个格 L 同时是 $\vee$ 完备和 $\wedge$ 完备的, 则称 L 是完备格 (complete lattice).

每一完备格都有最大元和最小元, 通常记为 1_L 和 0_L, 也简记为 1 和 0.

定理 1.2.8　一个 $\wedge$ 完备的 $\wedge$ 半格是完备格当且仅当它有最大元. 对偶地, 一个 $\vee$ 完备的 $\vee$ 半格是完备格当且仅当它有最小元.

定理 1.2.9　设 L 是格, 则对 L 中任意元 x, y, z 都有

(1) $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(2) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

(3) 若 $x \leqslant z$, 则 $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge z$.

称 (1), (2) 为分配不等式, (3) 为模不等式.

定义 1.2.12　设 L 是格, 如果对 L 中任意元 x, y, z 都有

(1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

则称 L 是分配格.

实际上, 上述定义中的两个条件, 只要一个成立, 另一个必定成立. 容易验证, 全序集是分配格.

定义 1.2.13　格 L 称为是模格 (modular lattice), 如果 L 满足如下模律:

$$\forall x, y, z \in L, x \leqslant z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

例 1.2.4　具有图 1.4 所示 Hasse 图的两个偏序集均是格, 其中, 五元格 M_5 是模格但不是分配格, 五元格 N_5 不是模格 (当然也不是分配格).

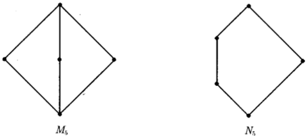


图 1.4 五元格 M_5 及 N_5

定义 1.2.14 如果交半格 L 上的非空子集 E 在交运算下封闭的, 即 $(x, y \in E) \Rightarrow x \wedge y \in E$, 那么就称 E 为 L 的 $\wedge$ 子半格. 对偶地, 可定义并半格的 $\vee$ 子半格. 如果格的某一子集同时为 $\wedge$ 子半格和 $\vee$ 子半格, 那么就称其为子格 (sublattice).

定理 1.2.10 设 L 是格, 则以下条件等价:

(1) L 是模格;

(2) L 不含五元子格 N_5;

(3) $\forall x, y, z \in L, (x \wedge z = y \wedge z, x \vee z = y \vee z, x \leqslant y) \Rightarrow x = y$.

定理 1.2.11 设 L 是格, 则以下条件等价:

(1) L 是分配格;

(2) L 不含五元子格 M_5 和 N_5;

(3) $\forall x, y, z \in L, (x \wedge z = y \wedge z, x \vee z = y \vee z) \Rightarrow x = y$.

对于分配格, 分别称以下条件为第一无限分配律 (无限交分配律) 和第二无限分配律 (无限并分配律): $x \wedge (\vee_{i\in I} y_i) = \vee_{i\in I}(x \wedge y_i)$, $x \vee (\wedge_{i\in I} y_i) = \wedge_{i\in I}(x \vee y_i)$. 注意, 一个分配格满足第一 (二) 无限分配律未必满足第二 (一) 无限分配律.

定义 1.2.15 如果格 L 的子格 I 同时又是下集, 则称 I 为格 L 的理想 (ideal). 对偶地, 如果子格 F 同时又为上集, 则称 F 为格 L 的滤子 (filter).

格 L 的不等于 L 的理想 (滤子) 称为真理想 (真滤子).

定理 1.2.12 设 L 为格, I 是 L 的非空子集, 则以下条件等价:

(1) I 为 L 的理想;

(2) I 是下集且对并运算封闭;

(3) $\forall x, y \in L, x \vee y \in I \Leftrightarrow (x, y \in I)$.

对偶地, 设 F 是 L 的非空子集, 则以下条件等价:

(1′) F 为 L 的滤子;

(2′) F 是上集且对交运算封闭;

(3′) $\forall x, y \in L, x \wedge y \in F \Leftrightarrow (x, y \in F)$.

定理 1.2.13　如果 L 为格, 则 L 的理想构成的集合 $\mathcal{I}(L)$ 关于集合包含关系构成格, 其格运算为

$$\forall J, K \in \mathcal{I}(L), \inf\{J, K\} = J \cap K, \sup\{J, K\} = \{x \in L | \exists j \in J, k \in K \text{ 使得 } x \leqslant j \vee k\}.$$

定义 1.2.16　设 L 为格, I 是 L 的真理想. 如果以下条件成立:

$$\forall x, y \in L, x \wedge y \in I \Rightarrow x \in I \text{ 或 } y \in I,$$

则称 I 是素理想 (prime ideal). 对偶地, L 的真滤子 F 称为是素滤子 (prime filter), 如果以下条件成立:

$$\forall x, y \in L, x \vee y \in F \Rightarrow x \in F \text{ 或 } y \in F.$$

容易验证, I 是 L 的素理想当且仅当 $L \backslash I$ 是素滤子.

设 I 是格 L 的真理想, 如果真包含 I 的理想只有 L, 则称 I 是极大理想. 对偶地, 可定义极大滤子的概念.

定理 1.2.14　设 L 是有最大元 1 的分配格, 则 L 中的极大理想均为素理想. 对偶地, 在有最小元 0 的分配格中, 极大滤子均为素滤子.

定理 1.2.15　设 L 是分配格, J 是 L 的理想, G 是 L 的滤子, 且 $J \cap G = \varnothing$, 则存在 L 的素理想 I 和素滤子 $F \subseteq L \backslash I$, 使得 $J \subseteq I$ 且 $G \subseteq F$.

定义 1.2.17　设 L 和 M 是 $\vee$ 半格, 映射 f:$L \to M$ 称为 $\vee$ 态射 ($\vee$-morphism), 如果 $\forall x, y \in L$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$. 可对偶地定义 $\wedge$ 态射 ($\wedge$-morphism). 设 L 和 M 是格, 如果 f: $L \to M$ 同时为 $\vee$ 态射和 $\wedge$ 态射, 那么称 f 是格态射 (lattice morphism). 如果 $\wedge$ 态射 ($\vee$ 态射或格态射) 又是双射, 则称为 $\wedge$ 同构 ($\vee$ 同构或格同构). 如果存在格同构 f:$L \to M$, 则称格 L 和 M 是同构的.

$\wedge$ 态射、$\vee$ 态射及格态射通常又分别称为 $\wedge$ 同态、$\vee$ 同态及格同态.

定理 1.2.16　设 L 和 M 是格, f:$L \to M$ 是映射, 则以下条件等价:

(1) f 是格同构;

(2) f 是 $\wedge$ 同构;

(3) f 是 $\vee$ 同构;

(4) f 是序同构.

1.3　布尔代数及其各种推广

1.3.1　布尔代数、Ockham 代数与 De Morgan 代数

定义 1.3.1　设 L 是有界格, $x, y \in L$. 若 $x \wedge y$=0, $x \vee y$=1, 则称 y 是 x 的一

个补 (complement), 而 x 称为有补元 (complemented element). 有界格 L 称为有补格, 如果它的每一个元素都是有补的. 一个有补分配格称为 Boole 格或 Boole 代数.

在 Boole 格中, 任意元素均有补且其补是唯一的, 常将元素 x 的唯一补记为 x' 或 $\neg x$. 注意, 使用术语 "Boole 格" 时将其看成序结构, 而使用术语 "Boole 代数" 时将其看成代数结构 (即有二元运算 $\wedge, \vee$, 一元运算 $'$ 及常元 0, 1 的代数系统).

定义 1.3.2 设 E 是一个集合, $\mathcal{B}$ 是由 E 的子集构成的集簇, 称 $\mathcal{B}$ 是一个集域 (field of sets), 如果满足条件: $\forall X, Y \in \mathcal{B}, X \cap Y \in \mathcal{B}, X \cup Y \in \mathcal{B}, X' \in \mathcal{B}$.

定理 1.3.1 任何一个 Boole 格都同构于一个集域.

定理 1.3.2 设 B 是 Boole 代数, 则以下条件等价:

(1) B 同构于一个幂集代数, 即 $B \simeq P(E)$, 这里 $P(E)$ 是某集合 E 的幂集;

(2) B 是完备的原子格.

注 1.3.1 原子格 (atomic lattice) 是满足以下条件的含 0 格 L: $\forall x \in L\backslash\{0\}$, 存在 L 的原子 a 使得 $a \leqslant x$. 可对偶地定义余原子格 (coatomic lattice).

推论 1.3.1 设 B 是有限 Boole 代数, 则 B 有 2^n 个元素, 其中 n 是 B 的原子个数.

定义 1.3.3 称代数结构 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个 Ockham 代数, 如果

(1) $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ 是一个有界分配格;

(2) 一元运算$'$:$L \to L$ 满足 De Morgan 律, 即 $\forall x, y \in L$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$;

(3) $0'$=1, $1'$=0.

显然, Ockham 代数是广义 Boole 代数. 上述 (2), (3) 说明 $'$ 是 L 上的对偶自同态 (dual endomorphism, 可参阅 http://math.chapman.edu/cgi-bin/structures).

定义 1.3.4 设 $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ 是一个有界分配格, 若有一元运算$'$:$L \to L$ 且满足

$$\forall x, y \in L, (x \wedge y)' = x' \vee y', (x \vee y)' = x' \wedge y', x'' = x,$$

则称 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个 De Morgan 代数. 满足以下条件的 De Morgan 代数称为 Kleene 代数:

(K) $\forall x, y \in L$, $x \wedge x' \leqslant y \vee y'$.

在 De Morgan 代数 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 中成立: $0'$=1, $1'$=0; $x \leqslant y \Rightarrow y' \leqslant x'$, $\forall x$, $y \in L$. 实际上, 具有逆合对应的有界分配格与 De Morgan 代数是两个等价概念. 显然, De Morgan 代数一定是 Ockham 代数.

注意, "Kleene 代数" 还有另一个完全不同的定义, 即可计算理论中正则表达式的代数抽象, 它在计算机科学中有广泛应用, 可参阅 http://planetmath.org/ encyclopedia/KleeneAlgebra.html.

1.3.2 伪补与 Heyting 格 (代数)

下面介绍与 “伪补”(pseudocomplement) 有关的伪补格、Brouwer 格、Heyting 格 (代数)、Stone 代数等概念. 需要首先说明的是这些概念在不同文献中有较大差异. 例如, 大多数文献不区分 Brouwer 格与 Heyting 格 (它们源自直觉逻辑 intuitionistic logic), 认为它们是同一概念, 而另一些文献认为 Heyting 格是有最小元 0 的 Brouwer 格 (本书采用这一定义); 对于相对伪补, 文献中也有相互对偶的不同定义, 记号也不同, 如 “:” 或 “→”, 本书采用后者 (可参阅 http://planetmath.org 上的相关内容).

定义 1.3.5　设 L 是格, $x, y \in L$, 则称 x 相对于 y 是有伪补的, 如果集合$\{a \in L|a \wedge x \leqslant y\}$有最大元, 并称这个最大元为 x 相对于 y 的伪补 (pseudocomplement of x relative to y), 记为 $x \to y$.

显然, 若 $x \to y$ 存在, 则有 $a \wedge x \leqslant y \Leftrightarrow a \leqslant x \to y$.

称格 L 的元素 x 是相对有伪补的 (relatively pseudocompletmented), 如果对任意 $y \in L$ 均存在 $x \to y$. 特别地, $x \to x$ 存在, 故$\{a \in L|a \wedge x \leqslant x\}$=$L$ 有最大元, 即 $1 \in L$.

L 称为是相对伪补格或 Brouwer 格 (取名自荷兰数学家 Brouwer), 如果 L 是格且每一个元素都是相对有伪补的. 显然, 每一个 Brouwer 格都含有 1(最大元). Brouwer 格有时也被称为蕴涵格 (implicative lattice, 参见文献 [122]).

含有最小元 0 的 Brouwer 格称为 Heyting 格, 当将其看作代数结构时称之为 Heyting 代数 (即 Heyting 格连同其相对伪补运算一起构成的代数结构).

定理 1.3.3　设 L 是 Brouwer 格, 则 $\forall x, y, z \in L$ 有

(1) $y \leqslant x \to y$;

(2) $1 \to x = x$;

(3) $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y$=1;

(4) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$;

(5) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$, $x \leqslant y \Rightarrow y \to z \leqslant x \to z$;

(6) $x \to (y \to z) = x \wedge y \to z = (x \to y) \to (x \to z)$;

(7) L 是分配格.

定理 1.3.4　一个完备格是一个 Heyting 格当且仅当它满足无限交分配律 ($\wedge$ 无限分配律): $x \wedge (\vee_{i\in I} y_i) = \vee_{i \in I}(x \wedge y_i)$.

推论 1.3.2　每个有限分配格是 Heyting 格.

可以验证, 在一个 Heyting 格中, 每个平移映射 $\lambda_x : y \mapsto x \wedge y$ 是剩余映射, $\lambda_x^+ : y \mapsto x \to y$.

定理 1.3.5 有界格 L 是一个 Heyting 代数, 当且仅当存在 L 上的二元运算 $\rightarrow$ 使得以下性质成立 ($\forall x, y, z \in L$):

(1) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$;

(2) $x \wedge (y \rightarrow z) = x \wedge (x \wedge y \rightarrow x \wedge z)$;

(3) $z \wedge (x \wedge y \rightarrow x) = z$.

定理 1.3.6 若 L 是一个 Heyting 代数, 则 L 的每个区间也是 Heyting 代数.

注 1.3.2 设 L 是偏序集, 区间 $[a, b]$ 表示集合$\{x \in L | a \leqslant x$ 且 $x \leqslant b\}$.

定义 1.3.6 设 L 是有 0 格, 则 x 相对于 0 的伪补简称为 x 的伪补, 记为 x^*. 如果 L 的每一个元素都有伪补, 即 $\forall x \in L$, $\{y \in L | x \wedge y=0\}$都有最大元, 则称 L 是伪补格 (pseudocomplemented lattice). 一个伪补格连同其上的伪补一元运算* 一起构成的代数系统称为 p–代数.

容易验证, 每一个伪补格必是有界的, 0^* 是最大元. 每个满足 $\wedge$ 无限分配律的完备格是伪补格, 且 $\forall x \in L$, $x^*=\sup\{y \in L | x \wedge y=0\}$.

定理 1.3.7 设 L 是 p– 代数, 则 $\forall x, y \in L$ 有

(1) $x \leqslant y \Rightarrow y^* \leqslant x^*$;

(2) $x^* = x^{***}$;

(3) $x \leqslant x^{**}$;

(4) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$;

(5) $(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$;

(6) $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$.

推论 1.3.3 有界格 L 是一个 p–代数, 当且仅当存在 L 上的一元运算* 使得以下等式成立:

(1) $x \wedge (x \wedge y)^* = x \wedge y^*$;

(2) $x \wedge 0^* = x$;

(3) $0^{**} = 0$.

若 L 是一个 p–代数, 则由定理 1.3.7 知, 集合$\{x^{**} | x \in L\}$与$\{x^* | x \in L\}$相等, 记为 $S(L)$.

定理 1.3.8 设 L 是 p– 代数, 则 $(S(L); \wedge, \cup, {}^*, 0, 1)$ 是 Boole 代数, 这里 $\forall x, y \in L$, $x \cup y = (x \vee y)^{**}$.

在一个 p–代数 L 中, $S(L)$ 一般不是 L 的一个子格. 当 $S(L)$ 是一个子格时, 有以下结论.

定理 1.3.9 设 L 是一个伪补分配格, 则以下条件等价:

(1) $S(L)$ 是 L 的一个子格;

(2) $\forall x, y \in L$, $(x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**}$;

(3) $\forall x, y \in L$, $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*$;

(4) $\forall x \in L$, $x^* \vee x^{**}=1$.

定义 1.3.7　满足定理 1.3.9 的任一等价性质的伪补分配格称为 Stone 格. Stone 格与一元运算 * 一起构成的代数系统称为 Stone 代数.

定理 1.3.10　若 L 是一个有界格, 则以下条件等价:

(1) L 的每个区间是 Stone 格;

(2) L 是一个 Heyting 代数, 且 $\forall x, y \in L$, $(x \to y) \vee (y \to x)=1$.

1.4　序代数与泛代数基本知识

按 Bourbaki 学派的观点, 数学中有三大基本结构, 即代数结构、序结构和拓扑结构. 序代数 (ordered algebra) 是指序结构、代数结构相结合的数学结构, 通常要求序、代数结构是相容的 (或称和谐的), 格序群、序半群等是其典型代表. 泛代数 (universal algebra) 是在对各种代数结构进行比较研究的过程中发展起来的数学分支, 它研究各种代数结构在运算系统上所具有的共同性质. 本节简要介绍这两个方面的基本知识, 内容取材自文献 [119], [123]~[125] 等.

1.4.1　序半群与格序半群

定义 1.4.1　设 S 是一个带有二元运算 $*$ 的集合, S 上的一个相容序 (compatible order) 是指满足以下条件的偏序 $\leqslant$:

$$\forall x, y, z \in S, x \leqslant y \Rightarrow z * x \leqslant z * y \text{ 且 } x * z \leqslant y * z,$$

即所有平移映射 $y \mapsto x * y$ 及 $y \mapsto y * x$ 是保序的. 如果 $(S; *)$ 是半群, 则称 $(S; *, \leqslant)$ 是序半群 (ordered semigroup); 如果 $(S; *)$ 是群, 则称 $(S; *, \leqslant)$ 是序群 (ordered group).

序半群 $(S; *, \leqslant)$ 称为是格序半群, 如果 $(S; \leqslant)$ 构成格; 序群 $(S; *, \leqslant)$ 称为是格序群, 如果 $(S; \leqslant)$ 构成格.

定义 1.4.2　设 $(G; *, \leqslant)$ 是序群, 1 是 G 的单位元, $x \in G$. 如果 $x \geqslant 1$, 则称 x 是 G 的正元 (positive element); 如果 $x \leqslant 1$, 则称 x 是 G 的负元 (negative element). G 的正元之集称为 G 的正锥 (positive cone), 记为 P_G. G 的负元之集称为 G 的负锥 (negative cone), 记为 N_G.

设 $(G; *, \leqslant)$ 是序群, $x, y \in G$. 容易验证, 以下各条件等价:

$$x \leqslant y;\quad x * y^{-1} \in N_G;\quad y * x^{-1} \in N_G;\quad x^{-1} * y \in P_G;\quad y^{-1} * x \in P_G;\quad y^{-1} \leqslant x^{-1}.$$

因此, 序群 $(G; *, \leqslant)$ 上的序 $\leqslant$ 由正锥和负锥完全确定.

定理 1.4.1 序群 $(G; *, \leqslant)$ 是格序的, 当且仅当 $(\forall x \in G)$ $\sup\{x, 1\}$存在.

定义 1.4.3 设 $(M; *, \leqslant)$ 是格序半群, 如果 $(M; *, 1)$ 是独异点 (幺半群, monoid), 1 为单位元, 则称 $(M; *, \leqslant, 1)$ 为格序独异点 (l-monoid). 如果 1 是格序独异点 $(M; *, \leqslant, 1)$ 的最大元, 则称它是整的 (integral).

定义 1.4.4 序半群 $(S; *, \leqslant)$ 称为剩余半群 (residuated semigroup), 如果所有平移映射 λ_x: $y \mapsto x * y$ 及 ρ_x: $y \mapsto y * x$ 是剩余的.

对于剩余半群 $(S; *, \leqslant)$, 平移映射的剩余具有下述性质:

$$\lambda_y^+(x) = \max\{z \in S | y * z \leqslant x\}, \quad \rho_y^+(x) = \max\{z \in S | z * y \leqslant x\}.$$

分别称 $\lambda_y^+(x)$, $\rho_y^+(x)$ 为 x 关于 y 的右剩余和左剩余, 并分别记为 x/y 和 $x\backslash y$.

序半群 $(S; *, \leqslant)$ 是剩余半群, 当且仅当 $(\forall x, y \in S)$ 集合

$$\{z \in S | y * z \leqslant x\}, \quad \{z \in S | z * y \leqslant x\}$$

均有最大元.

定理 1.4.2 设 $(S; *, \leqslant)$ 是剩余半群, 则以下条件等价:

(1) $(S; *)$ 是可换半群;

(2) $\forall x, y \in S$, $x/y = x\backslash y$.

定理 1.4.3 设 $(S; *, \leqslant)$ 是剩余半群, 则 $\forall x, y, z \in S$ 有

(1) $x * (y/x) \leqslant y$;

(2) $(y\backslash x) * x \leqslant y$;

(3) $y \leqslant (x * y)/x$;

(4) $y \leqslant (y * x)\backslash x$;

(5) $x \leqslant y\backslash(y/x)$;

(6) $x \leqslant y/(y\backslash x)$;

(7) $(x/y)/z = x/(y * z)$;

(8) $(x\backslash y)\backslash z = x\backslash(z * y)$;

(9) $(x/y)\backslash z = (x\backslash z)/y$;

(10) $(x/y) * z \leqslant (x * z)/y$;

(11) $z * (x\backslash y) \leqslant (z * x)\backslash y$.

与剩余半群相近的另一个概念是蕴涵半群 (implicative semigroup), 它是由 Chan 和 Shum[126] 于 1993 年提出的.

定义 1.4.5 序半群 $(S; *, \leqslant)$ 称为蕴涵半群, 如果 S 上还有一个二元运算 $\rightarrow$ 满足以下条件:

$$\forall x, y \in S, z \leqslant x \rightarrow y \Leftrightarrow z * x \leqslant y.$$

容易验证, 可换蕴涵半群一定是剩余半群, 且 $x/y = x\backslash y = y \to x$.

定理 1.4.4 设 $(S; *, \leqslant)$ 是有 1 的蕴涵半群, 且 1 既是单位元又是最大元, 则 $\forall x, y, z \in S$ 有

(1) $x \to x=1$, $1\to x = x$;

(2) $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y=1$;

(3) $x \to (y \to z)=(x * y) \to z$;

(4) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$ 且 $y \to z \leqslant x \to z$;

(5) 若 $(S; *)$ 是可换半群, 则 $x \to y \leqslant x * z \to y * z$.

1.4.2 泛代数入门

定义 1.4.6 对于非空集 A 及非负整数 n, 记 $A^0=\{\varnothing\}$, 当 $n > 0$ 时记 A^n 是 A 的所有 n 元组构成的集合. A 上的一个 n 元运算是指 n 元函数 (映射)f: $A^n \to A$, n 元组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 在 f 下的象记为 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. n 称为 n 元运算 f 的元数 (arity, 或称为秩 rank). 当 n=0 时, f 称为零元运算 (nullary operation), 它实质上由 A 上的唯一元素 $f(\varnothing)$ 确定, 故它代表 A 的一个常元 (constant).

定义 1.4.7 代数的型 (type) 是指运算 (函数) 符号的一个集合 $\mathcal{F}$, 其每一个成员 f 被指派一个非负整数 n, 被称为 f 的元数. $\mathcal{F}$ 中所有 n 元运算 (函数) 符号组成的子集记为 $\mathcal{F}_n$.

定义 1.4.8 设 $\mathcal{F}$ 是一个代数型, 一个 $\mathcal{F}$ 型泛代数 (简称代数)$\mathbf{A}$ 是指这样一个序对 (A, F), 其中 A 是一个非空集, 而 F 是 A 上的一簇运算, 且对于 $\mathcal{F}$ 中的每一个 n 元函数符号 f 都有 A 上相对应的 n 元运算 $f^{\mathbf{A}}$. 称 A 是 $\mathbf{A}$ 的基域 (universe) 或底集 (underlying set), 这些 $f^{\mathbf{A}}$ 称为是 $\mathbf{A}$ 的基本运算 (fundamental operations).

在不引起混淆的情况下, 用 f 表示 $f^{\mathbf{A}}$. 当 F 有限时, 即 $F=\{f_1, f_2, \cdots, f_k\}$, (A, F) 常记为 $(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$, 基本运算通常按元数从大到小排列, 即

$$\text{arity } f_1 \geqslant \text{arity} f_2 \geqslant \cdots \geqslant \text{arity} f_k.$$

例如, Boole 代数是 $(\wedge, \vee, ', 0, 1)$ 型代数, 也称为 (2, 2, 1, 0, 0) 型代数.

定义 1.4.9 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是两个同型代数, 称 $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的子代数 (subalgebra), 如果 $B \subseteq A$ 且 $\mathbf{B}$ 的每一个基本运算都是 $\mathbf{A}$ 的相应运算在 B 上的限制 (即对每一个运算符号 f, $f^{\mathbf{B}}$ 是 $f^{\mathbf{A}}$ 在 B 上的限制). 此时, 简记为 $\mathbf{B}\leqslant\mathbf{A}$.

经常使用另一个术语 "约简"(reduct), 一个代数 (A, F) 称为是代数 (A, F^*) 到 $\mathcal{F}$ 的约简, 如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$ 且 F 是 F^* 到 $\mathcal{F}$ 的限制 (即仅保留与 $\mathcal{F}$ 中符号相对应的运算). 一个代数的约简的子代数称为子约简 (subreduct).

定义 1.4.10 设 **A** 是一个 $\mathcal{F}$ 型代数, $\theta\in\mathrm{Eq}(A)$, 这里 $\mathrm{Eq}(A)$ 表示 A 上所有等价关系构成的集合. θ 称为 **A** 上的一个同余 (congruence), 如果它满足下述相容性:

$$\forall f \in \mathcal{F}, a_i, b_i \in A, a_i\theta b_i (1 \leqslant i \leqslant n) \Rightarrow f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \cdots, a_n)\theta f^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

定义 1.4.11 一个代数 **A** 上的所有同余构成的集合记为 Con **A**. 设 $\theta\in$Con **A**, **A** 关于 θ 的商代数 (quotient algebra), 记为 $\mathbf{A}/\theta$, 是指基域为 A/θ(即等价类之集) 且基本运算满足以下性质的代数: $f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, a_2/\theta, \cdots, a_n/\theta)=f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \cdots, a_n)/\theta$. 这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$, $f \in \mathcal{F}$.

显然, **A** 关于 θ 的商代数与 **A** 同型.

定理 1.4.5 (Con **A**; $\subseteq$) 是 ($\mathrm{Eq}(A)$; $\subseteq$) 的一完备子格, 这里 ($\mathrm{Eq}(A)$; $\subseteq$) 是 A 上所有等价关系构成的格.

定义 1.4.12 设 **A**, **B** 是两个 $\mathcal{F}$ 型代数, 映射 α: $A \to B$ 称为是 **A** 到 **B** 的一个同态 (homomorphism), 如果对任意 n 元运算符号 $f \in \mathcal{F}$ 及任意 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$ 有

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots, \alpha a_n).$$

此时也称 α:**A** $\to$**B** 是一个同态. 如果 α 是单射, 则称 α 是一个嵌入 (embedding) 或称单同态 (monomorphism), 也称 **A** 可嵌入 **B**. 如果 α 是满射, 则称 **B** 是 **A** 的同态象 (homomorphic image). 如果 α 是双射, 则称 **A** 同构于 **B**, 记为 $\mathbf{A}\cong\mathbf{B}$, 也称 α:**A**$\to$**B** 是一个同构.

定理 1.4.6 如是 α:**A**$\to$**B** 是一个嵌入, 则以 $\alpha(A)$ 为基域且与 **B** 同型的代数 $\alpha(\mathbf{A})$ 是 **B** 的子代数.

定理 1.4.7 如果 α:**A** $\to$ **B** 是一个同态, 则 $\ker(\alpha)$ 是 **A** 上的一个同余, 这里 $\ker(\alpha)=\{(a, b) \in A \times A|\ \alpha(a)=\alpha(b)\}$, 称为 α 的核 (kernel).

定义 1.4.13 设 **A** 是一个代数, $\theta\in$Con **A**. 映射 ν_θ: $A \to A/\theta$; $\nu_\theta(a) = a/\theta$ ($\forall a \in A$) 称为自然映射 (natural map).

定理 1.4.8 从一个代数到其商代数上的自然映射是一个满同态.

定理 1.4.9(同态定理) 设 α:**A**$\to$**B** 是一个满同态, 则存在 $\mathbf{A}/\ker(\alpha)$ 到 **B** 的同构 β 使得 $\alpha=\beta\circ\nu$, 这里 ν 是 **A** 到 $\mathbf{A}/\ker(\alpha)$ 的自然映射.

以上结论可形象地用图 1.5 表示.

定义 1.4.14 设 $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ 是两个 $\mathcal{F}$ 型代数, 定义直积 $\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2$ 是这样的代数, 它的基域是 $A_1 \times A_2$ 且 ($\forall f \in \mathcal{F}_n$, $a_i \in A_1$, $b_i \in A_2$, $1\leqslant i \leqslant n$) 有

$$f^{\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2}((a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n)) = (f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \cdots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(b_1, \cdots, b_n))$$

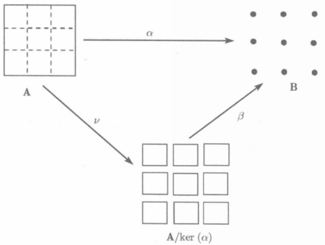


图 1.5　同态定理示意图

一般地, 设 $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ 是一簇 $\mathcal{F}$ 型代数, 定义直积 (direct product) 是这样的代数 $\mathbf{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathbf{A}_i$, 它的基域为 $\prod\limits_{i\in I}\mathbf{A}_i$ 且 $\left(\forall f\in\mathcal{F}_n,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\prod\limits_{i\in I}\mathbf{A}i\right)$ 有

$$f^{\mathbf{A}}(a_1,\ \cdots,\ a_n)(i)=f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i),\ \cdots,a_n(i)),\quad \forall i\in I.$$

空积 $\prod\varnothing$ 是一个平凡代数, 它的基域为$\{\varnothing\}$. 投影映射 (projection map) 定义为

$$(\forall j\in I)\pi_j:\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i\rightarrow\mathbf{A}_j;\pi_j(a)=a(j),\quad \forall a\in\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i.$$

容易验证, $(\forall j\in I)\pi_j$: $\prod\limits_{i\in I}\mathbf{A}_i\rightarrow\mathbf{A}_j$ 是满同态 (surjective homomorphism).

定义 1.4.15　设 Σ 是一个 $\mathcal{F}$ 型等式之集 (等式中只出现 $\mathcal{F}$ 中的运算), 用 $M(\Sigma)$ 表示满足 Σ 的代数 **A** 构成的类. 一个代数类 K 称为是一个等式类 (equational class), 如果有一个等式集 Σ 使得 $K=M(\Sigma)$. 此时称 K 被 Σ 定义或 K 被 Σ 公理化.

定义 1.4.16　一个非空的 $\mathcal{F}$ 型代数构成的类 K 称为是一个簇 (variety), 如果它关于子代数、同态象和直积封闭.

定理 1.4.10(Birkhoff 定理)　K 是一个等式类 (equational class) 当且仅当 K 是一个簇 (variety).

定义 1.4.17 设 X 是非空集, $\mathbf{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 型代数, $\alpha{:}X \to \mathbf{F}$ 是一个映射. 如果对任意 $\mathcal{F}$ 型代数 $\mathbf{A}$ 及任意映射 $\beta: X \to \mathbf{A}$, 存在唯一的同态 $h: \mathbf{F} \to \mathbf{A}$ 使得 $h \circ \alpha = \beta$, 即图 1.6 可换, 则称 $\mathbf{F}$ 是由 X 生成的自由 $\mathcal{F}$ 型代数.

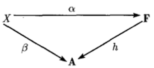


图 1.6 自由代数示意图

事实上, 自由代数可由 "字"、"项" 等泛代数基本概念来定义, 上述定义本质上是它的一个充要条件. 如同文献 [10] 中指出的那样, 自由代数可作通俗解释. 例如, 设 $X=\{a, b\}$, $\mathcal{F}=\{*\}$, 则由 X 生成的自由代数 $\mathbf{F}$ 由下述元素组成:

$$a,\quad b,\quad a*a,\quad a*b,\quad b*a,\quad b*b,$$
$$a*(a*a),\quad a*(a*b),\quad a*(b*a),\quad a*(b*b),\quad \cdots$$

一般地, ① X 中的元素属于 F; ② 如果 ω_1 与 ω_2 属于 F, 则 $\omega_1 * \omega_2$ 属于 F; ③ X 中不再含有其他元素了.

1.5 经典命题逻辑的代数分析

本节简要概述经典命题逻辑的形式系统 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 及其与布尔代数的关系, 以说明本书所使用的代数逻辑方法, 也为后续章节提供预备知识. 本节取材于文献 [11], 但有所修改, 并略去了所有结论的证明.

1.5.1 经典命题逻辑的语义理论

数理逻辑的方法是形式化 (符号化) 的方法, 在命题演算中用抽象符号来代替具体命题 (并干脆把命题叫公式), 先用一个可数集 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$表示原子命题, 并选用尽可能少但够用的一组逻辑联结词, 比如选定否定联结词 $\neg$ 和蕴涵联结词 $\to$, 然后就可通过 S 与$\{\neg, \to\}$构作各种复合命题并展开演算理论.

定义 1.5.1 设 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$, 若作 $F(S)$ 如下:

(1) $p_1, p_2, \cdots \in F(S)$;

(2) 若 $A, B \in F(S)$, 则 $\neg A, A \to B \in F(S)$;

(3) $F(S)$ 中的元都是通过 (1) 与 (2) 而得到,

则称 $F(S)$ 是 S 生成的 $(\neg, \to)$ 型的自由代数. S 中的元叫做原子命题或原子公式, $F(S)$ 中的元叫做命题、合式公式 (well formed formula, wf) 或公式.

形式化方法往往追求最简性, 上面用原子公式来制作复杂公式时只使用了两个逻辑联结词 $\neg$, $\to$, 还有两个常用的逻辑连结词 $\vee$(析取) 与 $\wedge$(合取). 在经典命题逻辑中规定: $A \vee B$ 是 $\neg A \to B$ 的简写, $A \wedge B$ 是 $\neg(A \to \neg B)$ 的简写.

判断一个形式上的命题 (公式) 是否正确有一个自然而直观的方法, 那就是通过给公式赋以真假值来实现, 这种用 "赋值" 来研究逻辑的方法叫做语义理论 (semantics).

定义 1.5.2　函数 $v: F(S) \to \{0,1\}$叫 $F(S)$ 的赋值, 如果 v 满足条件

(1) 对任意公式 $A \in F(S)$, $v(\neg A)=1-v(A)$;

(2) 对任意公式 $A, B \in F(S)$, $v(A \to B)=0$ 当且仅当 $v(A)=1$ 且 $v(B)=0$.

以下用 Ω 表示 $F(S)$ 的全体赋值之集.

注 1.5.1　(1) 虽然赋值 v: $F(S) \to \{0,1\}$是一个整体概念, 但为方便计, 当 v 给定后也把 $v(A)$ 叫做 A 的赋值.

(2) 如果在$\{0,1\}$中引入运算 $\neg$ 与 $\to$, 并规定

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \quad 0 \to 0 = 0 \to 1 = 1 \to 1 = 1, \quad 1 \to 0 = 0,$$

则$\{0,1\}$成为 $(\neg, \to)$ 型代数, 而赋值 v 正是 $F(S)$ 到$\{0,1\}$的 $(\neg, \to)$ 型同态, 即 v: $F(S) \to \{0,1\}$是 $F(S)$ 的赋值当且仅当满足

$$v(\neg A) = \neg v(A), \quad v(A \to B) = v(A) \to v(B).$$

(3) 由于 $F(S)$ 是 S 生成的自由代数, 所以一个赋值 v 完全由它在原子公式集 S 上的值所决定.

(4) 如果把赋值 v 的值域 $\{0, 1\}$扩大为$\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ 或 $[0, 1]$ 等, 并给它们也定义相应的逻辑运算, 则可以展开相应的语义理论, 那就是多值逻辑或连续值逻辑.

定义 1.5.3　设 $A \in F(S)$. 若对每个赋值 $v \in \Omega$ 都有 $v(A)=1$, 则称 A 为重言式 (tautology). 如果对每个赋值 $v \in \Omega$ 都有 $v(A)=0$, 则称 A 为矛盾式 (contradiction).

A 为重言式常记为 $\models A$.

注意, 大多数公式既非重言式, 也非矛盾式. 通俗地说, 如果称重言式为恒真公式或好公式, 称矛盾式为恒假公式或坏公式, 则大多数公式既不好也不坏.

定义 1.5.4　设 $A, B \in F(S)$. 若 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是重言式, 则称 A 与 B 逻辑等价, 记为 $A \approx B$.

考虑全体公式集 $F(S)$ 上的逻辑等价 $\approx$. 设 $A, B, C \in F(S)$, 则显然有 $A \approx A$, 且若 $A \approx B$, 则 $B \approx A$. 还有, 若 $A \approx B, .B \approx C$, 则 $A \approx C$. 这说明 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的等价关系.

需要特别指出的是上面关于赋值的基本概念和结果是建立在$\{0, 1\}$上的, 完全可以将其拓广到更一般的代数结构之上, 即布尔代数 ($\{0, 1\}$是最简单的非平凡布尔代数).

定义 1.5.5 设 L 是 Boole 代数, 函数 $v: F(S) \to L$ 叫 $F(S)$ 的 L 赋值, 如果 v 是 $F(S)$ 到 L 的 $(\neg, \to)$ 型同态, 即满足 $v(\neg A) = \neg v(A), v(A \to B) = v(A) \to v(B)$.

以下用 $\Omega(L)$ 表示 $F(S)$ 的全体 L-赋值之集.

类似地, 可以定义 L-重言式及逻辑等价关系 $\approx_L$, 即 A 称为是 L-重言式, 如果对每个赋值 $v \in \Omega(L)$ 都有 $v(A)$=1; $A \approx_L B$ 当且仅当 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是 L-重言式.

考虑逻辑等价关系 $\approx$, 对任意 $A \in F(S)$, 把 A 所在的等价类记作 $[A]$, 令 $F(S)/\approx=\{[A] \mid A \in F(S)\}$. 在 $F(S)/\approx$ 中规定 $[A]\leqslant[B]$ 当且仅当 $A \to B$ 是重言式, 则可以证明这个定义与等价类 $[A]$ 与 $[B]$ 中的代表元的选取无关, 从而是合理的. 还可以证明以下各事实: 设 A 是重言式, 则 $[A]$ 是 $F(S)/\approx$ 的最大元 1; 设 A 是矛盾式, 则 $[A]$ 是 $F(S)/\approx$ 的最小元 0; $[A]\vee[B]=[A \vee B]$, $[A]\wedge[B]=[A \wedge B]$, 且 $\vee$ 与 $\wedge$ 之间的分配律成立. 又 $\neg[A]=[\neg A]$, $[A]\vee(\neg[A])=1$, $[A]\wedge(\neg[A])=0$. 所以 $F(S)/\approx$ 是一个 Boole 代数. 这些结果对于 L-重言式及逻辑等价关系 $\approx_L$ 来说也是成立的, 即

定理 1.5.1 设 L 是 Boole 代数, $F(S)$ 是全体公式集, 则商集 $F(S)/\approx_L$ 构成一个 Boole 代数. 特别地, 对于 Boole 代数{0,1}及逻辑等价关系 $\approx$, 商集 $F(S)/\approx$ 构成一个 Boole 代数.

1.5.2 经典命题逻辑的语构理论

1.5.1 节所述内容虽然属于形式化命题演算的内容, 但它借助了符号系统 $F(S)$ 以外的工具, 即{0, 1}或 Boole 代数, 其特点在于通过赋值来刻画各种不同命题 (公式) 之间的关系. 命题演算还有另一条更加形式化的途径, 在这里公式的好坏并不借助于外来的{0, 1}或 Boole 代数去判断, 而是先选出几个看来是应当肯定的 "好公式" 作为公理, 再定几条推理规则, 所有其他 "好公式"(称为 "定理") 均从公理出发运用推理规则推出, 这种不借助 $F(S)$ 以外的对象、完全在 $F(S)$ 自身中展开命题演算的理论, 就称为命题逻辑的语构理论.

定义 1.5.6 一个形式系统由以下 4 部分组成:

(1) 字符表. 一般含可数多个符号.

(2) 公式集. 由某些有限的字符串组成的集, 其成员叫公式.

(3) 公理集. 由某些公式组成的集.

(4) 推理规则集. 对每条推理规则而言, 可以从有限多个公式推出一个公式.

定义 1.5.7(经典命题逻辑的形式系统 $\mathcal{L}$) 如下的形式系统称为系统 $\mathcal{L}$:

(1) $\mathcal{L}$ 的字符表为 $\neg, \to, (,), p_1, p_2, p_3, \cdots$.

(2) $\mathcal{L}$ 的公式集 $F(S)$ 由以下方法生成: 第一, $p_1, p_2, p_3, \cdots$ 都是公式; 第二, 若 A, B 是公式, 则 $\neg A$, $A \to B$ 也是公式; 第三, 再没有别的公式了. 这就是说 $F(S)$ 是由 $S=\{p_1, p_2, p_3, \cdots\}$生成的自由代数.

(3) $\mathcal{L}$ 的公理集包含以下 3 种形式的公式:

(L1) $A \to (B \to A)$;

(L2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(L3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

(4) $\mathcal{L}$ 中只有一条推理规则, 即 MP 规则: 从 A 与 $A \to B$ 可推得 B.

注 1.5.2　(1) MP 是希腊文 Modus Ponens 的缩写.

(2) 在系统 $\mathcal{L}$ 中, 若 $A, B \in F(S)$, 则 $A \vee B$ 与 $A \wedge B$ 分别是 $\neg A \to B$ 与 $\neg(A \to \neg B)$ 的简写, $A \leftrightarrow B$ 是 $(A \to B) \wedge (A \to B)$ 的简写.

定义 1.5.8　$\mathcal{L}$ 中的证明是一个有限的公式序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 这里 $\forall i \leqslant n$, A_i 或者是公理, 或者是它前面的两项运用 MP 规则推得的结果 (即存在 $j, k < i$ 使 A_i 可由 A_j 与 A_k 运用 MP 规则推得). 这个证明叫做公式 A_n 的证明, A_n 叫做 $\mathcal{L}$ 中的定理, 记作 $\vdash A_n$.

注 1.5.3　(1) 若 A_i 是 A_j 与 A_k 运用 MP 规则推得的结果, 则 $A_j = A_k \to A_i$ 或 $A_k = A_j \to A_i$.

(2) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是公式 A_n 的证明, $m \leqslant n$, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是公式 A_m 的证明.

定义 1.5.9　设 $\Gamma \subseteq F(S)$. 从 Γ 出发的推演是一个有限的公式序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 这里 $\forall i \leqslant n$, A_i 或者是公理, 或者 $A_i \in \Gamma$, 或者存在 $j, k < i$ 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 规则推得的结果. A_n 叫做 Γ 结论, 或 Γ 推出 A, 记作 $\Gamma \vdash A_n$.

注 1.5.4　(1) 当 $\Gamma = \varnothing$ 时, Γ 结论就是定理, $\varnothing \vdash A$ 就是 $\vdash A$.

(2) $\Gamma \vdash A$ 与 $\vdash A$ 等都不是形式系统 $\mathcal{L}$ 中的符号, 仅是为了叙述方便而引入的代用语.

在语义理论中, 命题公式之间有逻辑等价关系, 在语构理论中也有对应的类似概念.

定义 1.5.10　设 $A, B \in F(S)$, 如果 $A \to B$ 与 $B \to A$ 都是定理, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \sim B$.

定理 1.5.2　可证等价 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的等价关系, 且保持 $\neg, \to$ 运算, 即满足

$$\forall A, B, C, D \in F(S), \quad A \sim B \Rightarrow \neg A \sim \neg B,$$
$$(A \sim B, C \sim D) \Rightarrow (A \to C) \sim (B \to D).$$

注 1.5.5　保持运算 $\neg, \to$ 的等价关系称为 $(\neg, \to)$ 型同余关系.

由于 $\sim$ 是 $F(S)$ 上的同余关系, 所以 $F(S)$ 关于 $\sim$ 作商后可得一个与 $F(S)$ 同类型的代数结构, 记为 $[\mathrm{F}] = F(S)/\sim$. 容易证明

定理 1.5.3　设 $[\mathrm{F}]$ 是 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\sim$ 的商代数, 则可在 $[\mathrm{F}]$ 中引入偏序 $\leqslant$ 和补运算 $'$, 使 $([\mathrm{F}]; \leqslant, ')$ 成为 Boole 代数.

注 1.5.6 (1) 上述代数结构 ([F]; $\leqslant$, $'$) 中, $\leqslant$, $'$ 的定义为 $\forall A, B \in F(S)$, $[A]\leqslant[B]$ 当且仅当 $\vdash A \to B$; $[A]'=[\neg A]$.

(2) 上述商代数 [F] 通常称为 Lindenbaum 代数.

一个重要的问题是形式系统 $\mathcal{L}$ 中从公理出发运用 MP 规则推出来的定理, 是否是对语义来说也是 "好公式" 呢? 即 "定理" 是否都是 "重言式"? 下面的定理给出肯定的回答.

定理 1.5.4(可靠性定理) $\mathcal{L}$ 中的定理一定是重言式.

注 1.5.7 上述定理对 L-重言式也成立, 即对于任意非平凡 Boole 代数 L 而言, 形式系统 $\mathcal{L}$ 中的定理一定是 L-重言式.

反过来, 重言式是否都可以从公理出发运用 MP 规则推出来呢? 答案是肯定的, 有

定理 1.5.5(形式系统 $\mathcal{L}$ 的完备性定理) 设 L 是非平凡 Boole 代数, 对任意 $A \in F(S)$ 以下条件彼此等价:

(1) A 是重言式, 即 $\models A$;

(2) A 是 L-重言式, 即 $\models_L A$;

(3) A 是系统 $\mathcal{L}$ 中的定理, 即 $\vdash A$.

推论 1.5.1 $F(S)$ 上的可证等价关系与逻辑等价关系一致, 即

$$\forall A, B \in F(S), A \sim B \text{ 当且仅当 } A \approx B.$$

事实上, 要证明上述完备性定理, 需要应用关于 Boole 代数的下述重要结论:

定理 1.5.6(Boole 代数的完备性定理) 一个 Boole 等式在每个 Boole 代数中都成立的充要条件是它在 Boole 代数$\{0, 1\}$中成立. 这里, Boole 等式是一个公式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=1$, 其中, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是由变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 通过二元运算 $\vee$ 与 $\wedge$ 及一元运算 $'$ 作用后得到的函数.

综上所述, 经典命题逻辑可以由形式系统 $\mathcal{L}$ 完整刻画, 且其语义理论和语构理论是和谐统一的. 从上述讨论中可以看出, Boole 代数在经典命题逻辑的形式化研究中扮演着重要角色.

事实上, 上述研究方法已在多值逻辑、模糊逻辑中广泛应用, 如引言中提到的 Chang[24] 于 1958 年建立的 MV- 代数理论, 在研究 Łukasiewicz 逻辑系统 (简记 **Łuk**) 完备性时起到关键作用; Hájek[22] 于 1998 年前后提出基本逻辑形式系统 **BL**, 并通过建立相应的 BL- 代数及其滤子理论, 证明了系统 **BL** 的完备性; 王国俊教授 [10,11] 建立了基于 R_0 t- 模的模糊逻辑形式系统 $\mathscr{L}^*$, 引入相对应的代数系统 R_0- 代数, 并与裴道武合作于 2002 年证明了 $\mathscr{L}^*$ 的完备性定理; 2001 年, Esteva 和 Godo 建立了基于左连续 t- 模的模糊逻辑系统 **MTL**, 相应建立了较 BL- 代数更广泛的 MTL- 代数理论 [40]. 这些逻辑系统及相对应的代数结构之间的关系, 见图 1.7.

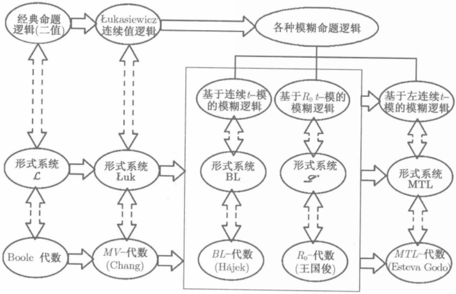


图 1.7　各种逻辑系统及其对应的代数结构

注 1.5.8　(1) 本书的研究工作正是沿着上述思路开展的, 因此图 1.7 及本节可认为是本书的 “模板”.

(2) 图 1.7 中的实线单向箭头表示 “拓广” 之意. 注意, 对于形式系统而言, “拓广” 是指其应用范围更广泛 (相对应的公理模式较少), 并非 “语义扩张”(实际上, “拓广” 与 “语义扩张” 的方向正好相反).

(3) 对于形式系统之间的关系, 本书频繁使用 “语义扩张” 一词, 为避免歧义, 特在本章最后给出下述严格定义:

定义 1.5.11　一个形式系统 $\mathcal{E}$ 称为是形式系统 $\mathcal{F}$ 的一个语义扩张 (schematic extension), 如果 $\mathcal{E}$ 的字符表是通过对 $\mathcal{F}$ 的字符表进行扩充而得到的, $\mathcal{E}$ 的公理集合是通过对 $\mathcal{F}$ 的公理集合添加 (包括显形或隐形添加) 新的公理而得到的, 并且 $\mathcal{E}$ 保持 $\mathcal{F}$ 中的定理.

注 1.5.9　定义 1.5.11 实际上是对文献 [22] 中关于 **BL** 系统扩张的定义 2.3.20 进行修改而来, 为了更加严格和确切, 加了一些必要的限定词. 文献 [22] 的定义罗列在下面, 以便比较: A logical calculus $\mathcal{C}$ is a schematic extension of **BL** if it results from **BL** by adding some (finitely or infinitely many) axiom schemata to its axioms (The deduction rule remains modus ponens)

习　题　1

1. 给出定理 1.2.3 的证明, 并讨论能否将条件 (1) 中的 “主下集” 均改为 “主上集”.

2. 证明定义 1.2.12 中的 (1), (2) 在格中等价.
3. 举例说明, 分配格满足第一 (二) 无限分配律未必满足第二 (一) 无限分配律.
4. 试证明定理 1.2.14, 定理 1.2.15, 定理 1.3.4, 定理 1.3.10.
5. 研究 Heyting 代数、剩余半群与蕴涵半群之间的关系.
6. 自行研读有关 Ockham 代数的最新文献, 写一篇综述报告.
7. 查阅文献, 了解什么是双 Stone 代数, 并系统总结国内外研究成果.

第 2 章　t–模、伪 t–模与剩余格

2.1　t–模

t–模 (triangular norm, 又称为三角模或 t 范数) 首先出现在 Menger 于 1942 年发表的论文 *Statistical metrics* (统计度量) 中, 在这里, t–模是作为经典度量空间中三角不等式的自然推广而提出的. 20 世纪 60 年代, Schweizer 和 Sklar[127,128] 重新严格定义了 t–模 (即现在通用的定义) 和统计度量空间 (现称为概率度量空间), 从而导致了这个领域的飞速发展, 这方面的研究成果被包含在专著 [129] 中. 由于 t–模较好地反映了 "逻辑与" 的性质, 因此, t–模作为一般的 "模糊与" 算子受到模糊逻辑学界的普遍青睐. 关于 t–模及其在模糊逻辑中的应用, Klement 等在专著 [130] 及综述性论文 [131]~[133] 中进行了全面总结, 本节的主要内容就取材自这些文献. 事实上, 除了概率度量空间和模糊逻辑外, t–模还应用于决策支持、函数方程、测度理论、博弈理论等许多领域 (见文献 [131] 中的说明).

2.1.1　t–模的定义及其连续性

定义 2.1.1　t–模是单位区间 [0, 1] 上的二元函数 T, 它满足交换律、结合律、单调性且带有单位元 1, 即函数 T: $[0, 1]\times[0, 1]\rightarrow[0, 1]$ 满足以下条件 ($\forall x, y, z\in[0, 1]$):

(T1) $T(x, y) = T(y, x)$;

(T2) $T(x, T(y, z))=T(T(x, y), z)$;

(T3) 当 $y\leqslant z$ 时, 有 $T(x, y)\leqslant T(x, z)$;

(T4) $T(x, 1)=x$.

由于 t–模是单位区间 [0,1] 上的二元代数运算, 因而一些学者更喜欢用中缀表示法, 如用 $x\otimes y$ 来表示 $T(x, y)$. 这样, 上述定义中的 4 个条件可分别改写成下面的形式:

(T1) $x\otimes y = y\otimes x$;

(T2) $x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$;

(T3) 当 $y\leqslant z$ 时, 有 $x\otimes y\leqslant x\otimes z$;

(T4) $x\otimes 1=x$.

这说明 ([0, 1]; $\otimes$, 1) 构成一个可换独异点. 本书将同时使用 t–模的上述两种表示形式, 由于很容易从上下文中分辨出来是作为函数或是作为代数运算, 故不会引起

混乱.

由于 t–模满足交换性, 故由定义中的 (T3) 知道, t–模关于两个变元都是不减的. 又, 对任意 t–模 T 有 $T(0,x)=T(x,0)=0, T(1,x)=x$. 这说明, 所有 t–模在单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 的边界上是一致的.

定义 2.1.2 如果两个 t–模 T_1, T_2 满足: $T_1(x, y)\leqslant T_2(x, y)$, $\forall(x, y)\in[0, 1]^2$, 则称 T_1 弱于 T_2 或 T_2 强于 T_1(这样的顺序通常也称为逐点序, pointwise order), 记为 $T_1\leqslant T_2$.

下面给出 4 个基本 t–模, 并用数学软件 Maple 绘制了它们的图形 (图 2.1, 图中上面为 Maple 程序, 下面依次为 $T_M(x, y)$,$T_P(x, y)$, $T_{\text{Ł}}(x, y)$, $T_D(x, y)$ 的图像), 其顺序关系为: $T_M\leqslant T_P\leqslant T_{\text{Ł}}\leqslant T_D$. 这 4 个 t–模的具体定义如下:

最小值 t–模 T_M: $T_M(x, y)=\min\{x, y\}$, 此 t–模又称为 Gödel t–模.

乘积 t–模 T_P: $T_P(x, y)=x\cdot y$.

Łukasiewicz t–模 $T_{\text{Ł}}$: $T_{\text{Ł}}(x, y)=\max\{x+y-1, 0\}$.

突变积 (drastic product)t–模 $T_D: T_D(x, y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in[0,1)^2,\\ \min\{x,y\}, & \text{其他}.\end{cases}$

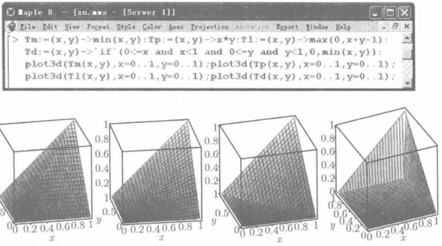


图 2.1 四个基本 t–模的三维图形 (用 Maple 绘制)

上述 4 个 t–模之所以称为是 "基本" 的, 因为它们都是各类 t–模的典型代表, 其中, T_D 和 T_M 分别是最小和最大 t–模 (这里的 "最小"、"最大" 是指定义 2.1.2 中逐点序意义下的最小、最大), T_P 和 $T_{\text{Ł}}$ 分别是严格 t–模和幂零 (nilpotent, 见定义 2.1.8) t–模的典型代表, 且 T_M 是仅有的对任意 $x\in[0, 1]$ 都幂等 (idempotent, 见定义 2.1.8) 的 t–模.

定义 2.1.3　满足下述性质的函数 F: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 称为一个 t–子模 (t-subnorm) $(\forall x, y, z \in[0, 1])$:

(T1) $F(x, y) = F(y, x)$;

(T2) $F(x, F(y, z))=F(F(x, y), z)$;

(T3) 当 $y \leqslant z$ 时, 有 $F(x, y) \leqslant F(x, z)$;

(T5) $F(x, y) \leqslant\min\{x, y\}$.

显然, 每个 t–模都是 t 子模, t 子模未必是 t–模. 另外, 每个 t–子模可以通过重新定义它在单位正方形右上边界上的值而成为一个 t–模, 即有

命题 2.1.1　设 F:$[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是一个 t–子模, 则如下定义的函数 T: $[0, 1] \times[0, 1] \to[0, 1]$ 是一个 t–模:

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y), & (x,y) \in [0,1), \\ \min\{x,y\}, & \text{其他}. \end{cases}$$

定义 2.1.4　三角余模 (简称 t–余模) 是单位区间 $[0, 1]$ 上的二元函数 S, 它满足交换律、结合律、单调性且带有单位元 0, 即函数 S: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 满足以下条件 $(\forall x, y, z \in[0, 1])$:

(S1) $S(x, y) = S(y, x)$;

(S2) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$;

(S3) 当 $y \leqslant z$ 时, 有 $S(x, y) \leqslant S(x, z)$;

(S4) $S(x, 0)=x$.

注 2.1.1　(1) 在模糊逻辑中, 三角余模 (t–余模) 通常被解释为 “析取”(逻辑或).

(2) 函数 S: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是 t 余模, 当且仅当有 t–模 T, 使得对任意 x, $y \in[0, 1]$, 以下两个等价的等式中的一个成立:

(C1) $S(x,y) = 1 - T((1 - x), (1 - y))$;

(C2) $T(x,y) = 1 - S((1 - x), (1 - y))$.

(3) 由条件 (C1) 确定的 t 余模 S 称为 t–模 T 的对偶 t 余模 (dual t-conorm), 同样, 由条件 (C2) 确定的 t–模称为 t 余模 S 的对偶 t–模 (dual t-norm).

(4) 与前述 4 个基本 t–模对偶的基本 t 余模分别是

最大值 t 余模 $S_M : S_M(x, y)=\max\{x, y\}$;

概率和 $S_P : S_P(x, y) = x + y - x \cdot y$;

Łukasiewicz t 余模 (有界和)$S_{\text{L}} : S_{\text{L}}(x, y)=\min\{x + y, 1\}$;

突变和 $S_D : S_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,1]^2, \\ \max\{x,y\}, & \text{其他}. \end{cases}$

定义 2.1.5 (1) 一个非增函数 N:[0, 1]→[0, 1] 称为是否定, 如果满足

(N1) $N(0)=1$, $N(1)=0$.

(2) 一个否定称为严格否定, 如果还满足

(N2) N 是连续的;

(N3) N 是严格递减的.

(3) 一个严格否定称为是强否定, 如果它是对合的, 即还满足

(N4) $N(N(x))=x$, $\forall x \in[0, 1]$.

注 2.1.2 (1) 重要而广泛使用的强否定是如下定义的标准否定 N_s: [0, 1]→[0, 1], $N_s(x) = 1 - x$, $\forall x \in[0,1]$.

(2) 函数 N: [0, 1]→[0, 1] 是一个强否定当且仅当存在单调双射 g: [0, 1]→[0, 1] 满足 $N(x) = g^{-1}(N_s(g(x)))$, $\forall x \in[0, 1]$.

(3) 如下定义的 Gödel 否定 N_G 不是严格否定:

$$N_G(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

(4) 给定一个 t–模 T 及严格否定 N, 可如下构作一个 t–余模 (称为是 N 对偶于 T 的):

$$S(x,y) = N^{-1}(T(N(x), N(y))), \quad \forall x, y \in [0,1].$$

定义 2.1.6 设 T, S, N 分别是 t–模、t–余模和否定. 称三元组 (T, S, N) 为 De Morgan 三元组, 如果满足 ($\forall x$, $y \in[0, 1]$)

$$T(x,y) = N(S(N(x), N(y))), \quad S(x,y) = N(T(N(x),\ N(y))).$$

注 2.1.3 (1) 给定 t–模 T, (T, S, N) 为 De Morgan 三元组当且仅当 N 是强否定而 S 是 N 对偶于 T 的 t–余模.

(2) 即使 (T, S, N) 为 De Morgan 三元组, 也未必对任意 $x \in[0, 1]$ 有 $T(x, N(x))=0$, $S(x, N(x))=1$, 即此时排中律不再成立.

(3) 给定一个 De Morgan 三元组 (T, S, N), ([0,1]; T, S, N, 0, 1) 绝不可能是 Boole 代数 (因为要使其满足分配律, 必须有 $T = T_M$, $S = S_M$. 而此时对任意 $x \in[0, 1]$ 不可能有 $T(x, N(x))=0$, $S(x, N(x))=1$).

t–模、t–余模作为二元函数, 自然有连续性问题. 显然, 基本 t–模 T_M, T_P, T_{L} 及其对偶 t–余模都是连续的, 而基本 t–模 T_D 及其对偶 t–余模不是连续的. 据数学分析的知识, 一个 t–模 T:[0, 1]×[0, 1]→[0, 1] 是连续的, 当且仅当对所有 [0, 1] 上的收敛序列 $(x_n)_{n\in N}$ 及 $(y_n)_{n\in N}$ 都有

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n).$$

显然, t-余模 S 连续的充要条件是它对应的对偶 t-模 T 是连续的. 一般地, 定义域为 $[0, 1]\times[0, 1]$ 的二元函数, 即使它对每一个变量分别都是连续的, 也未必在 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上连续. 但对于 t-模来说, 由于它是单调的, 故不会出现这种情况, 即

命题 2.1.2　一个 t-模 T:$[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是连续的, 当且仅当它对于每一个变量是连续的, 即对任意的 $x_0, y_0\in[0, 1]$, 垂直截线 $T(x_0, \cdot)$ 和水平截线 $T(\cdot, y_0)$ 都是单变量连续函数.

定义 2.1.7　t-模 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 称为是左连续 (右连续) 的, 如果对每一个 $y\in[0, 1]$ 和所有非减的 (非增的) 序列 $(x_n)_{n\in N}$ 有

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n, y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y).$$

注 2.1.4　(1) 显然, t-模是连续的当且仅当它既是左连续的又是右连续的.

(2) 突变积 T_D 是右连续但非左连续的 t-模.

(3) 如下定义的 t-模 (记为 R_0 或 T^{nM}) 是左连续而非右连续的:

$$R_0(x,y) = T^{\mathrm{nM}}(x,y) = \begin{cases} 0, & x+y\leqslant 1, \\ \min\{x,y\}, & x+y>1. \end{cases}$$

王国俊教授在深入研究模糊推理的逻辑基础时由 R_0 蕴涵诱导出这一 t-模 (称为 R_0 t-模), 并揭示了它的重要应用价值 (见文献 [10], [28], [29], [33]); Fodor[134] 在研究具有换质位对称性质的模糊蕴涵时也诱导出该 t-模 (称为幂零极小 t-模, nilpotent minimum t-norm). 图 2.2 用数学软件 Maple 绘制了 R_0 t-模的三维图形及其等高线图.

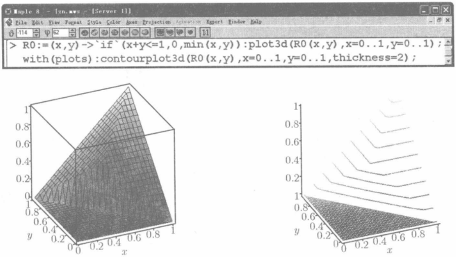


图 2.2　R_0 t-模 (幂零极小 t-模 T^{nM}) 的三维图形及等高线 (用 Maple 绘制)

2.1.2 t–模的代数性质

用代数语言来说, T 是 t–模当且仅当 $([0, 1]; T, \leqslant)$ 是具有单位元 1 和零元 0 的可换全序半群. 因此, 很自然地去考虑 t–模的代数性质. 特别地, 对于两个 t–模 $*$ 与 $\otimes$, 如果作为序半群, $([0, 1]; *, \leqslant)$ 与 $([0, 1]; \otimes, \leqslant)$ 是同构的, 则称 t–模 $*$ 与 $\otimes$ 同构, 即满足：存在双射 φ:[0, 1]→[0, 1], 对任意 $x, y \in [0, 1]$ 有

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \otimes \varphi(y), \quad x \leqslant y \Rightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

若 t–模 $*$ 与 $\otimes$ 同构, 则有双射 φ:[0, 1]→[0, 1], 且 $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. 事实上, 因 φ 是双射, 故存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使 $\varphi(x_0)=0$. 由 $0 \leqslant x_0$ 得 $\varphi(0) \leqslant \varphi(x_0)=0$, 从而 $\varphi(0)=0$. 同理可证 $\varphi(1)=1$.

定义 2.1.8 设 T 是 t–模.

(1) 一个元素 $a \in [0, 1]$ 称为是 T 的幂等元, 如果 $T(a, a) = a$. 显然 0, 1 是任何 t–模的幂等元, 故称 (0, 1) 内的幂等元为非平凡幂等元.

(2) 一个元素 $a \in (0, 1)$ 称为是 t 的幂零元, 如果存在自然数 n 使得 $a^n=0$, 这里

$$a^n = \underbrace{a \otimes a \otimes \cdots \otimes a}_{n},$$

其中, $x \otimes y$ 表示 $T(x, y)$.

(3) 一个元素 $a \in (0, 1)$ 称为是 T 的零因子, 若存在 $b \in (0, 1)$ 使得 $T(a, b)=0$, 即 $a \otimes b=0$.

注 2.1.5 (1) 最小值 t–模 T_M 的幂等元集是 [0, 1] (实际上, T_M 是唯一满足此性质的 t–模), Łukasiewicz t–模 $T_Ł$ 及突变积 t–模 T_D 的幂零元集合和零因子集合是 (0,1), 最小值 t–模 T_M 及乘积 t–模 T_P 既没有幂零元又无零因子, T_P, $T_Ł$ 及 T_D 仅有平凡幂等元.

(2) R_0 t–模 (幂零极小 t–模 T^{nM}) 幂等元集是$\{0\} \cup (0.5, 1]$, 它的幂零元集是 (0, 0.5], 它的零因子之集是 (0,1).

命题 2.1.3 (1) 元素 $a \in [0, 1]$ 是 t–模 T 的幂等元当且仅当对所有 $x \in [a, 1]$ 有 $T(a, x)=\min\{a, x\}$.

(2) 如果 T 是连续 t–模, 则 $a \in [0, 1]$ 是 T 的幂等元当且仅当对所有 $x \in [0, 1]$ 有 $T(a, x)=\min\{a, x\}$.

注 2.1.6 (1) 开区间 (0, 1) 中的元素不可能既是幂等的又是幂零的.

(2) t–模 T 的每一个幂零元 a 也是 T 的零因子, 但反过来不成立 (R_0 t–模就是一个反例).

(3) 一个 t–模有零因子当且仅当它有幂零元 (因幂零元必是零因子, 故有幂零元必有零因子; 反之, 若 $T(a, b)=0$, $a > 0$, $b > 0$, 则 $T(c, c)=0$, 这里 $c=\min\{a, b\}$. 这说明, 有零因子必有幂零元).

(4) 如果 $a \in (0, 1)$ 是 t–模的幂零元, 则任意的 $b \in (0, a)$ 也是幂零元. 这说明, t–模的幂零元集合或者是空集 (如 T_M 和 T_P) 或者是区间 $(0, c)$(或 $(0, c]$).

定义 2.1.9　设 T 是 t–模.

(1) T 称为是严格单调的, 如果成立

(SM) 当 $x > 0, y < z$ 时有 $T(x, y) < T(x, z)$;

(2) 称 T 满足消去律, 如果成立

(CL) $T(x, y) = T(x, z)$ 蕴涵 $x=0$ 或 $y = z$;

(3) 称 T 满足条件消去律, 如果成立

(CCL) $T(x, y) = T(x, z) > 0$ 蕴涵 $y = z$;

(4) 称 T 是阿基米德的, 如果成立

(AP) 对任意 $x, y \in (0,1)$, 存在自然数 n 使得 $x^n < y$;

(5) 称 T 具有极限性质, 如果成立

(LP) 对任意 $x \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

注 2.1.7　(1) 最小值 t–模 T_M 不具有上述定义中的性质, 而乘积 t–模 T_P 具有上述的所有性质. Łukasiewicz t–模 T_{L} 和突变乘积 T_D 是阿基米德的, 且满足条件消去律 (CCL) 和极限性质 (LP), 但不具有其他性质 (不满足 (SM) 及 (CL)).

(2) 如果 t–模 T 满足消去律 (CL), 则也满足条件消去律 (CCL), 但反之不成立 (如 T_{L}).

(3) 一方面, 连续 t–模 T_M 不具有上述定义中的代数性质; 另一方面, 非连续 t–模 T_D 是阿基米德的且满足条件消去律 (CCL) 和极限性质 (LP), 而下述非连续 t–模是严格单调且满足消去律:

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2}, & (x,y) \in [0,1), \\ \min\{x,y\}, & \text{其他}. \end{cases}$$

这说明 t–模的代数性质和连续性是完全独立的.

命题 2.1.4　设 T 是 t–模, 则

(1) T 是严格单调的当且仅当它满足消去律 (CL);

(2) 如果 T 是严格单调的, 则它仅有平凡幂等元;

(3) 如果 T 是严格单调的, 则它没有零因子.

命题 2.1.5　设 T 是 t–模, 则下列条件等价:

(1) T 是阿基米德的;

(2) T 满足极限性质 (LP);

(3) T 仅有平凡幂等元, 且当右极限 $\lim\limits_{x\searrow x_0} T(x,x)=x_0$ 时 (这里 $x_0\in(0,1)$), 存在 $y_0\in(x_0,1)$ 使得 $T(y_0,y_0)=x_0$.

定义 2.1.10 (1) t–模 T 称为是严格的, 如果它是连续的且严格单调的.

(2) t–模 T 称为是幂零的, 如果它是连续的且任意 $a\in(0,1)$ 是 T 的幂零元.

注 2.1.8 由命题 2.1.4 (1) 知, t–模 T 是严格的当且仅当它是连续的且满足消去律 (CL). 从而每一个严格 t–模, 都满足条件消去律 (CCL).

命题 2.1.6[130] 每一个幂零 t–模 T 都满足条件消去律 (CCL).

证明 假定 $T(x,y)=T(x,z)$ 且 $y<z$. 因 T 是连续的, 故存在 $u\in[0,1)$ 使 $y=T(z,u)$. 于是由结合律得 $T(x,z)=T(x,y)=T(x,T(z,u))=T(T(x,z),u)$. 应用归纳法得, 对任意自然数 n 有 $T(x,z)=T(T(x,z),u^n)$. 由于 T 是幂零的, 故得 $T(x,z)=T(T(x,z),0)=0$. 这说明 T 满足条件消去律 (CCL). □

命题 2.1.7 对于函数 T: $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, 下列条件等价:

(1) T 是严格 t–模;

(2) T 同构于乘积 t–模 T_P, 即存在严格递增的双射 φ: $[0,1]\to[0,1]$, 对任意 x, $y\in[0,1]$ 有 $T(x,y)=\varphi^{-1}(T_P(\varphi(x),\varphi(y)))=\varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y))$.

命题 2.1.8 对于函数 T: $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, 下列条件等价:

(1) T 是幂零 t–模;

(2) T 同构于 Łukasiewicz t–模 T_{L}, 即存在严格递增的双射 φ: $[0,1]\to[0,1]$, 对任意 $x,y\in[0,1]$ 有 $T(x,y)=\varphi^{-1}(T_{\text{L}}(\varphi(x),\varphi(y)))=\varphi^{-1}(\max\{\varphi(x)+\varphi(y)-1,0\})$.

命题 2.1.9[135] 每一个左连续阿基米德 t–模必是连续的.

命题 2.1.10 对于任意的 t–模 T, 下列结论成立:

(1) 如果 T 是右连续的且仅有平凡幂等元, 则 T 是阿基米德的;

(2) 如果 T 是右连续的且满足条件消去律 (CCL), 则 T 是阿基米德的;

(3) 如果对任意 $x_0\in(0,1)$ 有 $\lim\limits_{x\searrow x_0} T(x,x)<x_0$, 则 T 是阿基米德的;

(4) 如果 T 是严格的, 则 T 是阿基米德的;

(5) 如果任意 $x\in(0,1)$ 都是 T 的幂零元, 则 T 是阿基米德的.

关于 t–模的各种代数性质之间的关联关系可总结于图 2.3, 其中空心箭头表示蕴涵关系, 虚箭头表示在连续 t–模的条件下相应的蕴涵关系成立. 在图 2.3 中没有指明联系的代数性质之间不存在一般的蕴涵关系.

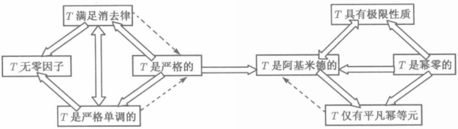


图 2.3　t–模的各种代数性质之间的逻辑关系

定理 2.1.1　对于连续阿基米德 t–模 T, 下列条件等价:

(1) T 是幂零的;

(2) T 有幂零元;

(3) T 有零因子;

(4) T 不是严格的.

注 2.1.9　(1) 由定理 2.1.1 知, 连续阿基米德 t–模仅有两类: 幂等的和严格的.

(2) 由定理 2.1.1 及命题 2.1.6、命题 2.1.10 (2) 知, 连续 t–模是阿基米德的当且仅当它满足条件消去律 (CCL).

定义 2.1.11　设 T 是一个 t–模, S 是一个 t 余模. 称 T 对 S 是分配的, 如果

$$T(x,S(y,z))=S(T(x,y),T(x,z)),\quad \forall x,y,z\in[0,1].$$

称 S 对 T 是分配的, 如果

$$S(x,T(y,z))=T(S(x,y),S(x,z)),\quad \forall x,y,z\in[0,1].$$

如果 T 对 S 是分配的且 S 对 T 也是分配的, 则称 (T, S) 为分配对.

命题 2.1.11　设 T 是 t–模, S 是 t 余模, 则

(1) S 对 T 是分配的当且仅当 $T=T_M$;

(2) T 对 S 是分配的当且仅当 $S=S_M$;

(3) (T, S) 是分配对当且仅当 $T=T_M$ 且 $S=S_M$.

2.1.3　与 t–模相伴的剩余蕴涵

在模糊逻辑中, 不同的系统涉及不同的蕴涵算子, 而常见的模糊逻辑系统都选用与 t–模相伴的蕴涵算子, 即剩余蕴涵. 同时, 剩余格 (下节详细介绍) 作为 t–模与剩余蕴涵的更一般的代数抽象, 对模糊逻辑及其在格上的抽象拓广 (参见 Pavelka 的系列论文 [136]) 有重要意义.

定义 2.1.12[11]　设 $\otimes$ 是 $[0, 1]$ 上的 t–模, R:$[0, 1]\times[0, 1]\rightarrow[0, 1]$ 是 $[0, 1]$ 上的二元函数. 如果

$$x \otimes y \leqslant z \text{ 当且仅当 } x \leqslant R(y,z), \forall x,y,z \in [0,1],$$

则称 R 是与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子, 同时称 $(\otimes, R)$ 为伴随对. 此时常记 $R(x, y)$ 为 $x \to y$.

注 2.1.10 与 4 个基本 t–模 $T_M, T_{\mathrm{L}}, T_P, T_D$ 及 T^{nM}(即 R_0 t–模) 相伴随的蕴涵分别是

$$R_M(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y, & x > y \end{cases} \text{(Gödel蕴涵算子, 有时记为} R_G\text{)};$$

$$R_{\mathrm{L}}(x,y) = \min\{1-x+y, 1\} \text{(Łukasiewicz蕴涵算子, 也称为有界蕴涵算子)};$$

$$R_P(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \min\{1, y/x\}, & x > 0 \end{cases} \text{(Goguen蕴涵, 也称为概率蕴涵算子)};$$

$$R_D(x,y) = \begin{cases} y, & x = 1, \\ 1, & x \neq 1 \end{cases} \text{(突变积蕴涵, 也称为突变蕴涵)};$$

$$R_0(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ \max\{1-x, y\}, & x > y \end{cases} (R_0 \text{ 蕴涵, 也称为修正的 Kleene 蕴涵}).$$

定理 2.1.2[11] 设 $\otimes$ 是 [0, 1] 上的左连续 t–模, 若在 [0, 1] 上定义二元运算 $\to$ 如下:

$$x \to y = \sup\{a \in [0,1] | a \otimes x \leqslant y\}, \quad \forall x, y \in [0,1] (\sup \text{表示集合的上确界}),$$

则

(1) $\to$ 是与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子, 即 $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \to z$.

(2) $y \to z=1$ 当且仅当 $y \leqslant z$;

(3) $x \leqslant y \to z$ 当且仅当 $y \leqslant x \to z$;

(4) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(5) $1 \to z = z$;

(6) $y \to \bigwedge\limits_{i \in I} z_i = \bigwedge\limits_{i \in I} (y \to z_i)$, $\left(\bigvee\limits_{i \in I} z_i\right) \to y = \bigwedge\limits_{i \in I} (z_i \to y)$;

(7) $y \to z$ 关于 z 单调递增, 关于 y 单调递减, 即

$$z_1 \leqslant z_2 \Rightarrow y \to z_1 \leqslant y \to z_2, y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow y_2 \to z \leqslant y_1 \to z.$$

定义 2.1.13[11] 设 $\to$ 是 [0, 1] 上的二元运算, 如果 $\to$ 满足定理 2.1.2 中的性质 (2)∼(7), 则称 $\to$ 为 [0, 1] 上的正则蕴涵算子.

注 2.1.11 (1) 由定理 2.1.2 知, 与左连续 t–模相伴随的蕴涵算子是正则蕴涵算子.

(2) 定义 2.1.7 给出 t–模左连续的定义. 事实上, 左连续有如下的充要条件: t–模 T 是左连续的当且仅当

$$T\left(a, \bigvee_{i\in I} b_i\right) = \bigvee_{i\in I} T(a, b_i), \quad \forall a, b_i \in [0,1].$$

定理 2.1.3[11]　设 → 是 [0, 1] 上的正则蕴涵算子, 若在 [0, 1] 上定义二元运算 ⊗ 如下: $x\otimes y=\inf\{a\in[0,1] | x\leqslant y\to a\}$, $\forall x, y\in[0,1]$(inf 表示集合的下确界), 则

(1) $x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\to z$;

(2) ⊗ 是 [0, 1] 上的 t–模;

(3) ⊗ 是左连续的.

定义 2.1.14[10]　设 P 是偏序集, P 上的二元运算 ⊗ 与 → 叫做互为伴随, 若以下条件成立:

(M0) $\otimes: P\times P\to P$ 是单调递增的;

(R0) $\to: P\times P\to P$ 关于第一个变量是不增的, 关于第二个变量是不减的;

(A) $a\otimes b\leqslant c$ 当且仅当 $a\leqslant b\to c$, $a, b, c\in P$.

这时, (⊗, →) 叫做 P 上的伴随对.

命题 2.1.12[10]　设 P 是偏序集, (⊗, →) 是 P 上的伴随对, $a\in P$, 则下列条件成立 (当两边出现的并或交都存在时):

(M1) $\left(\bigvee_i x_i\right)\otimes a = \bigvee_i (x_i\otimes a)$;

(R1) $a\to \bigwedge_i y_i = \bigwedge_i (a\to y_i)$.

定理 2.1.4[10]　设 L 是完备格, 其最小元、最大元记为 0 和 1.

(1) 设映射 $\otimes: L\times L\to L$ 满足条件 (M0) 和 (M1), 则有满足 (R0) 的唯一映射 $\to: L\times L\to L$ 使 (A) 成立, 且 $x\to y=\sup\{a\in L | a\otimes x\leqslant y\}$, $x, y\in L$.

(2) 设映射 $\to: L\times L\to L$ 满足条件 (R0) 和 (R1), 则有满足 (M0) 的唯一映射 $\otimes: L\times L\to L$ 使 (A) 成立, 且 $x\otimes y=\inf\{a\in L | x\leqslant y\to a\}$, $x, y\in L$.

定理 2.1.5[10]　设 P 是偏序集, (⊗, →) 是 P 上的伴随对, 则下列条件 (Mi) 与 (Ri) 等价 (i=2, 3, ⋯, 8; 对于 i=2, 指当等式两边出现的并或交都存在时等式成立):

(M2) $a\otimes\left(\bigvee_i x_i\right) = \bigvee_i (a\otimes x_i)$.　(R2) $\left(\bigvee_i y_i\right)\to a = \bigwedge_i (y_i\to a)$.

(M3) $(a\otimes b)\otimes c\leqslant a\otimes(b\otimes c)$.　(R3) $b\to c\leqslant (a\to b)\to(a\to c)$.

(M4) $a\otimes 1 = a$.　(R4) $a = 1\to a$.

(M5) $1 \otimes a = a$. (R5) $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \to b = 1$.

(M6) $a \otimes b = b \otimes a$. (R6) $a \leqslant b \to c$ 当且仅当 $b \leqslant a \to c$.

(M7) $(a \otimes b) \otimes c \geqslant a \otimes (b \otimes c)$. (R7) $a \to b \leqslant (a \otimes c) \to (b \otimes c)$.

(M8) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$. (R8) $(a \otimes b) \to c = a \to (b \to c)$.

2.2 可换剩余格

"剩余格" 的概念最早来自对环的理想格的研究，可参见 Ward 及 Dilworth 于 20 世纪 30 年代发表在美国著名学术期刊 *Transactions of the American Mathematic Society* 上的论文 [137,138]. 近年，一批学者从泛代数的角度对剩余格进行了系统研究，集中反映在文献 [139]~[144] 中. 有趣的是, 模糊逻辑的理论基础研究与剩余格密切相关, 引言中提到的各种 t–模基模糊逻辑系统均建立在剩余格的基础上. 事实上, 剩余格与逻辑的密切关系不仅反映在模糊逻辑方面. 例如, 文献 [140] 中指出剩余格的另一名称叫做整直觉线性代数 (integral intuitionistic linear algebra), 它源自直觉线性逻辑；文献 [145] 全面阐述了剩余格在子结构逻辑 (substructural logic) 中的重要作用；又如, 基于剩余格的格值逻辑在计算机科学中同样有重要意义, 可参阅文献 [146]~[149].

同时, 正因为剩余格的重要性, 它成为多个数学分支的研究课题, 从而也造成其定义的多样性. 例如, 通常模糊逻辑中剩余格的定义 (如文献 [10], [22], [136]), 实质上是指可换剩余格, 且与文献 [139] 中可换剩余格 CRL 不同, 后者并不要求有界 (即不一定存在最大元和最小元) 且单位元 e 并不一定是最大元 1；在非可换模糊逻辑的研究中涉及非可换的剩余格, 它与文献 [141], [143] 中的 RL 也不尽相同. 一些学者更习惯使用 (可换) 格序剩余幺半群 (独异点), 即 (commutative) lattices-ordered residuated monoid, 这样的代数学名称. 为了不引起混乱, 也照顾模糊逻辑学界的习惯, 本书使用 "可换剩余格" 和一般 "剩余格" 的名称, 且要求是有界格、1 既是最大元又是单位元. 同时, 对更一般的剩余结构, 则从代数学角度称呼它们. 本节先介绍可换格序剩余幺半群、可换剩余格等概念, 它们可看成 t–模及其剩余蕴涵的代数抽象；2.4 节再以伪 t–模为背景介绍一般剩余格的基本理论.

2.2.1 可换格序剩余幺半群

定义 2.2.1[139,140,142] 序代数结构 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \to, e)$ 称为是可换格序剩余幺半群 (或格序可换剩余幺半群), 如果:

(1) $(L; \otimes, e)$ 是可换幺半群, 其中, e 为单位元;

(2) $(L; \wedge, \vee)$ 是格, 其序关系为 $\leqslant$;

(3) 对任意 $x, y, z \in L$, $x \otimes y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \to z$.

一个可换格序剩余幺半群称为是整的 (integral), 如果对任意 $x \in L$, $x \leqslant e$. 此时, 习惯上记 e 为 1.

注 2.2.1　可换格序剩余幺半群未必有零元 (指最小元). 按文献 [142] 的说法, 有最小元 0 的可换格序剩余幺半群又称为 FL_e–代数, 有最小元 0 的整可换格序剩余幺半群又称为 FL_{ew}–代数.

定理 2.2.1[139,141,144]　设 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \rightarrow, e)$ 是可换格序剩余幺半群, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $e \rightarrow x = x$, $e \leqslant x \rightarrow x$;

(2) $x \leqslant y \Leftrightarrow e \leqslant x \rightarrow y$(若 L 是整的, 则有 $x \leqslant y \Leftrightarrow x \rightarrow y=1$);

(3) $x \otimes (x \rightarrow y) \leqslant y$;

(4) $x \rightarrow (y \rightarrow z)= (x \otimes y) \rightarrow z = y \rightarrow (x \rightarrow z)$;

(5) $(x \rightarrow e) \otimes (y \rightarrow e) \leqslant (x \otimes y) \rightarrow e$;

(6) $x \rightarrow (y \wedge z)=(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$;

(7) $(x \vee y) \rightarrow z=(x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$;

(8) $x \rightarrow y \leqslant (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y), z \rightarrow x \leqslant (x \rightarrow y) \rightarrow (z \rightarrow y)$;

(9) $x \rightarrow y \leqslant (z \otimes x) \rightarrow (z \otimes y)$;

(10) $x \otimes (y \vee z)=(x \otimes y) \vee (x \otimes z)$;

(11) 如果 L 有最小元 0, 则 L 也有最大元 1, 且 $x \otimes 0=0$, $0 \rightarrow x=1$, $x \rightarrow 1=1$.

定理 2.2.2　设 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \rightarrow, e)$ 是可换格序剩余幺半群, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $x \leqslant y \rightarrow (x \otimes y)$;

(2) $x \leqslant y \Rightarrow x \otimes z \leqslant y \otimes z$.

证明　(1) 由定理 2.2.1(4) 得 $x \rightarrow [y \rightarrow (x \otimes y)]=(x \otimes y) \rightarrow (x \otimes y)$, 再由定理 2.2.1(1) 得 $e \leqslant (x \otimes y) \rightarrow (x \otimes y) = x \rightarrow [y \rightarrow (x \otimes y)]$, 由此应用定理 2.2.1(2) 得 $x \leqslant y \rightarrow (x \otimes y)$.

(2) 设 $x \leqslant y$, 则由 (1) 得 $y \leqslant z \rightarrow (y \otimes z)$, 从而 $x \leqslant z \rightarrow (y \otimes z)$. 由定义 2.2.1(3) 得 $x \otimes z \leqslant y \otimes z$.

注 2.2.2　上述结论 (2) 表明, 可换格序剩余幺半群 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \rightarrow, e)$ 中序 $\leqslant$ 与运算 $\otimes$ 相容, 即按定义 1.4.1, $(L; \otimes, \leqslant)$ 确实是格序半群.

设 $(P; \leqslant)$ 是偏序集, P 上的可换二元运算 $\otimes$ 称为是可剩余的, 如果存在 P 上的二元运算 $\rightarrow$ 使得 $(\forall x, y, z \in P)$　$x \otimes y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \rightarrow z$. 容易验证, 可换二元运算 $\otimes$ 是可剩余的当且仅当存在 P 上的二元运算 $\rightarrow$ 使得以下等式成立 [139,144]:

(1) $x \otimes (y \vee z)= (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$;

(2) $x \rightarrow (y \wedge z)= (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$;

(3) $[x \otimes (x \rightarrow y)] \vee y = y$;

(4) $[x \rightarrow (x \otimes y)] \wedge y = y$.

因此, 下述结论成立.

定理 2.2.3[139,144] 所有可换格序剩余幺半群构成的类是一个簇.

例 2.2.1 设 $L=\{0, e, 1\}$, 规定 L 上的序关系为 $0< e < 1$, L 上的两个二元运算 $\otimes$, $\rightarrow$ 分别定义如表 2.1 及表 2.2, 则 L 是可换格序剩余幺半群, 而最大元 1 与单位元 e 不相同.

表 2.1

$\otimes$	0	e	1
0	0	0	0
e	0	e	1
1	0	1	1

表 2.2

$\rightarrow$	0	e	1
0	1	1	1
e	0	e	1
1	0	0	1

注 2.2.3 在可换格序剩余幺半群中, 格分配律一般不成立, 参见文献 [139] 中的 Example 1.1 (可从任意一个含有原子的有界格出发, 构造一个可换格序剩余幺半群).

定义 2.2.2[139] 设 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \rightarrow, e)$ 是可换格序剩余幺半群, $C \subseteq L$. 称 C 是 L 的一个凸子代数 (convex subalgebra), 如果 C 是 L 的子代数且 $(\forall x, y \in C) \uparrow x \cap \downarrow y \subseteq C$.

注 2.2.4 对于偏序集 $(L; \leqslant)$, $\forall x, y \in L$, 若 $x \leqslant y$, 则 $\uparrow x \cap \downarrow y=\{z \in L | x \leqslant z \leqslant y\}=[x, y]$. L 的子集 C 是 $(L; \leqslant)$ 的凸子集当且仅当 $(\forall x, y \in C, x \leqslant y, z \in L) x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in C$.

定理 2.2.4[139] 设 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \rightarrow, e)$ 是可换格序剩余幺半群, 则

(1) 设 H 是 L 的凸子代数, 令

$$\begin{aligned}\theta_H &= \{(a,b) \in L \times L | \text{ 存在 } h \in H \text{ 使得 } a \otimes h \leqslant b \text{ 且 } b \otimes h \leqslant a\} \\ &= \{(a,b) \in L \times L | (a \rightarrow b) \wedge e \in H \text{ 且 } (b \rightarrow a) \wedge e \in H\},\end{aligned}$$

则 θ_H 是 L 上的同余关系.

(2) 设 θ 是 L 上的同余关系, 令 $H_\theta=\{a \in L|\ (a, e) \in \theta\}$, 则 H_θ 是 L 的凸子代数.

2.2.2 可换剩余格及其滤子

本节从 2.1 节中的 "伴随对" 概念出发引入可换剩余格, 将会看到它实际上就是 2.1 节定义的有最小元 0 的整可换格序剩余幺半群, 即 FL_{ew}-代数.

定义 2.2.3[10] 有界格 L 叫可换剩余格 (commutative residuated lattice), 若

(1) L 上有伴随对 $(\otimes, \rightarrow)$;

(2) $(L; \otimes, 1)$ 是带单位元 1 的交换半群, 这里 1 是 L 的最大元.

定理 2.2.5[10] 设 $(L; \otimes, \rightarrow)$ 是剩余格, 则

(1) (Mi) 与 (Ri) 都成立 (i=0, 1, $\cdots$, 8) (关于 (Mi) 与 (Ri), 见定理 2.1.5 等);

(2) $a \otimes b \leqslant a \wedge b$;

(3) $a \to (b \wedge c)=(a \to b) \wedge (a \to c)$, $(a \vee b) \to c=(a \to c) \wedge (b \to c)$.

文献 [22] 中的 Definition 2.3.2 也给出可换剩余格 (residuated lattice) 一个定义, 下面将证明这两者是等价的, 即有

定理 2.2.6　具有 4 个二元运算和两个常元的代数结构 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是可换剩余格, 当且仅当满足:

(1) $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界格, 相应的序为 $\leqslant$, 0、1 分别是最小元和最大元;

(2) $(L; \otimes, 1)$ 是具有单位 1 的可换半群;

(3) $\forall a, b, c \in L$, $a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \to c$.

证明　由定义 2.1.14 及定义 2.2.3 知, 可换剩余格一定满足上述条件 (1)~(3).

假设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 满足上述条件 (1)~(3), 下证 $(L; \otimes, \to)$ 是可换剩余格. 根据定义 2.1.14 及定义 2.2.3, 只需证明定义 2.1.14 中的 (M0) 与 (R0) 成立.

设 $a \leqslant b, c \in L$. 由 $b \otimes c \leqslant b \otimes c$, 应用 (3) 得 $b \leqslant c \to b \otimes c$. 于是 $a \leqslant c \to b \otimes c$, 再次应用 (3) 得 $a \otimes c \leqslant b \otimes c$. 由于 $\otimes$ 是可换的, 故 $c \otimes a \leqslant c \otimes b$. 这说明 $\otimes$ 是单调递增的, 即 (M0) 成立.

设 $a \leqslant b$, $c \in L$. 由 $c \to a \leqslant c \to a$, 应用 (3) 得 $(c \to a) \otimes c \leqslant a$. 于是 $(c \to a) \otimes c \leqslant b$, 再次应用 (3) 得 $c \to a \leqslant c \to b$. 这说明 $\to$ 关于第二个变量不减.

设 $a \leqslant b$, $c \in L$. 由 $b \to c \leqslant b \to c$, 应用 (3) 得 $(b \to c) \otimes b \leqslant c$. 由于 $\otimes$ 是可换的, 故 $b \otimes (b \to c)=(b \to c) \otimes b \leqslant c$. 再次应用 (3) 得 $b \leqslant (b \to c) \to c$. 于是 $a \leqslant b \leqslant (b \to c) \to c$. 第 3 次应用 (3) 得 $a \otimes (b \to c) \leqslant c$. 再次应用 $\otimes$ 的可换性得 $(b \to c) \otimes a \leqslant c$. 第 4 次应用 (3) 得 $b \to c \leqslant a \to c$. 这说明 $\to$ 关于第一个变量不增. 总之, (R0) 成立.

根据以上定义和结论, 2.1 节所述的可换格序剩余幺半群及伴随对的所有性质在可换剩余格中均成立. 下面给出可换剩余格的一些新性质, 它们在后续内容中都有应用.

定理 2.2.7　设 $(L; \otimes, \wedge, \vee, \to, 0, 1)$ 是可换剩余格, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $x \leqslant y \to x$;

(2) $x \vee y \leqslant [(x \to y) \to y] \wedge [(y \to x) \to x]$;

(3) $x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z)$;

(4) $x \otimes (y \wedge z) \leqslant (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$;

(5) $x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z)$.

证明　(1) 由 $y \leqslant 1$ 得 $1 \to x \leqslant y \to x$(应用定义 2.1.14(R0)), 又 $1 \to x = x$(应用定理 2.1.5(R4)). 于是 $x \leqslant y \to x$.

(2) 由定理 2.2.1 (3) 得 $x \otimes (x \to y) \leqslant y$, 于是 $x \leqslant (x \to y) \to y$. 又由 (1) 得 $y \leqslant (x \to y) \to y$, 所以 $x \vee y \leqslant (x \to y) \to y$. 类似地, $x \vee y \leqslant (y \to x) \to x$. 于是 $x \vee y \leqslant [(x \to y) \to y] \wedge [(y \to x) \to x]$.

(3) 由 (1) 得 $z \leqslant (x \to y) \to z$, 由伴随性及 $\otimes$ 可换性得 $(x \to y) \otimes z \leqslant z$. 又据定理 2.2.1(3) 及 $\otimes$ 可换性得 $(x \to y) \otimes x \leqslant y$. 从而, $[(x \to y) \otimes x] \vee [(x \to y) \otimes z] \leqslant y \vee z$. 应用定理 2.2.1(10), $[(x \to y) \otimes x] \vee [(x \to y) \otimes z] = (x \to y) \otimes (x \vee z)$, 于是 $(x \to y) \otimes (x \vee z) \leqslant y \vee z$. 再应用伴随性得 $x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z)$.

(4) 由 $y \wedge z \leqslant y$, 应用定理 2.2.2(2) 得 $x \otimes (y \wedge z) \leqslant x \otimes y$. 同理可证 $x \otimes (y \wedge z) \leqslant x \otimes z$. 于是, $x \otimes (y \wedge z) \leqslant (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$.

(5) 由 (1) 得 $z \leqslant (x \to y) \to z$, 由伴随性及 $\otimes$ 可换性得 $(x \to y) \otimes z \leqslant z$. 又据定理 2.2.1 (3) 及 $\otimes$ 可换性得 $(x \to y) \otimes x \leqslant y$. 从而, $[(x \to y) \otimes x] \wedge [(x \to y) \otimes z] \leqslant y \wedge z$. 应用刚证明的 (4), $(x \to y) \otimes (x \wedge z) \leqslant [(x \to y) \otimes x] \wedge [(x \to y) \otimes z]$, 于是 $(x \to y) \otimes (x \wedge z) \leqslant y \wedge z$. 再应用伴随性得 $x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z)$.

下述例子表明, 与定理 2.2.1 (10) 不同, 定理 2.2.7 (4) 中的不等式在一般可换剩余格中不能改为等式.

例 2.2.2　设 $L=\{0, a, b, c, d, e, 1\}$, 其上的二元运算 $\to$, $\otimes$ 按表 2.3、表 2.4 的方式定义, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 2.4 所示, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是可换剩余格, 且

$$d \otimes (b \wedge c) = 0 \neq a = (d \otimes b) \wedge (d \otimes c).$$

此外, L 不是分配格, 因为 $d \vee (b \wedge c) \neq (d \vee b) \wedge (d \vee c)$.

表 2.3　运算 “$\to$” 的定义

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1
b	b	e	1	e	e	1	1
c	c	e	e	1	e	1	1
d	d	e	e	e	1	1	1
e	a	e	e	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

表 2.4　运算 “$\otimes$” 的定义

$\otimes$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	a	a	a	b
c	0	0	a	0	a	a	c
d	0	0	a	a	0	a	d
e	0	0	a	a	a	a	e
1	0	a	b	c	d	e	1

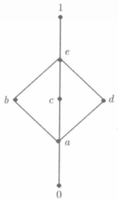


图 2.4　序关系图

事实上, 可以借用数学软件 Mathematica 验证 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是可换剩余格, 如图 2.5 所示 (程序中仅验证结合律和伴随性, 其余条件是显然成立的).

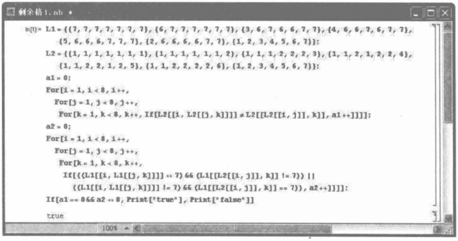


图 2.5　用 Mathematica 软件验证剩余格

以下讨论可换剩余格的滤子.

定义 2.2.4　设 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 是可换剩余格, F 是 L 的非空子集, F 称为是 L 的一个滤子, 如果

(F1) $a \in F, b \in F \Rightarrow a \otimes b \in F$;

(F2) $a \in F, a \leqslant b \Rightarrow b \in F$.

注 2.2.5　若 F 是可换剩余格 L 的滤子, 由于 F 非空, 故由 (F2) 知 $1 \in F$.

定理 2.2.8　设 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 是可换剩余格, F 是 L 的非空子集, 则 F 是 L 的滤子当且仅当 F 是 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 1)$ 的凸子代数.

证明　由定义 2.2.2 及注 2.2.4 易知: 可换剩余格中凸子代数必是滤子.

现设 F 是 L 的滤子, 由 (F2) 易知 F 是 L 的凸子集, 即 $(\forall a, b \in F, a \leqslant b, c \in L) a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in F$. 下证 F 是 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 1)$ 的子代数.

(1) 由 (F1) 知 F 对运算 $\otimes$ 是封闭的.

(2) 若 $x, y \in F$, 由 (F1) 得 $x \otimes y \in F$, 应用定理 2.2.5 (2) 知 $x \otimes y \leqslant x \wedge y$, 据 (F2) 得 $x \wedge y \in F$, 即 F 对运算 $\wedge$ 封闭.

(3) 若 $x, y \in F$, 由 $x \leqslant x \vee y$, 应用 (F2) 得 $x \vee y \in F$, 即 F 对运算 $\vee$ 封闭.

(4) 若 $x, y \in F$, 由 $y \leqslant x \rightarrow y$, 应用 (F2) 得 $x \rightarrow y \in F$, 即 F 对运算 $\rightarrow$ 封闭.

所以 F 是 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 1)$ 的凸子代数.

注 2.2.6　上述论述中不能写成 "F 是 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 的子代数", 因为从泛代数角度说只有当 F 对零元运算 "0" 也封闭时, F 才是 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 的子代数.

命题 2.2.1　设 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 是可换剩余格, $F \subseteq L$, 则 F 是 L 的滤

子当且仅当满足以下条件:

(F3) $1\in F$;

(F4) $\forall x, y\in L, (x\in F, x\to y\in F)\Rightarrow y\in F$.

证明 假设 F 满足 (F3) 和 (F4). 显然, 当 $x\in F$ 且 $x\leqslant y$ 时, 由 (F3) 得 $x\to y=1\in F$, 由 (F4) 得 $y\in F$, 即定义 2.2.4(F2) 成立. 如果 $x, y\in F$, 由定理 2.2.1(4) 可得 $x\to(y\to(x\otimes y))=(x\otimes y)\to(x\otimes y)=1\in F$, 应用 (F4) 得 $y\to(x\otimes y)\in F$, 进而 $x\otimes y\in F$, 即 (F1) 成立, 从而 F 是一个滤子.

反之, 假设 F 是 L 的一个滤子. 显然, 此时 (F3) 成立. 如果 $x, x\to y\in F$, 应用定义 2.2.4(F1) 得 $x\otimes(x\to y)\in F$. 而应用定理 2.2.7(2) 可得 $x\leqslant(x\to y)\to y$, 于是 $x\otimes(x\to y)\leqslant y$, 从而 $y\in F$(由定义 2.2.4(F2)), 说明 (F4) 成立.

由定理 2.2.8 及定理 2.2.4, 并应用泛代数知识 (定理 1.4.8 及定理 1.4.9), 可证可换剩余格的下述商结构定理:

定理 2.2.9 设 $(L;\otimes,\wedge,\vee,\to,0,1)$ 是可换剩余格, F 是 L 的一个滤子, 则

(1) $\sim_F$ 是 L 上的 $(\otimes,\wedge,\vee,\to)$–型同余关系, 这里 $\sim_F$ 定义为

$$\forall a,b\in L, a\sim_F b \text{ 当且仅当 } (a\to b\in F, b\to a\in F).$$

(2) $(L/\sim_F;\otimes,\wedge,\vee,\to,[0],[1])$ 也是一个可换剩余格, 其中, $L/\sim_F$ 为商集, $L/\sim_F$ 上的运算 $\otimes,\wedge,\vee,\to$ 是 L 上相应运算的自然拓展 (见定义 1.4.11), $L/\sim_F$ 上的序关系定义为 $\forall a, b\in L$, $[a]\leqslant[b]$ 当且仅当 $a\to b\in F$.

注 2.2.7 由于在泛代数中, 常元被看成零元运算, 所以应用定理 2.2.4(及定理 1.4.9) 只能得到 $(L/\sim_F;\otimes,\wedge,\vee,\to,[1])$ 是一个可换剩余格序幺半群, 而它是整的且 $[0]$ 是最小元的结论, 则需要应用 $L/\sim_F$ 上序关系的定义以及 0, 1 的特点进行验证.

2.2.3 可换剩余格的素滤子与格素滤子

定义 2.2.5 设 $(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$ 是一个可换剩余格, L 的一个滤子 F 称为是素滤子, 如果

(F5) $\forall x, y\in L, x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$.

注 2.2.8 (1) 由定理 2.2.9 及素滤子的定义易得

F 是素滤子当且仅当 $(L/\sim_F;\otimes,\wedge,\vee,\to,[0],[1])$ 是线性序的.

(2) 与定义 1.2.16 不同, 上述素滤子是针对可换剩余格的 (与运算 $\otimes$ 有关). 为了区别, 称定义 1.2.16 中的素滤子为格素滤子.

命题 2.2.2 设 F 是可换剩余格 L 的一个素滤子, 则 F 是 L 的格素滤子.

证明 首先, 由定理 2.2.5 (2) 及定义 2.2.4 知, 可换剩余格的滤子一定是格滤子. 其次, 如果 $x\vee y\in F$, 由素滤子定义知 $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$. 不妨设

$x \to y \in F$, 由定理 2.2.7(2), $x \vee y \leqslant (x \to y) \to y$, 从而 $(x \to y) \to y \in F$. 应用命题 2.2.1(F4) 得, $y \in F$. 同理, 从 $y \to x \in F$ 出发可得 $x \in F$. 所以 F 是格素滤子.

下例说明可换剩余格的格素滤子未必是素滤子.

例 2.2.3　设 L={0, a, b, c, d, 1}, L 上的序关系如图 2.6 所示, L 上的二元运算 $\otimes$ 规定为 $x \otimes y = x \wedge y$, $\to$ 按表 2.5 的方式定义.

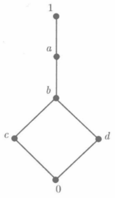
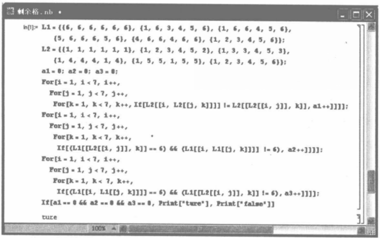


图 2.6　序关系图

表 2.5

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	b	c	d	1
b	0	1	1	c	d	1
c	d	1	1	1	d	1
d	c	1	1	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

可使用图 2.7 所示的 Mathematica 程序验证 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个剩余格.



```
剩余格.nb
In[1]:= L1 = {{6, 6, 6, 6, 6, 6}, {1, 6, 3, 4, 5, 6}, {1, 6, 6, 4, 5, 6},
    {5, 6, 6, 6, 5, 6}, {4, 6, 6, 4, 6, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}};
L2 = {{1, 1, 1, 1, 1, 1}, {1, 2, 3, 4, 5, 2}, {1, 3, 3, 4, 5, 3},
    {1, 4, 4, 4, 1, 4}, {1, 5, 5, 1, 5, 5}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}};
a1 = 0; a2 = 0; a3 = 0;
For[i = 1, i < 7, i++,
  For[j = 1, j < 7, j++,
   For[k = 1, k < 7, k++, If[L2[[i, L2[[j, k]]]] != L2[[L2[[i, j]], k]], a1++]]]];
For[i = 1, i < 7, i++,
  For[j = 1, j < 7, j++,
   For[k = 1, k < 7, k++,
    If[(L1[[L2[[i, j]], k]] == 6) && (L1[[i, L1[[j, k]]]] != 6), a2++]]]];
For[i = 1, i < 7, i++,
  For[j = 1, j < 7, j++,
   For[k = 1, k < 7, k++,
    If[(L1[[i, L1[[j, k]]]] == 6) && (L1[[L2[[i, j]], k]] != 6), a3++]]]];
If[a1 == 0 && a2 == 0 && a3 == 0, Print["ture"], Print["false"]]

ture
```

图 2.7　剩余格的 Mathematica 验证程序

取 F={1, a}, 则 F 是 L 的一个滤子. 容易验证 F 满足: $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ 或 $y \in F$, 但 $c \to d \notin F$ 且 $d \to c \notin F$, 这说明 F 是 L 的一个格素滤子而不是素滤子.

定义 2.2.6　设 L 是一个可换剩余格, $\varnothing \neq X \subseteq L$. 记

$$[X)=\{a\in L|\text{ 存在 } x_1,x_2,\cdots,x_n\in X \text{ 使得 } x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n\leqslant a\},$$

称 $[X)$ 是由 X 生成的滤子. 容易验证, $[X)$ 是包含 X 的最小滤子.

在可换剩余格 L 中, $\forall x\in L$, x^n 可如下递归地定义：$x^0=1$, $x^1=x$, $x^{k+1}=x^k\otimes x$, $k\in\mathbf{N}$.

定理 2.2.10 设 F 是可换剩余格 L 的滤子, $x\in L$, 则

$$[F\cup\{x\})=\{y\in L|\text{ 存在非负整数 } n \text{ 使得 } x^n\to y\in F\}.$$

证明 设 $y\in[F\cup\{x\})$, 则由定义 2.2.6 知, 存在 $x_1,\cdots,x_m\in F\cup\{x\}$, 使得 $x_1\otimes\cdots\otimes x_m\leqslant y$. 由于 $\otimes$ 是交换的和结合的, 故存在非负整数 n 使得

$$x_1\otimes\cdots\otimes x_m=x^n\otimes x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_{m-n}} \text{ 这里 } x_{i_1},\cdots,x_{i_{m-n}} \text{ 且 } n\leqslant m.$$

记 $z=x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_{m-n}}$, 则 $z\in F$(由定义 2.2.4 (F1)). 于是, $x^n\otimes z\leqslant y$(若 $n=0$, 则 $x^n=1$), 进而 $z\leqslant x^n\to y$, 应用定义 2.2.4 (F2) 得 $x^n\to y\in F$. 这说明 $[F\cup\{x\})\subseteq\{y\in L|$ 存在非负整数 n 使得 $x^n\to y\in F\}$.

反之, 假设 $y\in L$, 且存在非负整数 n 使得 $x^n\to y\in F$, 则 $x^n\to y\in F\subseteq[F\cup\{x\})$. 又由 $x\in[F\cup\{x\})$, 应用定义 2.2.4 (F1) 可得 $x^n\in[F\cup\{x\})$. 于是, 应用于命题 2.2.1(F4) 得 $y\in[F\cup\{x\})$. 这说明

$$\{y\in L|\text{ 存在非负整数 } n \text{ 使得 } x^n\to y\in F\}\subseteq[F\cup\{x\}).$$

定义 2.2.7 设 F 是可换剩余格 L 的非空子集, $x\in L$, 规定 $x^{-1}F=\{y\in L|x\vee y\in F\}$.

显然, 如果 F 是可换剩余格 L 的滤子, 则 $(\forall x\in L)1\in x^{-1}F$.

定理 2.2.11 设 F 是可换剩余格 L 的滤子, 则$x^{-1}F$是 L 的滤子, 且$x^{-1}F\supseteq F$.

证明 $1\in x^{-1}F$.

设 $y\in x^{-1}F$, $y\to z\in x^{-1}F$, 则由定义 2.2.7 得 $x\vee y\in F$ 且 $x\vee(y\to z)\in F$. 由于

$$x\leqslant x\vee z\leqslant x\vee y\to x\vee z, \qquad \text{(由定理 2.2.7(1))}$$

$$y\to z\leqslant x\vee y\to x\vee z, \qquad \text{(由定理 2.2.7(3))}$$

故 $x\vee(y\to z)\leqslant x\vee y\to x\vee z$. 应用定义 2.2.4 (F2) 得 $x\vee y\to x\vee z\in F$, 再应用命题 2.2.1(F4) 及 $x\vee y\in F$ 得 $x\vee z\in F$, 即 $z\in x^{-1}F$. 据命题 2.2.1 知 $x^{-1}F$ 是 L 的滤子.

若 $y\in F$, 因为 $y\leqslant x\vee y$, 应用定义 2.2.4 (F2) 得 $x\vee y\in F$, 即 $y\in x^{-1}F$, 所以 $F\subseteq x^{-1}F$.

定理 2.2.12 可换剩余格 L 的滤子 P 是格素滤子当且仅当 $(\forall x\in L\backslash P)$

$$x^{-1}P=P.$$

证明 假设 P 是 L 的格素滤子, 且 $x \in L\backslash P$. 由定理 2.2.11 知 $P \subseteq x^{-1}P$. 设 $y \in x^{-1}P$ 则 $x \vee y \in P$, 因为 P 是格素的且 $x \notin P$, 所以 $y \in P$, 即 $x^{-1}P \subseteq P$. 进而得 $x^{-1}P = P$.

假设滤子 P 满足条件: $(\forall x \in L\backslash P) \quad x^{-1}P = P$. 若 $y \vee z \in P$ 而 $z \notin P$, 由假设 $z^{-1}P = P$ 可得 $y \in z^{-1}P = P$. 这说明 P 是格素的.

定理 2.2.13 设 F 是可换剩余格 L 的一个滤子, 则

$$(\forall x \in L\backslash F)F = x^{-1}F \cap [F \cup \{x\}).$$

证明 显然 $F \subseteq x^{-1}F\cap[F\cup\{x\})$.

设 $y \in x^{-1}F\cap[F\cup\{x\})$, 则 $x \vee y \in F$ 且 $y \in[F\cup\{x\})$. 由定理 2.2.10, 存在非负整数 n 使得 $x^n \to y \in F$. 如果 n=0, 则 y=1$\to y = x^n \to y \in F$. 如果 n >0, 由定理 2.2.1(4) 得

$$x \to (x^{n-1} \to y) = x \otimes x^{n-1} \to y = x^n \to y \in F.$$

于是

$$\begin{aligned} x \to (x^{n-1} \to y) &= [x \to (x^{n-1} \to y)] \wedge 1 \\ &= [x \to (x^{n-1} \to y)] \wedge [(x^{n-1} \to y) \to (x^{n-1} \to y)] \\ &= [x \vee (x^{n-1} \to y)] \to (x^{n-1} \to y). \qquad (\text{由定理 } 2.2.1(7)) \end{aligned}$$

因为 $y \leqslant x^{n-1} \to y$(由定理 2.2.7(1)), 所以 $x \vee y \leqslant x \vee (x^{n-1} \to y)$. 据上述结果, 应用命题 2.2.1(F4) 得 $x^{n-1} \to y \in F$. 继续这个过程可得 $y \in F$, 从而 $x^{-1}F\cap[F\cup\{x\}) \subseteq F$.

定理 2.2.14(格素滤子定理) 设 F 是可换剩余格 L 的滤子, S 是 L 的 $\vee$–闭子集, 且 $F \cap S = \varnothing$, 则存在 L 的格素滤子 P 使得 $F \subseteq P$ 且 $P \cap S = \varnothing$.

证明 由 Zorn 引理知, 在所有包含 F 且与 S 不相交的滤子组成的集簇 Γ 中存在极大元 P(关于集合的包含序). 下面用反证法证明 P 是格素滤子.

如果 P 不是格素滤子, 则由定理 2.2.12 知, 存在 $x \in L\backslash P$ 使得 $x^{-1}P \neq P$. 这样, P 包含在 $x^{-1}P$ 和 $[P\cup\{x\})$ 中. 由 P 的极大性知 $x^{-1}P\cap S \neq \varnothing$ 且 $[P\cup\{x\})\cap S \neq \varnothing$ (否则, $x^{-1}P \in \Gamma$, $[P \cup \{x\}) \in \Gamma$. 这与 P 的极大性矛盾). 设 $y \in x^{-1}P \cap S$, $z \in[P\cup\{x\})\cap S$, 从而由定理 2.2.13 得 $y \vee z \in x^{-1}P\cap[P\cup\{x\})=P$. 又由于 S 是 $\vee$–闭的, 故 $y \vee z \in S$. 这样, $y \vee z \in P \cap S$, 这与 $P \cap S = \varnothing$ 矛盾.

注 2.2.9 上述结论的原始证明可参阅文献 [150]~[152] 的相关内容.

2.3 伪 t–模

本节介绍伪 t–模、左右剩余蕴涵等基本概念, 并首次对 R_0 t–模 (Kleene 算子的一种修正形式) 进行了非可换推广, 引入伪 R_0 t–模, 这是第一个具有伪对合性质的真伪 t–模簇. 本节结果可参阅文献 [153]~[155].

2.3.1　伪 t–模的基本概念

定义 2.3.1[71,76]　二元函数 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 称为伪 t–模, 如果满足:

(pt1) T 是结合的, 即 $\forall x, y, z \in[0, 1]$, $T(x, T(y, z))=T(T(x, y), z)$;

(pt2) T 关于两个变量均是不减的, 即 $\forall x, y, z \in[0, 1]$, $x \leqslant y$ 蕴涵 $T(x, z) \leqslant T(y, z)$, $T(z, x) \leqslant T(z, y)$;

(pt3) 1 是单位元, 即 $\forall x \in[0, 1]$, $T(x, 1)=T(1, x) = x$.

容易知道, 对于任意伪 t–模 T 有 $\forall x \in[0, 1]$, $T(x, 0)=T(0, x)=0$. 另外, 一个伪 t–模是 t–模当且仅当它是可换的, 即 $\forall x, y \in[0, 1]$, $T(x, y) = T(y, x)$. 一个非可换的伪 t–模称为真伪 t–模.

注 2.3.1　我国学者王住登教授等在系列文献 [156]~[158] 中对 t–模进行了另一种有价值的推广, 也称为伪 t–模 (pseudo-t-norm), 其定义与定义 2.3.1 不同 (定义在完备的 Brouwer 格上且不要求交换性和结合性成立).

定义 2.3.2[71]　一个二元函数 T:$[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 称为关于第一个变量左连续 (或称为下半连续), 如果对任意 x_0, $y_0 \in[0, 1]$ 及任意满足下述条件的收敛序列 $\{x_i\}_{i\geqslant 1}$,

$$x_i < x_0, i \geqslant 1; \quad \lim_{i\to\infty} x_i = x_0$$

都有 $\lim\limits_{i\to\infty} T(x_i, y_0) = T(x_0, y_0) = T(\lim\limits_{i\to\infty} x_i, y_0)$. 类似地, 二元函数 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 称为关于第二个变量是左连续 (或下半连续), 如果对任意 x_0, $y_0 \in[0, 1]$ 及任意满足下述条件的收敛序列$\{y_j\}_{j\geqslant 1}$,

$$y_j < y_0, j \geqslant 1; \quad \lim_{j\to\infty} y_j = y_0$$

都有 $\lim\limits_{j\to\infty} T(x_0, y_j) = T(x_0, y_0) = T(x_0, \lim\limits_{j\to\infty} y_j)$.

命题 2.3.1[71]　二元函数 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 关于第一个变量左连续, 当且仅当满足

$$T(\sup_{a\in A} x_a, y) = \sup_{a\in A} T(x_a, y), \quad \forall (x_a)_{a\in A}, y \in [0,1].$$

二元函数 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 关于第二个变量左连续, 当且仅当满足

$$T(x, \sup_{b\in B} y_b) = \sup_{b\in B} T(x, y_b), \quad \forall x, (y_b)_{b\in B} \in [0,1].$$

定理 2.3.1[71]　设 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是伪 t–模, φ_1 是 $[0, 1]$ 上的一个二元函数, 则以下条件等价 ($\forall x, y, z \in[0, 1]$):

(1) (L1′) $y \leqslant z$ 蕴涵 $\varphi_1(x,y) \leqslant \varphi_1(x,z)$,

(L1″) $T(\varphi_1(x,y),x) \leqslant y$,

(L1‴) $y \leqslant \varphi_1(x, T(y, x))$.

(2) $\varphi_1(x, y) = \sup\{z|T(z, x) \leqslant y\}$.

(3) $T(z, x) \leqslant y$ 当且仅当 $z \leqslant \varphi_1(x, y)$.

类似地, 有

定理 2.3.2[71]　设 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是伪 t–模, φ_2 是 $[0, 1]$ 上的一个二元函数, 则以下条件等价 ($\forall x, y, z \in[0, 1]$):

(1) (L2′) $y \leqslant z$ 蕴涵 $\varphi_2(x, y) \leqslant \varphi_2(x, z)$,

(L2″) $T(x, \varphi_2(x, y)) \leqslant y$,

(L2‴) $y \leqslant \varphi_2(x, T(x, y))$.

(2) $\varphi_2(x, y)=\sup\{z|T(x, z) \leqslant y\}$.

(3) $T(x, z) \leqslant y$ 当且仅当 $z \leqslant \varphi_2(x, y)$.

对于给定的伪 t–模, 依据上述定理 2.3.1 及定理 2.3.2, 可以有 3 种方式来定义 “剩余”, 即下面的定义可以有另外两种表现形式.

定义 2.3.3[71]　设 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是伪 t–模, $[0, 1]$ 上的二元函数 φ_1 称为是与 T 相伴的关于第一个变量的剩余, 如果以下条件成立 ($\forall x, y, z \in[0,1]$):

(L1′) $y \leqslant z$ 蕴涵 $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_1(x, z)$,

(L1″) $T(\varphi_1(x, y),x) \leqslant y$,

(L1‴) $y \leqslant \varphi_1(x, T(y, x))$.

类似地, $[0, 1]$ 上的二元函数 φ_2 称为是与 T 相伴的关于第二个变量的剩余, 如果以下条件成立 ($\forall x, y, z \in[0,1]$):

(L2′) $y \leqslant z$ 蕴涵 $\varphi_2(x, y) \leqslant\varphi_2(x, z)$,

(L2″) $T(x, \varphi_2(x, y))\leqslant y$,

(L2‴) $y \leqslant\varphi_2(x,T(x, y))$.

为了行文方便, 以下将 “与伪 t–模 T 相伴的关于第一、二个变量的剩余”, 分别简称为 1 剩余、2 剩余. 容易知道, 当伪 t–模是可换的 (即 t–模), 1 剩余与 2 剩余一致.

命题 2.3.2[71]　如果 T:$[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是伪 t–模, 那么存在与 T 相伴 1 剩余的充要条件是 T 关于第一个变量左连续, 存在与 T 相伴 2 剩余的充要条件是 T 关于第二个变量左连续.

定理 2.3.3[71]　如果伪 t–模 T: $[0, 1]\times[0, 1]\to[0, 1]$ 是连续的, 则 T 是可换的 (即是 t–模). 从而, 真伪 t–模一定不连续.

定理 2.3.4[71]　设 T 是关于第一、二变量均左连续的伪 t–模, φ_1 和 φ_2 分别是与 T 相伴的 1 剩余和 2 剩余, 则代数结构 ($[0,1]$; $\vee$, $\wedge$, T, φ_1, φ_2, 0, 1) 具有以下性质 ($\forall x, y, z \in[0, 1]$):

(C1) ($[0, 1]$; $\vee$, $\wedge$, 0, 1) 是有界格;

(C2) ([0, 1]; T, 1) 是独异点 (含单位元 1 的半群);

(C3) $T(x, y) \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant \varphi_1(y, z)$ 当且仅当 $y \leqslant \varphi_2(x, z)$;

(C4) $T(\varphi_1(x, y), x) \leqslant x \wedge y$, $T(x, \varphi_2(x, y)) \leqslant x \wedge y$;

(C5) $\varphi_1(x, y) \vee \varphi_1(y, x) = 1 = \varphi_2(x, y) \vee \varphi_2(y, x)$.

以下将与伪 t–模 T 相伴的 1 剩余 φ_1 和 2 剩余 φ_2, 分别表示为 $\to$ 和 $\rightsquigarrow$, 并分别称为 1 剩余蕴涵和 2 剩余蕴涵.

关于真伪 t–模, 文献中已有一些例子, 如文献 [71] 中给出如下例子 (可看成是 Gödel t–模的非可换扩展):

$$T(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in [0,a_1],\ y \in [0,b_1], \\ \min\{x,y\}, & \text{其他}, \end{cases} \qquad 0 < a_1 < b_1 < 1.$$

$$x \to y = \begin{cases} \max\{a_1, y\}, & x \leqslant b_1, x > y, \\ y, & x > b_1, x > y, \\ 1, & x \leqslant y. \end{cases} \qquad x \rightsquigarrow y = \begin{cases} b_1, & x \leqslant a_1, x > y, \\ y, & x > a_1, x > y, \\ 1, & x \leqslant y. \end{cases}$$

2.3.2 伪 R_0 t–模

对于著名的 R_0 t–模, 至今未见到非可换推广, 本节的目的就是完成这一任务. 这里首先给出几个预备定理.

定理 2.3.5 设 f_1 和 f_2 是 [0, 1] 上严格递增连续函数, 且 $f_1(1)=f_2(1)=1, f_1(0)=f_2(0)=0$. 规定

$$T(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, & f_1(x) + f_2(y) > 1, \\ 0, & f_1(x) + f_2(y) \leqslant 1, \end{cases}$$

则 $T(x, y)$ 是一个伪 t–模, 这里 $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

证明 (1) 首先证明 T 满足结合律 (pt1). 对于任意 $x, y, z \in [0, 1]$, 分以下 3 种情况讨论:

情形一 $f_1(x) + f_2(y) > 1$, $f_1(y) + f_2(z) > 1$, $f_1(x) + f_2(z) > 1$: 此时有

$$T(T(x,y),z) = T(x \wedge y, z), \quad T(x, T(y,z)) = T(x, y \wedge z).$$

如果 $x \leqslant y, z \leqslant y$, 则 $T(x \wedge y, z) = T(x, y \wedge z) = x \wedge z$.

如果 $x \leqslant y, y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$, 且 $T(T(x, y), z) = T(x \wedge y, z) = T(x, z) = x \wedge z = x$, $T(x, T(y, z)) = T(x, y \wedge z) = T(x, y) = x \wedge y = x$, 即得 $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$.

如果 $x > y, z \leqslant y$, 则 $x > z$, 且 $T(T(x, y), z) = T(x\wedge y, z) = T(y, z) = y\wedge z = z$, $T(x, T(y, z))$=$T(x, y \wedge z) = T(x, z) = x \wedge z = z$. 于是 $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$.

如果 $x > y, y < z$, 则 $T(T(x, y), z) = T(x \wedge y, z) = T(y, z) = y \wedge z = y$, $T(x, T(y, z))$=$T(x, y \wedge z) = T(x, y) = x \wedge y = y$, 即 $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$.

情形二　$f_1(x) + f_2(y) \leqslant 1$ 或 $f_1(y) + f_2(z) \leqslant 1$: 以 $f_1(x) + f_2(y) \leqslant 1$ 为例, 此时有 $T(x, y) = 0$, 且 $T(T(x, y), z) = T(0, z)=0$, $T(x, T(y, z)) \leqslant T(x, y)=0$. 于是, $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))=0$.

情形三　$f_1(x) + f_2(z) \leqslant 1$: 此时有 $T(x, z)=0$. 因为 $T(x, y) \leqslant x$, 所以 $T(T(x, y), z) \leqslant T(x, z)=0$, $T(T(x, y), z)=0$. 又 $T(x, T(y, z)) \leqslant T(x, z)=0$, 即 $T(x, T(y, z))=0$. 从而, $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))=0$.

综上所述, T 满足结合律.

(2) 现在证明 T 满足 (pt2), 令 $x \leqslant y$, $z \in[0, 1]$.

如果 $f_1(x) + f_2(z) > 1$, 则 $T(x, z) = x \wedge z$. 因 f_1 是递增的, 故由 $x \leqslant y$ 可得 $f_1(x) \leqslant f_1(y)$. 于是 $f_1(y) + f_2(z) \geqslant f_1(x) + f_2(z) > 1$. 从而, $T(y, z) = y \wedge z \geqslant x \wedge z = T(x, z)$.

如果 $f_1(x) + f_2(z) \leqslant 1$, 则 $T(x, z)=0$. 从 $x \leqslant y$ 可得 $f_1(x) \leqslant f_1(y)$. 故 $f_1(y) + f_2(z) \geqslant f_1(x) + f_2(z) \leqslant 1$. 此时验证如下两种情形: 当 $f_1(y) + f_2(z) \leqslant 1$ 时, $T(y, z)=0=T(x, z)$; 当 $f_1(y) + f_2(z) > 1$ 时, $T(y, z) = y \wedge z \geqslant 0 = T(x, z)$. 总之, $T(x, z) \leqslant T(y, z)$.

类似地, 有 $x \leqslant y \Rightarrow T(z, y) \geqslant T(z, x)$. 这说明 (pt2) 成立.

(3) 最后证明 (pt3) 成立. 对任意 $x \in[0,1]$, 如果 $x=0$, 则 $f_1(0)+f_2(1)=f_1(1)+f_2(0)=1$, $T(0,1)=T(1, 0)=0=x$; 如果 $x \neq 0$, 则 $f_1(x) + f_2(1) > 1$, $f_1(1)+f_2(x) > 1$, $T(x,1)=T(1,x) = x\wedge 1=x$. 所以 T 满足 (pt3).

根据定义 2.3.1 知, $T(x, y)$ 是一个伪 t–模.

以后称定理 2.3.5 所给出的伪 t–模为伪 R_0 t–模.

注 2.3.2　(1) 容易证明, 伪 R_0 t–模关于两个变量都是左连续的. (2) 如果伪 R_0 t–模中的函数 f_1 和 f_2 均取为恒等函数 (即 $\forall x \in[0, 1]$, $f_1(x) = f_2(x) = x$), 则此时伪 R_0 t–模就是 R_0 t–模; 而当函数 f_1 和 f_2 是两个不同二元函数时 (即存在 $x_0 \in[0,1]$, $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$), 伪 R_0 t–模是真伪 t–模.

定理 2.3.6　设 T 是伪 R_0 t–模, 则与 T 相伴的 1 剩余蕴涵和 2 剩余蕴涵分别为

$$x \to y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y \vee f_1^{-1}(1 - f_2(x)), & x > y. \end{cases}$$

$$x \rightsquigarrow y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y \vee f_2^{-1}(1 - f_1(x)), & x > y. \end{cases}$$

证明 对任意 $x, y \in [0, 1]$, 根据定理 2.3.1, $x \to y = \sup\{z \in [0, 1] \mid T(z, x) \leqslant y\}$.

如果 $x \leqslant y$, 则对任意 $z \in [0, 1]$, $T(z, x) \leqslant x \leqslant y$, 故 $x \to y = \sup\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\} = 1$.

如果 $x > y$, 则 (因 f_1, f_2 严格递增, 故反函数 f_1^{-1}, f_2^{-1} 存在)

$$\begin{aligned} x \to y &= \sup\{z \in [0,1] | T(z,x) \leqslant y\} \\ &= \sup\{\{z \in [0,1] | T(z,x) \leqslant y, f_1(z) + f_2(x) > 1\} \\ &\qquad \cup \{z \in [0,1] | T(z,x) \leqslant y, f_1(z) + f_2(x) \leqslant 1\}\} \\ &= \sup\{\{z \in [0,1] | z \wedge x \leqslant y, f_1(z) > 1 - f_2(x)\} \\ &\qquad \cup \{z \in [0,1] | 0 \leqslant y, f_1(z) \leqslant 1 - f_2(x)\}\} \\ &= \sup\{\{z \in [0,1] | z \leqslant y, z > f_1^{-1}(1 - f_2(x))\} \\ &\qquad \cup \{z \in [0,1] | z \leqslant f_1^{-1}(1 - f_2(x))\}\} \\ &= y \vee f_1^{-1}(1 - f_2(x)). \end{aligned}$$

所以, 与伪 R_0 t–模 T 相伴的 1 剩余蕴涵为

$$x \to y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y \vee f_1^{-1}(1 - f_2(x)), & x > y. \end{cases}$$

同理可证 2 剩余蕴涵表达式成立.

容易验证, 对于伪 R_0 t–模成立:

$$(x \to 0) \rightsquigarrow 0 = x = (x \rightsquigarrow 0) \to 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

称具有此性质的伪 t–模是伪对合的.

例 2.3.1 图 2.8 给出两个伪 R_0 t–模的例子 T_{I} 及 T_{II}, 与之对应的函数 f_1 和 f_2 分别取为

$$T_{\mathrm{I}}: f_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad f_2(y) = y;$$

$$T_{\mathrm{II}}: f_1(x) = x^2, \quad f_2(y) = y^5.$$

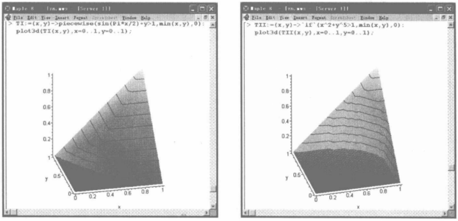


图 2.8　伪 R_0 t–模 $T_{\rm I}$ 及 $T_{\rm II}$

2.4　剩　余　格

与可换剩余格类似, 剩余格的定义在不同文献中是不同的. 为了避免混淆, 本书使用 "格序剩余幺半群"、"整格序剩余幺半群"、"剩余格" 等不同术语区别它们. 之所以把剩余格的内容放在伪 t–模之后, 其原因是明显的, 即从伪 t–模出发很容易得到全序剩余格的实例.

2.4.1　格序剩余幺半群

定义 2.4.1[141,143]　序代数结构 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, e)$ 称为是格序剩余幺半群 (或剩余格序幺半群), 如果:

(1) $(L; \wedge, \vee)$ 是格, 其序关系为 $\leqslant$;

(2) $(L; \otimes, e)$ 是幺半群, 其中 e 为单位元;

(3) 对任意 $x, y, z \in L$, $x \otimes y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \to z \Leftrightarrow y \leqslant x \rightsquigarrow z$.

一个格序剩余幺半群称为是整的 (integral), 如果对任意 $x \in L$, $x \leqslant e$. 此时, 习惯上记 e 为 1.

注 2.4.1　(1) 显然, 运算 $\otimes$ 具有交换性当且仅当 $\to$ 与 $\rightsquigarrow$ 相同, 此时即为可换格序剩余幺半群.

(2) 定义 2.4.1 中的条件 (3) 在文献 [141], [143] 中写成如下形式:

$$x \otimes y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant z/y \Leftrightarrow y \leqslant x\backslash z,$$

即用符号 /, \ 表示 $\to$, $\rightsquigarrow$, 且 $z/y = y \to z$, $x\backslash z = x \rightsquigarrow z$. 这与本书定义 1.4.4 中剩余半群的表示法一致. 本书主要是从逻辑角度研究这些代数结构的, 因此剩余格选

用了逻辑蕴涵符号.

(3) 格序剩余幺半群未必有零元 (指最小元). 按文献 [142] 的说法, 有最小元 0 的格序剩余幺半群又称为 FL–代数 (full Lambek algebra), 有最小元 0 的整格序剩余幺半群又称为 FL_w–代数.

定理 2.4.1[141,143] 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, e)$ 是格序剩余幺半群, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $e \to x = x = e \rightsquigarrow x$(若 L 是整的, 则有 $1\to x = x = 1\rightsquigarrow x$);

(2) $e \leqslant x \to x$, $e \leqslant x \rightsquigarrow x$(若 L 是整的, 则有 $x \to x=1= x \rightsquigarrow x$);

(3) $x \leqslant y \Leftrightarrow e \leqslant x \to y \Leftrightarrow e \leqslant x \rightsquigarrow y$(若 L 是整的, 则有 $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y=1\Leftrightarrow x \rightsquigarrow y=1$);

(4) $(x \to y) \otimes x \leqslant y$, $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant y$;

(5) $x \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$, $x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$;

(6) $x \to (y \to z)=(x \otimes y) \to z$, $x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z)=(y \otimes x) \rightsquigarrow z$;

(7) $x \to (y \rightsquigarrow z) = y \rightsquigarrow (x \to z)$;

(8) $x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (z \otimes x) \rightsquigarrow (z \otimes y)$;

(9) $x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (z \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow y)$;

(10) $x \to y \leqslant (y \to z) \rightsquigarrow (x \to z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (y \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z)$;

(11) $x \otimes (y \vee z)=(x \otimes y) \vee (x \otimes z)$, $(y \vee z) \otimes x=(y \otimes x) \vee (z \otimes x)$; 当 $\vee Y$ 存在时 (这里 $Y \subseteq L$) 有 $x \otimes (\vee Y) = \vee\{x \otimes y|y \in Y\}$, $(\vee Y) \otimes x = \vee\{y \otimes x|y \in Y\}$;

(12) $x \to (y \wedge z)=(x \to y) \wedge (x \to z)$, $x \rightsquigarrow (y \wedge z)=(x \rightsquigarrow y) \wedge (x \rightsquigarrow z)$; 当 $\wedge Y$ 存在时 (这里 $Y \subseteq L$) 有 $x \to (\wedge Y) = \wedge\{x \to y|y \in Y\}$, $x \rightsquigarrow (\wedge Y) = \wedge\{x \rightsquigarrow y|y \in Y\}$;

(13) $(x \vee y) \to z=(x \to z) \wedge (y \to z)$; $(x \vee y) \rightsquigarrow z=(x \rightsquigarrow z) \wedge (y \rightsquigarrow z)$; 当 $\vee Y$ 存在时 (这里 $Y \subseteq L$) 有 $(\vee Y) \to x = \wedge\{y \to x|y \in Y\}$, $(\vee Y) \rightsquigarrow x = \wedge\{y \rightsquigarrow x|y \in Y\}$;

(14) 如果 L 有最小元 0, 则 L 也有最大元 1(注意, 1 未必是 e), 且 $x\otimes0=0\otimes x =0$, $0\to x=0\rightsquigarrow x=1$, $x \to1=x \rightsquigarrow1=1$.

注 2.4.2 上述性质 (3) 在文献 [141], [143] 中并未直接列出, 但很容易验证.

定理 2.4.2 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, e)$ 是格序剩余幺半群, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $x \leqslant y \to (x \otimes y)$, $y \leqslant x \rightsquigarrow (x \otimes y)$;

(2) $x \leqslant y \Rightarrow x \otimes z \leqslant y \otimes z$, $x \leqslant y \Rightarrow z \otimes x \leqslant z \otimes y$.

证明 (1) 由定理 2.4.1 (6) 得 $x \to[y \to (x \otimes y)]=(x \otimes y) \to (x \otimes y)$, 再由定理 2.4.1 (2) 得 $e \leqslant (x \otimes y) \to (x \otimes y) = x \to[y \to (x \otimes y)]$, 由此应用定理 2.4.1(3) 得 $x \leqslant y \to (x \otimes y)$. 同理可证 $y \leqslant x \rightsquigarrow (x \otimes y)$.

(2) 设 $x \leqslant y$, 则 $y = x\vee y$. 而由定理 2.4.1 (11) 得 $(x\vee y)\otimes z=(x\otimes z)\vee(y\otimes z)$, 从而 $y\otimes z = (x\vee y)\otimes z=(x\otimes z)\vee(y\otimes z)$, 即 $x\otimes z \leqslant y\otimes z$. 类似可证 $x \leqslant y \Rightarrow z\otimes x \leqslant z\otimes y$.

注 2.4.3 上述性质 (2) 表明格序剩余幺半群中运算 $\otimes$ 保序 (即序 $\leqslant$ 与运算 $\otimes$ 相容), 因而按定义 1.4.4 知任意格序剩余幺半群确实是 "剩余半群".

定理 2.4.3[141,143] 所有格序剩余幺半群构成的类是一个簇.

定义 2.4.2[143] 设 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,e)$ 是格序剩余幺半群. 对任意 $a,b\in L$ 定义

$$[a,b]_r=(b\otimes a\to a\otimes b)\wedge e,\quad [a,b]_l=(b\otimes a\rightsquigarrow a\otimes b)\wedge e.$$

分别称 $[a,b]_r$, $[a,b]_l$ 为 a 与 b 的右、左换位子 (right, left commutators). 称 L 的子集 X 关于换位子封闭 (closed with respect to commutators), 如果任意 $a\in L, x\in X$ 均有 $[a,x]_r$, $[x,a]_l\in X$.

定义 2.4.3[143] 设 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,e)$ 是格序剩余幺半群, $X\subseteq L$. 称 X 是凸的, 如果对任意 $a\in L$, $x, y\in X$, $x\leqslant a\leqslant y\Rightarrow a\in X$. 称 L 的一个凸子代数 (convex subalgebra). H 是正规的 (normal), 如果 H 关于换位子封闭.

注 2.4.4 关于正规凸子代数的上述定义, 实际上是文献 [143] 中的充要条件 (见该文中的 Lemma 4.6).

定理 2.4.4[143] 设 H 是格序剩余幺半群 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,e)$ 的正规凸子代数, 则 $(\forall a,b\in L)\ (a\to b)\wedge e\in H\Leftrightarrow (a\rightsquigarrow b)\wedge e\in H$.

定理 2.4.5[143] 设 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,e)$ 是格序剩余幺半群, 则

(1) 设 H 是 L 的正规凸子代数, 令

$$\begin{aligned}\theta_H&=\{(a,b)\in L\times L|\text{存在 } h\in H \text{ 使得 } h\otimes a\leqslant b \text{ 且 } h\otimes b\leqslant a\}\\&=\{(a,b)\in L\times L|(a\to b)\wedge e\in H \text{ 且 } (b\to a)\wedge e\in H\}\\&=\{(a,b)\in L\times L|(a\rightsquigarrow b)\wedge e\in H \text{ 且 } (b\rightsquigarrow a)\wedge e\in H\},\end{aligned}$$

则 θ_H 是 L 上的同余关系;

(2) 设 θ 是 L 上的同余关系, 令 $H_\theta=[e]_\theta=\{a\in L|a\theta e\}$(即 e 所在的 θ 等价类), 则 H_θ 是 L 的正规凸子代数.

2.4.2 剩余格及其滤子

定义 2.4.4 有界且整的格序剩余幺半群称为剩余格, 即序代数结构 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 称为是剩余格 (residuated lattice), 如果:

(1) $(L;\wedge,\vee,0,1)$ 是有界格, 其序关系为 $\leqslant$, 0、1 分别为最小元和最大元;

(2) $(L;\otimes,1)$ 是幺半群, 1 为单位元;

(3) 对任意 $x,y,z\in L$, $x\otimes y\leqslant z\Leftrightarrow x\leqslant y\to z\Leftrightarrow y\leqslant x\rightsquigarrow z$.

注 2.4.5 (1) 按文献 [142] 的说法, 剩余格也就是 FL_w-代数.

(2) 由定理 2.3.4 知, 对任意左连续伪 t–模 T, $([0,1];\wedge,\vee,T,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 是剩余格, 其中, $\to$, $\rightsquigarrow$ 分别是与 T 的相伴的 1 剩余和 2 剩余.

根据以上定义和结论, 2.3 节所述的格序剩余幺半群的所有性质在剩余格中均成立. 下面给出剩余格的一些新性质.

定理 2.4.6 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格, 则 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $x \leqslant y \to x$, $x \leqslant y \rightsquigarrow x$;

(2) $x \vee y \leqslant [(x \to y) \rightsquigarrow y] \wedge [(y \to x) \rightsquigarrow x]$, $x \vee y \leqslant [(x \rightsquigarrow y) \to y] \wedge [(y \rightsquigarrow x) \to x]$;

(3) $x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (x \vee z) \rightsquigarrow (y \vee z)$;

(4) $x \otimes (y \wedge z) \leqslant (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$, $(y \wedge z) \otimes x \leqslant (y \otimes x) \wedge (z \otimes x)$;

(5) $x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (x \wedge z) \rightsquigarrow (y \wedge z)$;

(6) $x \otimes y \leqslant x \wedge y$;

(7) $(x \to y) \otimes x \leqslant x \wedge y$, $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x \wedge y$.

证明 (1) 由定理 2.4.1(7), (1), (14) 得

$$x \rightsquigarrow (y \to x) = y \to (x \rightsquigarrow x) = y \to 1 = 1.$$

再应用定理 2.4.1(3) 即得 $x \leqslant y \to x$. 同理可证 $x \leqslant y \rightsquigarrow x$.

(2) 由定理 2.4.1 (4) 得 $(x \to y) \otimes x \leqslant y$, 于是 $x \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$. 又, 由 (1) 得 $y \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$, 所以 $x \vee y \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$. 类似地, $x \vee y \leqslant (y \to x) \rightsquigarrow x$. 于是 $x \vee y \leqslant [(x \to y) \rightsquigarrow y] \wedge [(y \to x) \rightsquigarrow x]$. 另一个不等式可同法证明.

(3) 由 (1) 得 $z \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow z$, 于是 $(x \to y) \otimes z \leqslant z$. 又据定理 2.4.1 (4) 得 $(x \to y) \otimes x \leqslant y$. 从而, $[(x \to y) \otimes x] \vee [(x \to y) \otimes z] \leqslant y \vee z$. 应用定理 2.4.1(11) 得

$$[(x \to y) \otimes x] \vee [(x \to y) \otimes z] = (x \to y) \otimes (x \vee z).$$

于是 $(x \to y) \otimes (x \vee z) \leqslant y \vee z$, 进而得 $x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z)$. 同理可证另一个不等式成立.

(4) 由 $y \wedge z \leqslant y$, 应用定理 2.4.2(2) 得 $x \otimes (y \wedge z) \leqslant x \otimes y$. 同理可证 $x \otimes (y \wedge z) \leqslant x \otimes z$. 于是, $x \otimes (y \wedge z) \leqslant (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$. 另一个不等式可同法证明.

(5) 由 (1) 得 $z \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow z$, 于是 $(x \to y) \otimes z \leqslant z$. 又据定理 2.4.1 (4) 得 $(x \to y) \otimes x \leqslant y$. 从而, $[(x \to y) \otimes x] \wedge [(x \to y) \otimes z] \leqslant y \wedge z$. 应用刚证明的 (4) 有

$$(x \to y) \otimes (x \wedge z) \leqslant [(x \to y) \otimes x] \wedge [(x \to y) \otimes z].$$

于是 $(x \to y) \otimes (x \wedge z) \leqslant y \wedge z$, 进而 $x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z)$. 同理可证另一个不等式成立.

(6) 由 $y \leqslant 1$, 应用定理 2.4.2 (2) 得 $x \otimes y \leqslant x \otimes 1 = x$. 类似地, $x \otimes y \leqslant 1 \otimes y = y$. 于是, $x \otimes y \leqslant x \wedge y$.

(7) 由定理 2.4.1 (12) 有 $x \to (x \wedge y)=(x \to x) \wedge (x \to y)=1\wedge(x \to y)=(x \to y)$, 从而 $x \to y \leqslant x \to (x \wedge y)$. 由定义 2.4.4 (3) 即得 $(x \to y) \otimes x \leqslant x \wedge y$. 同理可证 $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x \wedge y$.

与定理 2.4.1 (11) 不同, 定理 2.2.6 (4) 中的不等式在剩余格中不能改为等式.

同可换剩余格的滤子类似, 可如下定义剩余格的滤子.

定义 2.4.5　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格, F 是 L 的非空子集, F 称为是 L 的一个滤子, 如果

(F1) $a \in F, b \in F \Rightarrow a \otimes b \in F$;

(F2) $a \in F, a \leqslant b \Rightarrow b \in F$.

注 2.4.6　若 F 是剩余格 L 的滤子, 由于 F 非空, 故由 (F2) 知 $1\in F$.

类似于命题 2.2.1, 可得剩余格滤子的如下充要条件.

命题 2.4.1　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格, $F \subseteq L$, 则 F 是 L 的滤子当且仅当满足以下条件之一:

(F3) $1\in F$; 且 $\forall x, y \in L, (x \in F, x \to y \in F) \Rightarrow y \in F$.

(F4) $1\in F$; 且 $\forall x, y \in L, (x \in F, x \rightsquigarrow y \in F) \Rightarrow y \in F$.

定义 2.4.6　设 F 是剩余格 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 的是一个滤子, 称 F 是正规的, 如果

(F5) $\forall x, y \in L, x \to y \in F \Leftrightarrow x \rightsquigarrow y \in F$.

定理 2.4.7　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格, F 是 L 的非空子集, 则 F 是 L 的正规滤子当且仅当 F 是格序剩余幺半群 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的正规凸子代数.

证明　由定义 2.4.3 及定理 2.4.4 易知: 剩余格中正规凸子代数必是正规滤子.

现设 F 是 L 的正规滤子, 由 (F2) 易知 F 是 L 的凸子集, 即 $(\forall a, b \in F, a \leqslant b, c \in L)a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in F$. 下证 F 是 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的子代数.

由 (F1) 知 F 对运算 $\otimes$ 是封闭的.

若 $x, y \in F$, 由 (F1) 得 $x \otimes y \in F$, 应用定理 2.4.6 (6) 知 $x \otimes y \leqslant x \wedge y$, 据 (F2) 得 $x \wedge y \in F$, 即 F 对运算 $\wedge$ 封闭.

若 $x, y \in F$, 由 $x \leqslant x \vee y$, 应用 (F2) 得 $x \vee y \in F$, 即 F 对运算 $\vee$ 封闭.

若 $x, y \in F$, 由 $y \leqslant x \to y$, 应用 (F2) 得 $x \to y \in F$, 即 F 对运算 $\to$ 封闭.

若 $x, y \in F$, 由 $y \leqslant x \rightsquigarrow y$, 应用 (F2) 得 $x \rightsquigarrow y \in F$, 即 F 对运算 $\rightsquigarrow$ 封闭.

又 $1\in F$. 所以 F 是 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的凸子代数.

最后证明 F 是正规凸子代数, 依据定义 2.4.2, 需要证明对任意 $a \in L$, $x \in F$

均有 $[a, x]_r$, $[x, a]_l \in F$. 由于

$$\begin{aligned}(x \otimes a) \otimes x &= x \otimes (a \otimes x) && \text{(由 } \otimes \text{ 的结合性)}\\ &\leqslant 1 \otimes (a \otimes x) && \text{(由定理 2.4.2 (2))}\\ &= a \otimes x, && \text{(由 1 的单位性)}\end{aligned}$$

即 $(x \otimes a) \otimes x \leqslant a \otimes x$, 应用定义 2.4.4 (3) 得 $x \leqslant (x \otimes a) \rightsquigarrow (a \otimes x)$. 据 $x \in F$, 并应用 (F2) 得 $(x \otimes a) \rightsquigarrow (a \otimes x) \in F$. 由于 F 是正规滤子, 所以 $(x \otimes a) \to (a \otimes x) \in F$, 即 $[a, x]_r \in F$. 同理可证 $[x, a]_l \in F$. 这说明 F 是正规凸子代数.

由定理 2.4.7 及定理 2.4.5, 并应用泛代数知识 (定理 1.4.8 及定理 1.4.9), 可证剩余格的下述商结构定理:

定理 2.4.8 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格, F 是 L 的一个正规滤子, 则

(1) $\sim_F$ 是 L 上的 $(\otimes, \wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow)$– 型同余关系, 这里 $\sim_F$ 定义为
$\forall a, b \in L, a \sim_F b \Leftrightarrow (a \to b \in F, b \to a \in F) \Leftrightarrow (a \rightsquigarrow b \in F, b \rightsquigarrow a \in F)$.

(2) $(L/\sim_F; \otimes, \wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow, [0], [1])$ 也是一个剩余格, 其中 $L/\sim_F$ 为商集, $L/\sim_F$ 上的运算 $\otimes, \wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow$ 是 L 上相应运算的自然拓展 (见定义 1.4.11), $L/\sim_F$ 上的序关系定义为 $\forall a, b \in L$, $[a] \leqslant [b]$ 当且仅当 $a \to b \in F$ 当且仅当 $a \rightsquigarrow b \in F$.

习 题 2

1. 给出命题 2.1.1、命题 2.1.4、命题 2.1.11 的证明.

2. 查阅文献, 了解半群的 “序数和”(ordinal sum) 概念, 并系统总结国内外关于 “序数和 t–模”(ordinal sum t-norm) 的研究成果.

3. 系统整理可换剩余格的性质, 然后仅从定义出发, 给出这些性质的详细证明 (必要时更改这些性质的排列次序).

4. 从代数角度重新论述 [156], [157] 等文献中另一类伪 t–模, 能否进一步拓广这些结果?

5. 运用伪 R_0 t–模的构造方法, 能否将下述 t–模进行非可换推广?

$$T(x,y) = \begin{cases} 0, & x + y \leqslant a, \\ \min\{x, y\}, & \text{其他}, \end{cases} \quad a \in (0,1).$$

6. 仅从定义出发, 给出剩余格所有基本性质的详细证明.

7. 对于可换剩余格, 2.2.3 节证明了格素滤子定理. 试研究一般剩余格中的生成滤子及格素滤子, 相应的格素滤子定理是否成立 (证明或举反例)? 进一步研究正规格素滤子 (即满足 2.4 节中条件 (F5) 的格素滤子) 的类似问题.

8. 讨论 p– 代数 (见定义 1.3.6) 与剩余格之间的关系.

第 3 章　可换模糊逻辑系统 BL 与 $\mathscr{L}^*$

3.1　基本模糊逻辑系统BL

3.1.1　基本定义和结论

基本逻辑系统 **BL**(basic logic) 由 Hájek 提出 (参见文献 [22], [159], [160]), 已被证明是所有连续 t- 模基逻辑的公共完备公理化系统 (参见文献 [161], [162]).

定义 3.1.1[22]　对于给定的连续 t- 模$*$, 命题演算系统 $PC(*)$ 具有命题变元 $p_1, p_2, \cdots$, 联结词&, $\rightarrow$ 和真值常量 $\bar{0}$. 公式 (formula) 如下定义：每一个命题变元是公式; $\bar{0}$ 是公式; 如果φ, ψ是公式, 则$\varphi\&\psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ 是公式. 其他联结词定义如下：

$\varphi \wedge \psi$ 即是 $\varphi\&(\varphi \rightarrow \psi)$,

$\varphi \vee \psi$ 即是 $((\varphi \rightarrow \psi)\rightarrow \psi)\wedge((\psi \rightarrow \varphi)\rightarrow \varphi)$,

$\neg\varphi$ 即是 $\varphi \rightarrow \bar{0}$,

$\varphi \equiv \psi$ 即是 $(\varphi \rightarrow \psi)\&(\psi \rightarrow \varphi)$.

一个命题变元的赋值 (evaluation) 是一个作用于每个命题变元 p 的映射 e, $e(p) \in[0, 1]$. e 可如下唯一扩展到所有公式：

$$e(\bar{0}) = 0, \quad e(\varphi \rightarrow \psi) = e(\varphi) \Rightarrow e(\psi), \quad e(\varphi\&\psi) = e(\varphi) * e(\psi).$$

这里 $\Rightarrow$ 是与 t- 模$*$相伴的蕴涵算子 (以后用 $\rightarrow$ 表示 $\Rightarrow$).

命题 3.1.1[22]　对任意的公式 φ, ψ 及赋值 e 有

$$e(\varphi \wedge \psi) = \min\{e(\varphi), e(\psi)\}, \quad e(\varphi \vee \psi) = \max\{e(\varphi), e(\psi)\}.$$

定义 3.1.2[22]　公式 φ 称为是 $PC(*)$ 的 1-重言式, 如果对任意的赋值 e 有 $e(\varphi)$=1.

Hájek 提出的如下形式系统 **BL** 对近年模糊逻辑的发展起着重要作用, 其中 **BL** 是英文 basic logic 的缩写, 意指 "基于连续 t- 模的命题演算系统的公共基础", 文献 [22] 中的原文如下："we are going to choose some formulars that are 1-tautologies of every $PC(*)$ (for any continuous t-norm) for our axioms and develop a logic that is a common base of all the logics $PC(*)$."

定义 3.1.3[22]　以下公式是基本逻辑系统 **BL** 的公理：

(A1) $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow((\psi\rightarrow\chi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$;

(A2) $(\varphi\&\psi)\to\varphi$;

(A3) $(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$;

(A4) $(\varphi\&(\varphi\to\psi))\to(\psi\&(\psi\to\varphi))$;

(A5a) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\&\psi)\to\chi)$;

(A5b) $((\varphi\&\psi)\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$;

(A6) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$;

(A7) $\overline{0}\to\varphi$.

BL 系统的推理规则是 MP 规则, 即由 φ 及 $\varphi\to\psi$ 推得 ψ.

注 3.1.1 可以像定义 1.5.8 那样定义形式系统 **BL** 中的 "证明"、"定理" 等概念. 若公式 φ 是 **BL** 中的定理, 则记为 **BL**$\vdash\varphi$, 也常简记为 $\vdash\varphi$, 并称 φ 在 **BL** 中是可证的 (provable).

文献 [163] 指出, 上述定义中的公理 (A3) 是多余的, 即可由其他公理推出.

命题 3.1.2[163] 设 **BL**$^-$ 是 **BL** 去掉公理 (A3) 后的形式系统, 则以下公式是系统 **BL**$^-$ 中的定理:

(1) $\varphi\to((\varphi\to\psi)\to\psi)$;

(2) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$;

(3) $\varphi\to\varphi$;

(4) $(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$.

证明 (1) 由 (A4), (A2) 得 $\varphi\&(\varphi\to\psi)\to\psi$, 再应用 (A5b) 及 MP 规则即得. 注意, 这里实际使用了 HS 规则 (即三段论规则), 而这可从 (A1) 出发两次应用 MP 规则推出 (文献 [163] 未指出这一事实).

(2) 由 (A1) 得 $(\psi\to((\psi\to\chi)\to\chi))\to((((\psi\to\chi)\to\chi)\to(\varphi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi)))$. 应用 (1) 及 MP 规则得 $(((\psi\to\chi)\to\chi)\to(\varphi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$. 又应用 (A1) 得 $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(((\psi\to\chi)\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$. 所以 $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$.

(3) 由 (A2) 及 (A5b) 得 $\varphi\to(\psi\to\varphi)$, 再应用 (2) 及 MP 规则得 $\psi\to(\varphi\to\varphi)$. 取 ψ 为任意定理即可得 (3).

(4) 由 (3) 得 $\psi\&\varphi\to\psi\&\varphi$, 应用 (A5b) 可得

$$(\psi\&\varphi\to\psi\&\varphi)\to(\psi\to(\varphi\to\psi\&\varphi)).$$

据 MP 规则得 $\psi\to(\varphi\to\psi\&\varphi)$, 再应用 (2) 得 $\varphi\to(\psi\to\psi\&\varphi)$. 于是, 应用 (A5a) 即得 (4).

命题 3.1.3[22] 形式系统 **BL** 中的公理都是 $PC(*)$ 的 1–重言式. 如果 φ 及 $\varphi\to\psi$ 是 $PC(*)$ 中的 1–重言式, 则 ψ 也是 $PC(*)$ 中的 1–重言式. 从而, **BL** 中的每一个可证公式 (即定理) 都是 $PC(*)$ 中的 1–重言式.

定理 3.1.1[22]　以下公式是系统 BL 中的定理:

(1) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$;

(2) $(\varphi\&(\varphi\to\psi))\to\psi$;

(3) $\varphi\to(\psi\to(\varphi\&\psi))$;

(4) $(\varphi\to\psi)\to((\varphi\&\chi)\to(\psi\&\chi))$;

(5) $((\varphi_1\to\psi_1)\&(\varphi_2\to\psi_2))\to((\varphi_1\&\varphi_2)\to(\psi_1\&\psi_2))$;

(6) $(\varphi\&\psi)\&\chi\to\varphi\&(\psi\&\chi)$, $\varphi\&(\psi\&\chi)\to(\varphi\&\psi)\&\chi$;

(7) $(\varphi\wedge\psi)\to\varphi$, $(\varphi\wedge\psi)\to\psi$, $(\varphi\&\psi)\to(\varphi\wedge\psi)$;

(8) $(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to(\varphi\wedge\psi))$;

(9) $(\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)$;

(10) $((\varphi\to\psi)\wedge(\varphi\to\chi))\to(\varphi\to(\psi\wedge\chi))$;

(11) $\varphi\to(\varphi\vee\psi)$, $\psi\to(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\vee\psi)\to(\psi\vee\varphi)$;

(12) $(\varphi\to\psi)\to((\varphi\vee\psi)\to\psi)$;

(13) $(\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi)$;

(14) $((\varphi\to\chi)\wedge(\varphi\to\chi))\to((\varphi\vee\psi)\to\chi)$;

(15) $\varphi\to(\neg\varphi\to\psi)$, 特别地, $\varphi\to\neg\neg\varphi$, $\varphi\&\neg\varphi\to\bar{0}$;

(16) $(\varphi\to(\psi\&\neg\psi))\to\neg\varphi$;

(16′) $(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$;

(16″) $(\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\neg\varphi)$;

(17) $\bar{1}$, 这里 $\bar{1}$ 表示 $\bar{0}\to\bar{0}$;

(18) $\varphi\to(\bar{1}\&\varphi)$;

(18′) $(\bar{1}\to\varphi)\to\varphi$;

(19) $(\varphi\wedge\psi)\wedge\chi\to\varphi\wedge(\psi\wedge\chi)$, $\varphi\wedge(\psi\wedge\chi)\to(\varphi\wedge\psi)\wedge\chi$;

(20) $(\varphi\vee\psi)\vee\chi\to\varphi\vee(\psi\vee\chi)$, $\varphi\vee(\psi\vee\chi)\to(\varphi\vee\psi)\vee\chi$;

(21) $\varphi\to\varphi\wedge(\varphi\vee\psi)$, $\varphi\vee(\varphi\wedge\psi)\to\varphi$;

(22) $\varphi\equiv\varphi$, $(\varphi\equiv\psi)\to(\psi\equiv\varphi)$, $((\varphi\equiv\psi)\&(\psi\equiv\chi))\to(\varphi\equiv\chi)$;

(23) $(\varphi\equiv\psi)\to(\varphi\to\psi)$,$(\varphi\equiv\psi)\to(\psi\to\varphi)$;

(24) $(\varphi\equiv\psi)\to((\varphi\&\chi)\equiv(\psi\&\chi))$;

(25) $(\varphi\equiv\psi)\to((\varphi\to\chi)\equiv(\psi\to\chi))$;

(26) $(\varphi\equiv\psi)\to((\chi\to\varphi)\equiv(\chi\to\psi))$;

(27) $(\varphi\equiv\psi)\to((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))$;

(28) $\varphi\&(\psi\vee\chi)\equiv(\varphi\&\psi)\vee(\varphi\&\chi)$, $\varphi\&(\psi\wedge\chi)\equiv(\varphi\&\psi)\wedge(\varphi\&\chi)$;

(29) $\varphi\wedge(\psi\vee\chi)\equiv(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)$, $\varphi\vee(\psi\wedge\chi)\equiv(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi)$;

(30) $(\varphi\vee\psi)\&(\varphi\vee\psi)\to((\varphi\&\varphi)\vee(\psi\&\psi))$,$(\varphi\wedge\psi)\&(\varphi\wedge\psi)\to((\varphi\&\varphi)\wedge(\psi\&\psi))$;

(31) $(\varphi\to\psi)^n\vee(\psi\to\varphi)^n$(对任意公式 χ, χ^n 表示 $\chi\&\cdots\&\chi$, n 个因子 χ, n 是自然数);

(32) $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\equiv\neg(\varphi\vee\psi)$;

(33) $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\equiv\neg(\varphi\wedge\psi)$.

3.1.2 *BL*–代数及系统 BL 的完备性

定义 3.1.4[22] 设 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 是一个可换剩余格. 称 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 是一个 BL–代数, 如果满足 $(\forall x,y,z\in L)$

(1) $x\wedge y=x\otimes(x\to y)$;

(2) $(x\to y)\vee(y\to x)$=1.

注 3.1.2 (1) 上述条件 (2) 称为预线性公理或预线性性 (prelinearity).

(2) [0, 1] 关于自然序及运算 min, max, 任意确定的连续 t–模 $\otimes$ 及其相伴剩余蕴涵 $\to$ 构成一个 BL–代数 ([0, 1]; min, max, $\otimes$, $\to$).

(3) BL–代数是特殊的可换剩余格, 所以 2.2 节中所述的可换剩余格的性质在 BL–代数中均成立. 同时, BL–代数有一些特殊性质, 如在 BL–代数中, 定理 2.2.7 中的不等式 (2) 可改为等式, 即 $x\vee y$=$((x\to y)\to y)\wedge((y\to x)\to x)$.

BL 逻辑中所有公式关于可证等价关系 (可类似于定义 1.5.10 的方式进行定义) 形成的商代数是一个 BL–代数. 同时, 有更一般的结果, 即下述的定理 3.1.2, 为了叙述这个结论, 需要首先给出如下的定义.

定义 3.1.5[22] 形式系统 **BL** 中的一个公式集 Γ, 通常被称为 **BL** 上的一个理论 (theory). 对于任意一个公式 φ, 记 $[\varphi]_\Gamma$ 是所有与 φ 在 Γ 下可证等价的公式 ψ 之集 (即 $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$, $\Gamma\vdash\psi\to\varphi$. 参阅定义 1.5.9 及定义 1.5.10), 并记 L_Γ 是所有 $[\varphi]_\Gamma$ 构成的集合. 定义

$$
\begin{gathered}
0=[\bar{0}]_\Gamma,\\
1=[\bar{1}]_\Gamma,\\
[\varphi]_\Gamma\wedge[\psi]_\Gamma=[\varphi\wedge\psi]_\Gamma,\\
[\varphi]_\Gamma\vee[\psi]_\Gamma=[\varphi\vee\psi]_\Gamma,\\
[\varphi]_\Gamma\otimes[\psi]_\Gamma=[\varphi\&\psi]_\Gamma,\\
[\varphi]_\Gamma\to[\psi]_\Gamma=[\varphi\to\psi]_\Gamma.
\end{gathered}
$$

定理 3.1.2[22] 对于系统 **BL** 上的任意一个理论 Γ, 按上述定义, $(L_\Gamma;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 是一个 BL–代数.

定义 3.1.6[22] 一个剩余格 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 称为是线性序的 (linearly ordered), 如果它的格序是线性的, 即 $\forall x,y\in L$, $x\wedge y=x$ 或 $x\wedge y=y$(这等价于: $x\vee y=y$ 或 $x\vee y=x$).

注 3.1.3　(1) 线性序剩余格所组成的类不是一个代数簇, 因为它对直积不封闭.

(2) BL–代数中条件 $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$ 的成立, 使得线性序 BL–代数是可除的, 即对任意 $x, y \in L$, 若 $x > y$, 则存在 $z \in L$ 使得 $y = x \otimes z$.

定义 3.1.7[22]　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个 BL–代数, 一个命题变元的 L–赋值 (L-evaluation) 是一个作用于每个命题变元 p 的映射 e, $e(p) \in L$. e 可如下唯一扩展到所有公式:

$$e(\bar{0}) = 0, \quad e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \to e(\psi), \quad e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) \otimes e(\psi).$$

由此可得, $e(\varphi \wedge \psi) = e(\varphi) \wedge e(\psi)$, $e(\varphi \vee \psi) = e(\varphi) \vee e(\psi)$, $e(\neg\varphi) = e(\varphi) \to 0$. 一个公式$\varphi$称为是一个 L–重言式, 如果对任意的 L–赋值 e 有 $e(\varphi)=1$.

定理 3.1.3[22]　**BL** 逻辑对于 BL–重言式是可靠的, 即如果 φ 在 **BL** 中是可证的, 则对任意 BL–代数 L 来说 φ 均是 L–重言式.

BL–代数的滤子、素滤子等概念沿用一般可换剩余格的相应概念 (见 2.2 节), 对定理 2.2.9 等可进一步具体化得到下述结果.

定理 3.1.4[22]　设 L 是一个 BL–代数, F 是 L 的一个滤子. 定义 L 上的关系 $\sim_F$ 如下:

$$x \sim_F y \text{当且仅当} (x \to y \in F, y \to x \in F),$$

则 (1) $\sim_F$ 是一个同余关系且商代数 $L/\sim_F$ 是一个 BL–代数.

(2) $L/\sim_F$ 是线性的当且仅当 F 是素滤子.

定理 3.1.5[22]　**BL** 是完备的, 即对任意的公式 φ 以下条件等价:

(1) φ 在 **BL** 中可证;

(2) 对任意线性 BL–代数 L, φ 是 L–重言式;

(3) 对任意 BL–代数 L, φ 是 L–重言式.

对于上述结论, 文献 [161], [162] 作了深入研究, 可得到更深刻的结果 (即标准完备性). 要论述此结果, 需要较多的准备工作, 故将其放在 3.3 节单独介绍.

3.2　逻辑系统 BL 的各种扩张

3.2.1　Łukasiewicz 逻辑系统 Łuk 及 Gödel 逻辑系统 G

在文献 [22] 中, Łukasiewicz 逻辑系统 **Ł** 被定义为 **BL** 系统的语义扩张, 即

定义 3.2.1[22]　在系统 **BL** 上增加如下公理 $(\neg\neg)$ 而得到的形式系统称为 Łukasiewicz 逻辑系统, 记为 **Ł**:

$(\neg\neg)$ $\neg\neg\varphi \to \varphi$

文献 [22] 中证明, 如下定义的形式系统 **Łuk** 与 **Ł** 实质是一致的 (见文献 [22] 中的定义 3.1.3 及推论 3.1.16 后的说明):

定义 3.2.2[22] 形式系统 **Łuk** 由以下公理构成 (推理规则为 MP 规则):

(Ł1) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$;

(Ł2) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$;

(Ł3) $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi)$;

(Ł4) $((\varphi\to\psi)\to\psi)\to((\psi\to\varphi)\to\varphi)$.

注 3.2.1 文献 [22] 中使用符号 **Ł**$'$ 表示上述形式系统, 这里使用 [11] 中的记号 **Łuk**(本书以后将一致使用这个记号).

为了证明 Łukasiewicz 逻辑系统的完备性, Chang[24] 引入 MV– 代数的概念. 它有各种形式的等价定义, 下面是文献 [22] 中给出的定义.

定义 3.2.3[22] 满足如下条件的 BL–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为 MV–代数:

(DN) $(x\to0)\to0=x, \forall x\in L$.

注 3.2.2 (1) 定义中的 DN 表示 double negation.

(2) 为了研究格值逻辑 [15,16], 徐扬教授于 20 世纪 90 年代初引入了格蕴涵代数, 尽管它被证明与 MV– 代数等价 [31], 但以徐扬教授为代表的一批学者围绕格值逻辑进行的一系列研究 (集中反映在专著 [15] 中), 却具有重要理论意义和应用价值.

定理 3.2.1[31,164] (2, 0) 型代数 $(L; \to, 0)$ 是 MV–代数当且仅当满足以下条件:

(1) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$;

(2) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=1$;

(3) $x\to x=1$;

(4) $x\to y=y\to x=1\Rightarrow x=y$;

(5) $0\to x=1$;

(6) $(x\to0)\to0=x$;

(7) $(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$,

其中, $1=0\to0$.

注 3.2.3 在上述代数结构中, 相应的运算 $\otimes, \wedge, \vee$ 定义如下: $x\otimes y=(x\to(y\to0))\to0$, $x\wedge y=x\otimes(x\to y)$, $x\vee y=(x\to y)\to y$.

定理 3.2.2[11] (2, 1, 0) 型代数 $(L; \oplus, ', 0)$ 是 MV– 代数当且仅当满足以下条件:

(1) $(L, \oplus, 0)$ 是以 0 为单位的交换半群;

(2) $x\oplus0'=0'$;

(3) $(x')' = x$;

(4) $(x' \oplus y)' \oplus y = (y' \oplus x)' \oplus x$.

注 3.2.4　在上述代数结构中，相应的常元 1 及运算 $\otimes$, $\to$, $\wedge$, $\vee$ 定义如下：$1=0'$, $x \otimes y=(x' \oplus y')'$, $x \to y = x' \oplus y$, $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$, $x \vee y=(x \to y) \to y$.

定义 3.2.4[11]　在 [0, 1] 上定义：

$$x \oplus y = \min\{x+y, 1\}, \quad x' = 1-x, \quad \forall x, y \in [0,1],$$

则 ([0, 1]; $\oplus$, $'$, 0) 是一个 MV–代数，称为 MV 单位区间 (记为 $[0, 1]_{MV}$. 这实际上是 Łukasiewicz t–模所决定的 MV–代数，因这里的 $\oplus$ 正好是与 Łukasiewicz t–模对偶的 t 余模 S_L).

定义 3.2.5[11]　设 $F(S)$ 是系统 **Łuk** 的全部公式集，即设系统 **Łuk** 的原子命题集为 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$, 逻辑联结词为 $\neg$, $\to$, $F(S)$ 是 S 生成的 $(\neg, \to)$ 型自由代数. 映射 e: $F(S) \to [0, 1]$ 称为 $F(S)$ 在 MV 单位区间 $[0, 1]_{MV}$ 中的赋值，如果 e 是 $(\neg, \to)$ 型同态 (在 $[0,1]_{MV}$ 中取 $\neg$ 为 $'$), 即

$$e(\neg\varphi) = \neg e(\varphi) = 1 - e(\varphi), \quad e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \to e(\psi) = \min\{1 - e(\varphi) + e(\psi), 1\}.$$

如果公式 φ 对于 $F(S)$ 在 MV 单位区间 $[0, 1]_{MV}$ 中的任意赋值 e 都有 $e(\varphi)=1$, 则称 φ 是 1–重言式.

定理 3.2.3(系统 **Łuk** 的完备性定理)[22,11]　在 Łukasiewicz 逻辑系统 **Łuk** 中，公式 φ 是可证的当且仅当 φ 是 1–重言式.

在文献 [22] 中，Gödel 逻辑系统 **G**、布尔逻辑系统 **BL2** 均被定义为 **BL** 系统的语义扩张，即

定义 3.2.6[22]　在 **BL** 系统上增加如下公理 (G) 而得到的逻辑系统称为 Gödel 逻辑系统，记为 **G**：

(G) $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$.

在 **BL** 系统上增加如下公理 (BL2) 而得到的逻辑系统称为 **BL2** 系统：

(BL2) $\varphi \vee \neg\varphi$.

定义 3.2.7[22]　满足条件 $x \otimes x = x (\forall x \in L)$ 的 BL–代数 (L; $\wedge$,$\vee$,$\otimes$,$\to$,0,1) 称为 G–代数.

文献 [22] 中证明了 **BL2** 系统与经典命题逻辑系统 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ (见定义 1.5.7) 是等价的. 类似于定理 3.2.3 有 Gödel 逻辑系统 **G** 的完备性定理，其中与定义 3.2.5 中 MV 单位区间 $[0, 1]_{MV}$ 相对应的是 [0, 1] 上的 G–代数 $[0, 1]_G$, 即 ([0, 1]; min, max, $\otimes$, $\to$), 这里

$$x \otimes y = \min\{x, y\}, \quad x \to y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y, & x > y, \end{cases} \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

定理 3.2.4(系统 G 的完备性定理)[22] 在 Gödel 逻辑系统 **G** 中, 公式 φ 是可证的当且仅当 φ 是 1–重言式.

上面的定义 3.2.1 与 3.2.6 是通过添加新公理的方法引进逻辑系统 **Łuk** 和 **G** 的. 本节最后, 通过添加一条推理规则的方法, 分别给出逻辑系统 **Łuk**、Gödel 系统 **G** 在 **BL** 系统中的特征.

定理 3.2.5 在 **BL** 系统中添加如下推理规则得到的逻辑系统与 **Łuk** 等价:

(RR1) 由 $\varphi \to \psi$ 推得 $((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi$.

证明 首先证明 (RR1) 在 **Łuk** 中成立, 即证明$\{\varphi\to\psi\}\vdash\{((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi\}$. 据文献 [22] 中 Lemma 3.1.1 (4) 有 **Łuk**$\vdash((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to((\varphi\to\psi)\to\psi)$. 又据命题 3.1.2 (2) 得 **Łuk**$\vdash(((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to((\varphi\to\psi)\to\psi))\to((\varphi\to\psi)\to(((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi))$. 应用 MP 规则得 **Łuk**$\vdash(\varphi\to\psi)\to(((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi)$. 于是, 由 $(\varphi\to\psi)$, 根据 MP 规则可推得 $((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi$, 即$\{\varphi\to\psi\}\vdash\{((\psi\to\varphi)\to\varphi)\to\psi\}$.

其次证明: 添加推理规则 (RR1) 到 **BL** 上后成立 $\vdash \neg\neg\varphi\to\varphi$. 由定义 3.1.3 (A7) 有 $\bar{0}\to\varphi$. 由此, 据推理规则 (RR1) 得 $((\varphi\to\bar{0})\to\bar{0})\to\varphi$, 此即是 $\neg\neg\varphi\to\varphi$.

综上所述, 在 **BL** 系统中添加推理规则 (RR1) 得到的逻辑系统与 **Łuk** 等价.

定理 3.2.6 在 **BL** 系统中添加如下推理规则得到的逻辑系统与 **G** 等价:

(RR2) 由 $\varphi\to(\varphi\to\psi)$ 推得 $\varphi \to \psi$.

证明 首先证明 (RR2) 在系统 **G** 中成立, 即证明$\{\varphi\to(\varphi\to\psi)\}\vdash\{\varphi\to\psi\}$. 据定义 3.1.3 (A5a) 有 $\vdash(\varphi\to(\varphi\to\psi))\to(\varphi\&\varphi\to\psi)$. 故由 $\varphi\to(\varphi\to\psi)$, 应用 MP 规则可推出 $\varphi\&\varphi\to\psi$. 又由 (G) 知 $\varphi\to(\varphi\&\varphi)$, 而据定义 3.1.3(A1) 有

$$(\varphi \to (\varphi\&\varphi)) \to ((\varphi\&\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)).$$

两次应用 MP 规则得 $\varphi \to \psi$, 即$\{\varphi\to(\varphi\to\psi)\}\vdash\{\varphi\to\psi\}$.

其次证明: 添加推理规则 (RR2) 到 **BL** 上后成立 $\vdash \varphi \to (\varphi\&\varphi)$. 由定理 3.1.1 (3) 有 $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi\&\varphi)$. 由此, 据推理规则 (RR2) 得 $\vdash \varphi \to (\varphi\&\varphi)$.

综上所述, 在 **BL** 系统中添加推理规则 (RR2) 得到的逻辑系统与 **G** 等价.

3.2.2 乘积逻辑系统 Π 及严格基本逻辑系统 SBL

本节介绍形式系统 **BL** 的两种扩张形式 **Π** 及 **SBL**, **Π** 的语义解释为乘积 t–模基逻辑 (故称其为乘积逻辑), **SBL** 的语义解释为 Gödel 逻辑 **G** 与乘积逻辑 **Π** 的结合 (即 **SBL** 中的定理既是 **G** 中的定理又是 **Π** 中的定理). 与逻辑系统 **Π** 及 **SBL** 相配套的代数结构分别是乘积代数 (product algebra, 或 Π– 代数) 和 SBL–代数.

定义 3.2.8[22] 在系统 **BL** 上增加如下公理 (Π1, Π2) 而得到的形式系统称为乘积逻辑系统, 记为 **Π**:

(Π1) $\neg\neg\chi\to((\varphi\odot\chi\to\psi\odot\chi)\to(\varphi\to\psi))$;

(Π2) $(\varphi\wedge\neg\varphi)\to\bar{0}$.

注 3.2.5　这里 $\neg\varphi$ 表示 $\varphi\to\bar{0}$, $\odot$ 即为 **BL** 中的&(以后常用 $\odot$ 代替&).

命题 3.2.1[22]　公理 (Π1) 及 (Π2) 均为 $[0,1]_\Pi$ 上的 1–重言式, 这里 $[0,1]_\Pi$ 表示由乘积 t–模及其剩余蕴涵构成的实数区间 [0, 1] 上的代数结构.

上述定义中的公理 (Π2) 可替换为另一个公式, 即后面的公式 (STR). 为了较简捷地证明这一结论, 需要一个引理.

引理 3.2.1　在系统 **BL** 中, 下述公式是定理:

(1) $\varphi\to(\psi\to\varphi\wedge\psi)$;

(2) $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi$;

(3) $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\neg\psi$;

(4) $[(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\neg\psi]$.

证明　(1) 可由定理 3.1.1 (7) 及定义 3.1.3 (A5b) 直接得到.

(2) 由定义 3.1.3 (A2), (A3) 得 $(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi\to\psi$. 又, 应用定理 3.1.1 (7) 得

$$[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi]\to(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi.$$

由此可得 $[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi]\to\psi$(三段论规则, 可由 (A1) 及 MP 规则推出). 而由定理 3.1.1 (28) 有

$$(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\equiv[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi],$$

所以 $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi$.

(3) 由定义 3.1.3 (A3) 及定理 3.1.1 (2) 得 $(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi\to\neg\psi$. 又应用定理 3.1.1 (7) 得 $[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi]\to(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi$. 于是由三段论规则得

$$[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi]\to\neg\psi,$$

而由定理 3.1.1 (28) 有 $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\equiv[(\varphi\to\neg\psi)\odot\varphi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot\psi]$, 所以

$$(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\neg\psi.$$

(4) 据 (2) 及 (3), 应用 (1) 及 MP 规则即得 (4).

命题 3.2.2　在系统 **BL** 中, (Π2) 与下述公式等价:

(STR) $\neg(\varphi\odot\psi)\to\neg(\varphi\wedge\psi)$.

证明　首先证明 **BL**+(STR)⊢(Π2). 由 (STR) 可得 $\neg(\varphi\odot\neg\varphi)\to\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$, 应用定理 3.1.1 (15) 及 MP 规则即得 $\neg(\varphi\wedge\neg\varphi)$, 此即 (Π2).

其次证明 **BL**+(Π2)⊢(STR). 由引理 3.2.1(4) 有

$$[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi) \to \psi] \wedge [(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi) \to \neg\psi].$$

据定理 3.1.1 (10) 有

$$[(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi]\wedge[(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\neg\psi]\to[(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi\wedge\neg\psi].$$

于是由 MP 规则推得 $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\psi\wedge\neg\psi$. 应用定义 3.1.3 (A1) 得

$$[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi) \to \psi \wedge \neg\psi] \to \{(\psi \wedge \neg\psi \to \bar{0}) \to [(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi) \to \bar{0}]\}.$$

应用 (Π2) 及 MP 规则得 $(\varphi\to\neg\psi)\odot(\varphi\wedge\psi)\to\bar{0}$, 而

$$\begin{aligned}(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi) \to \bar{0} &\equiv (\varphi \to \neg\psi) \to [(\varphi \wedge \psi) \to \bar{0}]\\ &\equiv [\varphi \to (\psi \to \bar{0})] \to [(\varphi \wedge \psi) \to \bar{0}]\\ &\equiv (\varphi \odot \psi \to \bar{0}) \to (\varphi \wedge \psi \to \bar{0})\\ &\equiv \neg(\varphi \odot \psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi).\end{aligned}$$

此即 (STR).

定义 3.2.9[22] 满足如下条件的 BL–代数 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 称为 Π–代数或乘积代数 $(\forall x,y,z\in L)$:

(1) $z'' \leqslant (x\otimes z\to y\otimes z)\to(x\to y)$,

(2) $x\wedge x'=0$,

其中, x' 代表 $x\to 0$.

定理 3.2.7(系统 **Π** 的完备性定理)[22] 在乘积逻辑系统 **Π** 中, 公式 φ 是可证的当且仅当 φ 是 1–重言式.

文献 [165] 中提出 **BL** 的一种扩张 **SBL**, 它是基于无非平凡零因子 t–模的模糊逻辑系统, 也是系统 **G** 与 **Π** 的结合.

定义 3.2.10[165] 在系统 **BL** 上增加如下公理 (STR) 而得到的形式系统称为严格模糊逻辑系统, 记为 **SBL**:

(STR) $\neg(\varphi\odot\psi)\to\neg(\varphi\wedge\psi)$.

注 3.2.6 由命题 3.2.2 知, 上述定义中的公理 (STR) 可用 (Π2) $(\varphi\wedge\neg\varphi)\to\bar{0}$ 替换, 同时说明系统 **Π** 是 **SBL** 的一种扩张. 此外, 易于验证, (STR) 也是系统 **G** 中的定理, 因此 **SBL** 是 **G** 与 **Π** 的共同基础.

定义 3.2.11[165] 满足如下条件的 BL–代数 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 称为 SBL–代数:

$$x\otimes y\to 0=(x\to 0)\vee(y\to 0),\quad \forall x,y\in L.$$

容易验证, ([0, 1]; min, max, $*$, $\to$, 0, 1) 是一个 SBL– 代数, 其中, $*$ 是无非平凡零因子的 t– 模, $\to$ 是与 $*$ 相伴的剩余蕴涵.

命题 3.2.3[165]　一个线性序的 BL– 代数是 SBL– 代数的充要条件是满足下列条件之一:

(1) $x \otimes y=0$ 当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$;

(2) x'(即 $x \to 0$) 是 Gödel 否定, 即 $x=0$ 时 $x'=1$, 否则 $x'=0$.

定理 3.2.8(系统 **SBL** 的完备性定理)[165]　在逻辑系统 **SBL** 中, 公式 φ 是可证的当且仅当 φ 是 L–重言式, 这里 L 是任意线性序的 SBL– 代数.

注 3.2.7　除上述介绍的几种扩张之外, 一批学者还提出了其他一些 **BL** 的扩张系统, 如 $\mathbf{BL_\Delta}$, $\mathbf{SBL_\sim}$, **ŁΠ**, $\mathbf{Ł\Pi_{1/2}}$, **PŁ**, **PŁ**$'$ 等 (分别参见文献 [22], [165]~[167]). 其研究思路可归纳为两个方面, 一是在系统 **BL** 中增加新的逻辑联结词, 如投影算子 Δ、附加的对合否定 $\sim$ 等; 二是将不同的模糊逻辑系统组合起来, 如 **ŁΠ** 是 Łukasiewicz 逻辑与乘积逻辑的组合. 由于篇幅所限, 这方面的内容不再详述, 请读者自行选读相关文献.

3.3　逻辑系统 BL 的标准完备性

首先解释一下标准完备性的概念.

在讨论各种模糊逻辑系统的完备性问题时, 通常要考虑与相应逻辑系统配套的代数结构; 而同一逻辑系统的完备性又有多种形式, 每一种形式对应同一类代数的不同子类. 为避免混淆, 本节特别对它们的区别进行说明.

对于模糊逻辑, 实数区间 [0, 1] 是命题真值域, 因此定义在其上的各种逻辑代数被称为标准代数 (standard algebra); 又由于 t– 模基模糊逻辑是主要研究对象, 因此标准代数又被称为 t 代数. 下面给出一个严格定义 (对文献 [22], [159], [168] 中相应概念进行修改而来).

定义 3.3.1　一个标准代数 (或称 t 代数) 是指由一个 (或一类)t– 模 $*$ 及其剩余蕴涵 $\to$ 构成的实数区间 [0, 1] 上的代数结构 ([0, 1]; $\wedge$, $\vee$, $*$, $\to$), 其序关系就是通常实数的大小关系. 记由 t– 模 $*$ 决定的标准代数为 $[0, 1]_*$. 特别地, 当 $*$ 分别为 Łukasiewicz t– 模、乘积 t– 模、Gödel t– 模时, 相应的 t 代数记为 $[0, 1]_Ł$ 或 $[0, 1]_{MV}$, $[0, 1]_\Pi$, $[0, 1]_G$.

对于系统 **BL**, 定理 3.1.5 给出了它的完备性, 但这个完备性是针对线性 BL– 代数的, 即并没有证明: "公式 φ 在 **BL** 中可证" 当且仅当 "对任意连续 t– 模 $*$, φ 是 $[0, 1]_*$–重言式 (又称为 φ 是 t–重言式或 1–重言式)". 此即标准完备性, 它是针对标准代数的. 证明这一结果正是本节的主题.

注意, 定理 3.2.3 是 Łukasiewicz 逻辑系统的标准完备性 (基于 MV 单位区间 $[0, 1]_{MV}$, 即 $[0, 1]_{L}$), 定理 3.2.4 是 Gödel 逻辑系统的标准完备性 (基于 $[0, 1]_G$), 定理 3.2.7 是乘积逻辑系统的标准完备性 (基于 $[0, 1]_{\Pi}$), 而定理 3.2.8 是 **SBL** 逻辑系统的完备性而非标准完备性.

3.3.1 BL–链的序数和

BL– 代数 L 的元素 z 称为幂等的 (idempotent), 如果 $z^2 = z \otimes z = z$. L 的所有幂等元的集合记为 $Idp(L)$.

引理 3.3.1 设 L 是 BL– 代数, 对任意 $z \in L$, 下述条件等价:

(1) $z \in Idp(L)$;

(2) 对任意 $x \in L$, $z \otimes x = z \wedge x$.

证明 (2) $\Rightarrow$(1) 是显然的. 现假设 $z \in Idp(L)$, 则 $z^2 = z$. 于是, 对任意 $x \in L$ 有

$$z \otimes (z \wedge x) = z \otimes (z \otimes (z \to x)) = z^2 \otimes (z \to x) = z \otimes (z \to x) = z \wedge x.$$

因此 $z \wedge x = z \otimes (z \wedge x) \leqslant z \otimes x$, 又 $z \otimes x \leqslant z \wedge x$ 总是成立的, 所以 $z \otimes x = z \wedge x$. 此即 (2).

注 3.3.1 由引理 3.3.1 可知, 若 $z \in Idp(L)$, 则 $(\forall x, y \in L)\quad z \leqslant x \to y$ 当且仅当 $z \wedge x \leqslant y$.

一个 G– 链是指这样的全序 BL– 代数 L, 它有底元 0 和顶元 1 且其运算定义为

$$x \otimes y = \min\{x, y\}, \quad x \to y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y, & x > y. \end{cases}$$

根据上面的注释易知, 一个 BL– 链 C 是 G–链当且仅当 $C = Idp(C)$.

设 u, v 是 BL– 代数 L 的幂等元且 $u \leqslant v$, 由引理 3.3.1 易得区间 (或称分段, segment) $[u, v]=\{x \in L | u \leqslant x \leqslant v\}$对于运算 $\otimes$ 封闭. 对于任意 x, $y \in[u, v]$ 定义 $x \to_{uv} y=(v \wedge (x \to y))\vee u$.

定理 3.3.1 设 L 是 BL– 代数, 如果 u, $v \in Idp(L)$ 且 $u \leqslant v$, 则 $([u, v]; \wedge, \vee, \otimes, \to_{uv}, u, v)$ 是 BL– 代数, 记为 $[u, v]_L$. 且 $Idp([u, v]_L)=Idp(L)\cap[u, v]$.

设 $(I; \leqslant)$ 是一个链, 有最小元 0 和最大元 1, 对每一个 $i \in I$ 记

$$i^+ = \begin{cases} \inf\{j \in I : i < j\}, & \text{如果它存在,} \\ i, & \text{其他.} \end{cases}$$

为了避免混淆, 本节将 BL– 代数中的最小元、最大元分别记为 $\perp$ 和 $\top$. 下面关于 BL– 链的序数和概念 (更一般地, t– 模的序数和) 是 Clifford[169] 半群序数和理论在 t– 模中的应用 (可进一步阅读文献 [170], [171]).

定义 3.3.2　设$\{C_i;\otimes_i,\to_i,\perp_i,\top_i\}_{i\in I}$ 是一簇 BL– 链且满足 $\top_i=\perp_{i^+}$, 则

$$\bigoplus_{i\in I} C_i=\left(\bigcup_{i\in I} C_i;\ \otimes,\to,\perp,\top\right)$$

是一个 BL– 链, 称为簇$\{C_i\}_{i\in I}$ 的序数和 (ordinal sum), 其中, $\perp=\perp_0$, $\top=\top_1$, 且运算 $\otimes$ 与 $\to$ 定义为

$$x\otimes y=y\otimes x=\begin{cases} x\otimes_i y, & x,y\in C_i,\\ x, & x\in C_i, y\in C_j \text{ 且 } i<j.\end{cases}$$

$$x\to y=\begin{cases} \top, & x,y\in C_i \text{ 且 } x\leqslant_i y;\ \text{或 } x\in C_i,y\in C_j \text{ 且 } i<j,\\ x\to_i y, & x,y\in C_i \text{ 且 } x>y,\\ y, & x\in C_i,y\in C_j \text{ 且 } i>j.\end{cases}$$

注 3.3.2　(1) 如果 $I=\{0,1,\cdots,n\}$, 上述序数和记为 $C_0\oplus\cdots\oplus C_n$.

(2) 在上面的定义中, 如果 $i=i^+$, 则 $\top_i=\perp_{i^+}=\perp_i$ 且 $C_i=\{\top_i\}$. 例如, 实单位区间 [0, 1] 作为一个 G– 链是序数和 $\bigoplus\limits_{r\in[0,1]} C_r$, 其中, $C_r=[r,r]=\{r\}$, $\forall r\in[0,1]$.

(3) 如果 C, C_1, C_2 是 BL– 链且满足 $C=C_1\oplus C_2$, 则 $\top_1=\perp_2$ 是 C 的一个幂等元, 且 $C_1=[\perp,\top_1]_C$, $C_2=[\top_1,\top]_C$.

(4) 如果 $E=Idp\ (C)$, 则 $C=\bigoplus\limits_{i\in E}[i,i^+]_C$.

定义 3.3.3　一个 BL– 链 C 称为不可约的 (irreducible), 如果不存在至少有两个元的 BL– 链 C_1 和 C_2, 使得 $C=C_1\oplus C_2$.

由注 3.3.2(3) 易得, BL– 链是不可约的当且仅当 $Idp(C)=\{\perp,\top\}$. 所以, 标准 MV– 链和标准 Π– 链都是不可约的, 一个 G– 链 C 是不可约的当且仅当 C 至多有两个元. 下面例子说明存在另一些不可约的 BL– 链.

例 3.3.1　设 $C=[0,2]$ 是有自然序的实数区间, 且赋予了如下定义的运算$*$和$\to$:

$$x*y=\begin{cases} 1+(x-1)(y-1), & x,y\in(1,2],\\ x, & x\in[0,1] \text{ 且 } y\in(1,2],\\ (x+y-1)\vee 0, & x,y\in[0,1].\end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} 2, & x \leqslant y, \\ \dfrac{y-1}{x-1}+1, & x > y \text{ 且 } x, y \in (1,2], \\ y, & x > y, x \in [1,2], \text{ 且 } y \in [0,1], \\ 1-x+y, & x > y \text{ 且 } x, y \in [0,1]. \end{cases}$$

可以验证, $1\in Idp(C)$ 且 C=[0, 1]$\oplus$[1, 2], 其中, [0, 1] 是标准 MV–链和 [1, 2] 是一个 Π–代数 (同构于标准 Π–链). 设 $L = C\backslash\{1\}$, 则 L 是 C 的子代数, 且 $Idp(L)$={0, 2}, 即 L 是不可约的 BL–链.

3.3.2 饱和 *BL*–链 (saturated *BL*-chain)

定义 3.3.4 一个序对 (X, Y) 称为 BL–链 C 的剖分 (cut), 如果下述条件成立:

(1) $X \cup Y = C$;

(2) $x \leqslant y, \forall x \in X, y \in Y$;

(3) Y 关于 $\otimes$ 封闭;

(4) $x \otimes y = x, \forall x \in X, y \in Y$.

例如, 设 C 是一个 BL–链, u 是 C 的一个幂等元且 $\bot \leqslant u \leqslant \top$, X=$\{x \in C|x < u\}$, $X_1 = X\cup\{u\}$, Y=$\{x \in C|x > u\}$, $Y_1 = Y\cup\{u\}$, 则 (X_1, Y_1), (X, Y_1), (X_1, Y) 是 C 的剖分.

容易证明以下结论成立 (见文献 [159] 中的 Lemma 5):

引理 3.3.2 对 BL–链 C 的任意剖分 (X, Y) 成立:

(1) 如果 $X \cap Y \neq \varnothing$, 则 $X \cap Y$=$\{u\}$, 其中, u 是 C 的幂等元;

(2) 如果 $x \in X$ 且 $t \leqslant x$, 则 $t \in X$;

(3) X 关于 $\otimes$ 封闭, 即 $\forall x, y \in X, x \otimes y \in X$;

(4) 如果 $x \in X\backslash Y$ 且 $y \in Y\backslash X$, 则 $y \to x = x$.

设 L 是在例 3.3.1 中考虑过的 BL–链, 容易看出 ([0, 1), (1, 2]) 是 L 的剖分, 它不能由 L 的幂等元确定. 为此, 引入下面的定义.

定义 3.3.5 一个 BL–链 C 称为饱和的 (saturated), 如果对 C 的任意剖分 (X, Y), 存在一个幂等元 $u \in C$ 使得 $(\forall x \in X, y \in Y) x \leqslant u \leqslant y$.

引理 3.3.3[159] 设 L 是 BL–代数, 则 $(\forall x, y, u \in L)$

(1) 若 $x > y$, 则 $y = x \otimes (x \to y)$;

(2) 若 $x \leqslant u \leqslant y$ 且 u 是幂等元, 则 $x \otimes y = x$;

(3) 若 $x < u \leqslant y$ 且 u 是幂等元, 则 $y \to x = x$.

定理 3.3.2 如果 C 是饱和 BL–链, E=$Idp(C)$ 是关于 $\otimes$ 的幂等元集合, 则

(1) 任意子集 $A \subseteq E$ 在 C 上有上、下确界且两者都属于 E;

(2) 对任意 $c\in E$, 存在最大闭区间 $[a, b]\subseteq E$ 满足 $c\in[a, b]$;

(3) 对任意 $\alpha\notin E$, 存在闭区间 $[a, b]$ 使得$\alpha\in[a, b]$ 且 $[a, b]\cap E=\{a, b\}$.

证明　(1) 若 $A=\varnothing$, 则结论显然成立. 现假设 $A\neq\varnothing$, 下证 $\sup A$ 存在且属于 E(类似地可证 $\inf A$ 存在且属于 E).

设 Y 是 A 在 C 中所有上界构成的集合, $X=C\backslash Y$, 则 (X, Y) 是 C 的一个剖分. 事实上, 由 X, Y 的定义显然有 $X\cup Y=C$ 且 $(\forall x\in X, y\in Y)x\leqslant y$, 即定义 3.3.4 中的条件 (1)、(2) 成立. 由引理 3.3.3 得, $x\otimes y=x$, 即定义 3.3.4 中的条件 (4) 成立. 故据定义 3.3.4 只需再证 Y 关于 $\otimes$ 封闭即可. 现设 $y_1, y_2\in Y$, 如果 $y_1\otimes y_2\notin Y$, 则 $y_1\otimes y_2$ 不是 A 的上界, 即存在 $a\in A$ 使得 $y_1\otimes y_2<a=a\otimes a$, 这是一个矛盾! (因为 $\otimes$ 保序.) 从而, 由 C 是饱和 BL–链的条件知, 存在一个幂等元 u 使得 $u=\sup X=\inf Y=\sup A$.

(2) 对任意 $c\in E$, 令 $A=\{d\in E|d\leqslant c, [d, c]\subseteq E\}$, $B=\{d\in E|d\geqslant c, [c, d]\subseteq E\}$, 则由 (1) 知, $\inf A$ 与 $\sup B$ 存在. 可以验证, 区间 $[\inf A, \sup B]$ 正是满足要求的区间 $[a, b]$, 即取 $\inf A=a$, $\sup B=b$.

(3) 对任意 $\alpha\notin E$, 令 $A=\{x\in E|x>\alpha\}$, $B=\{x\in E|x<\alpha\}$, 则由 (1) 知, $\sup B$ 与 $\inf A$ 存在. 可以验证, 区间 $[\sup B, \inf A]$ 正是满足要求的区间 $[a, b]$, 即取 $\sup B=a$, $\inf A=b$.

记定理 3.3.2 (3) 中所述区间构成的集合为 $I(E)=I(Idp(C))$, 即

$$I(E)=\{[a,b]|a,b\in E,a\leqslant b,\ \text{且}\ (a,b)\cap E=\varnothing\}.$$

同时, 记由定理 3.3.2 (2) 中所述区间中的所有真区间 (即非单点区间) 构成的集合 $G(E)=G(Idp(C))$. 并记 $E_{\text{is}}=E\backslash(I(E)\cup G(E))$, 这里的 "is" 表示孤立的 (isolated). 于是, 有下述推论.

推论 3.3.1　设 C 是饱和 BL–链, $(I;\leqslant)$ 是如下定义的全序集:

$$I=\{a\in C|a\in E_{\text{is}},\ \text{或}\ \exists b\in c\ \text{使得}\ [a,b]\in I(E)\cup G(E)\},$$

其序关系 $\leqslant$ 是 C 的链序在 I 上的限制. 对任意 $a\in I$, 定义 M_a 如下:

$$M_a=\begin{cases}[a,a], & a\in E_{\text{is}},\\ [a,b]_C, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $C=\bigoplus\limits_{a\in I}M_a$.

下面的例子说明 E_{is} 可能非空: 对于每一个自然数 $n\geqslant1$, 令 $a_n=1/2-1/n$ 和 $b_n=1/2+1/n$. 考虑在实单位区间 [0, 1] 上的由下述序数确定的 BL– 链 C:

$$\left(\bigoplus_{n\geqslant1}[a_n,a_{n+1}]_C\right)\oplus\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\oplus\left(\bigoplus_{n\geqslant1}[b_{n+1},b_n]_C\right),$$

其中, $[a_n, a_{n+1}]_C$ 和 $[b_{n+1}, b_n]_C$ 或是 MV–链或是乘积–链. 可验证, $E_{\text{is}}=\{1/2\}$, 其中, $G(E)=\varnothing$, $I(E)=\{[a_n, a_{n+1}], [b_{n+1}, b_n] | n \geqslant 1\}$.

显然, 对每一个 $[a, b] \in G(E)$, $[a, b]_C$ 是 G– 链. 通过将其分解成不可约成分, 可以得到饱和 BL–链的如下分解定理 (最早由 Hájek 在文献 [159] 中给出):

推论 3.3.2 每一个饱和 BL– 链 C 都是饱和不可约 BL– 链的序数和, 即

$$C = \bigoplus_{\alpha \in Idp(C)} [\alpha, \alpha^+]_C.$$

注 3.3.3 推论 3.3.1 和推论 3.3.2 给出的分解在由 $I(E)$ 和 E_{is} 产生的分量上是一致的, 但在由 $G(E)$ 产生的分量上是不同的. 事实上, 在 Hájek 的分解 (推论 3.3.2) 中, 每一个由 $G(E)$ 产生的分量, 当相应的点没有上邻 (upper neighbor) 时是作为单点集出现的, 而当相应的点有上邻时是只有两个元素的 BL– 链.

3.3.3 饱和不可约 BL–链 (saturated and irreducible BL-chain)

定义 3.3.6 设 C 是一个 BL– 链, $x, y, z \in C$. 称 (x, y, z) 是病态三元组 (pathological triple), 如果它满足以下条件: $x < z < y, x \otimes y = x, x \otimes z < x, z \otimes y < z$.

定理 3.3.3 BL– 链都不含病态三元组.

证明 假设 (x, y, z) 是病态三元组, 令 $s = x \to x \otimes z$, 则

$$y \to s = y \to (x \to x \otimes z) = (y \otimes x) \to x \otimes z = x \to x \otimes z = s.$$

由此可知 $s < y$(否则, 若 $s \geqslant y$, 则 $y \to s = \top = s$, 从而 $s = x \to x \otimes z = \top$, $x \leqslant x \otimes z$, 这与病态三元组定义中的 $x \otimes z < x$ 矛盾). 又, $z \leqslant s = x \to x \otimes z$(据 $\to$ 与 $\otimes$ 的伴随性), 进而

$$z = s \wedge z = s \otimes (s \to z) = (y \otimes s) \otimes (s \to z) = y \otimes (s \otimes (s \to z)) = y \otimes (s \wedge z) = y \otimes z < z.$$

这是一个矛盾.

引理 3.3.4 对任意饱和的且不可约的 BL– 链 C, 以下性质成立:

(1) $x \otimes y = x$ 蕴涵 $x = \bot$ 或 $y = \top$;

(2) $x \otimes z = y \otimes z > \bot$ 蕴涵 $x = y$.

证明 (1) 假设 $x \otimes y = x$, $x > \bot$ 且 $y < \top$. 令 $X_0 = \{z \in C | z \otimes y = z\}$, $Y = \{z \in C | z \otimes x = x\}$. 显然, $x \in X_0$, $y \in Y$, Y 关于 $\otimes$ 封闭, 且 $x \notin Y$(因为 C 不可约, 故除 $\bot$ 和 $\top$ 外没有其他幂等元). 取 $X = C \backslash Y$, 则对于任意 $u \in X$ 和 $v \in Y$ 有 $u < v$(否则, 若 $u \geqslant v$, 则 $x \geqslant u \otimes x \geqslant v \otimes x = x$, 即 $u \otimes x = x$, 进而 $x \otimes x = x$, 矛盾). 下证对于任意 $u \in X$ 和 $v \in Y$ 有 $u \otimes v = u$.

若 $u \leqslant x < v$, 则 $u \otimes v = (x \wedge u) \otimes v = (x \otimes (x \to u)) \otimes v = (x \to u) \otimes (v \otimes x) = (x \to u) \otimes x = u$.

若 $x<u<v$, 则 $u\otimes x<x$(因为 $u\notin Y$), $x\otimes v=x$(因为 $v\in Y$), 于是 $u\otimes v=u$(否则, (x, u, v) 构成病态三元组, 将与定理 3.3.3 矛盾).

另外, $u<v\leqslant x$ 的情况是不可能存在的 (因为 $x<v$).

总之, $u\otimes v=u$. 从而 (X, Y) 是 C 的剖分, 由于 C 是饱和的, 故据定义 3.3.5 知存在幂等元 a 使 $x\leqslant a\leqslant y$, 从而 a 是不同于 $\perp$ 和 $\top$ 的幂等元, 这与 C 是不可约的 BL–链相矛盾.

(2) 若 $x\otimes z=y\otimes z>\perp$. 假设 $x<y$, 则 $x=x\wedge y=y\otimes(y\to x)$. 从而,

$$y\otimes z=x\otimes z=(y\otimes(y\to x))\otimes z=(y\otimes z)\otimes(y\to x).$$

应用 (1) 得 $y\to x=\top$, 即 $y\leqslant x$. 这与 $x<y$ 的假设矛盾. 同样, 由 $y<x$ 也可推出矛盾, 所以 $x=y$.

称 BL–链 C 的元素 $x>\perp$ 是一个零因子 (zero divisor), 如果存在 $y\in C$ 且 $y>\perp$ 使得 $x\otimes y=\perp$. 注意, 这里的零因子实质上是非平凡零因子 (non-trivial zero divisor).

引理 3.3.5　设 C 是饱和的且不可约的 BL–链, 且 C 含有零因子, 则

(1) $\forall x\in C\backslash\{\perp, \top\}$, x 是零因子;

(2) $\forall x\in C$, $\neg\neg x=x$.

证明　(1) 设有 $y\in C$, $y>\perp$ 且 y 不是零因子, 则 $\neg y=\perp$(因为 $\neg y\otimes y=\perp$). 又, 取任意确定的零因子 $x>\perp$ 且 $x\otimes x=\perp$ (这样的 x 一定存在, 因为由前提条件 "C 含有零因子", 即有 $u, v>\perp$ 使 $u\otimes v=\perp$. 如果 $u\leqslant v$, 则 $u\leqslant v\leqslant\neg u$, 于是 $u\otimes u=\perp$; 如是 $v\leqslant u$, 则 $v\leqslant u\leqslant\neg v$, 于是 $v\otimes v=\perp$, 即取 $x=u$ 或 $x=v$ 即可), 有

$$y\to\neg\neg x=y\to(\neg x\to\perp)=\neg x\to(y\to\perp)=\neg x\to\neg y=\neg x\to\perp=\neg\neg x,$$

进而 (注意, $\neg\neg x\leqslant y$, 即 $y\nleqslant\neg\neg x$. 否则, 若 $y\leqslant\neg\neg x$, 则由上式得 $\neg\neg x=\top$, 从而 $\neg x=\neg\neg\neg x=\neg\top=\perp$. 又由 $x\otimes x=\perp$ 可得 $x\leqslant\neg x$, 于是, $x\leqslant\perp$, 矛盾!)

$$y\otimes\neg\neg x=y\otimes(y\to\neg\neg x)=y\wedge\neg\neg x=\neg\neg x.$$

又由 $\neg\neg x\geqslant x$ 及 $x>\perp$ 知 $\neg\neg x>\perp$, 所以由上式并应用引理 3.3.4 (1) 得 $y=\top$. 这说明除了 $\perp$ 及 $\top$ 外均为零因子, 即 (1) 成立.

(2) 当 $x=\perp$ 或 $\top$ 时, 显然有 $\neg\neg x=x$. 现设 $x\in C\backslash\{\perp, \top\}$, 由 (1) 知 x 是零因子, 从而 $\neg x>\perp$(因 x 是零因子, 故存在 $u>\perp$ 使 $x\otimes u=\perp$. 于是 $\neg x\geqslant u>\perp$). 分以下几种情况讨论:

若 $\neg x \leqslant x$, 则 $\bot < \neg x \leqslant x \leqslant \neg\neg x$, 从而

$$\begin{aligned}\neg x &= \neg x \wedge x = x \otimes (x \to \neg x),\\ \neg x &= \neg x \wedge \neg\neg x = \neg\neg x \otimes (\neg\neg x \to \neg x)\\ &= \neg\neg x \otimes (x \to \neg\neg\neg x) = \neg\neg x \otimes (x \to \neg x).\end{aligned}$$

由引理 3.3.4 (2) 得于 $\neg\neg x = x$.

若 $x < \neg x$, 则 $\neg\neg x \leqslant \neg x$, 又 $x \leqslant \neg\neg x$, 故 $\bot < x \leqslant \neg\neg x \leqslant \neg x$, 从而

$$x = x \wedge \neg\neg x = \neg\neg x \otimes (\neg\neg x \to x),$$

于是

$$\begin{aligned}\neg x &= [\neg\neg x \otimes (\neg\neg x \to x)] \to \bot\\ &= (\neg\neg x \to x) \to (\neg\neg x \to \bot) = (\neg\neg x \to x) \to \neg\neg\neg x = (\neg\neg x \to x) \to \neg x.\end{aligned}$$

进而 (注意, 因为 $(\neg\neg x \to x) \to \neg x = \neg x > \bot$, 即 $(\neg\neg x \to x) \nleqslant \neg x$, 故 $\neg x \leqslant \neg\neg x \to x$)

$$\neg x = (\neg\neg x \to x) \wedge \neg x = (\neg\neg x \to x) \otimes [(\neg\neg x \to x) \to \neg x] = (\neg\neg x \to x) \otimes \neg x.$$

由引理 3.3.4(1) 得 $\neg\neg x \to x = \top$, 所以 $\neg\neg x = x$.

定理 3.3.4 任意饱和的且不可约的 BL–链 C, 必属于以下两种情况之一:

(1) C 是一个 MV–链, 当含有零因子时;

(2) C 是一个 Π–链, 当不含零因子时.

证明 如果 C 有零因子, 则由引理 3.3.5 知 C 是一个 MV–代数 (见定义 3.2.3). 如果 C 没有零因子, 则对任意 $x \in C$, $x > \bot$ 蕴涵 $\neg x = \bot$, 进而 $x \wedge \neg x = \bot$(显然, 当 $x = \bot$ 时也有 $x \wedge \neg x = \bot$). 此外, 若 $\bot < y \in C$, 则因为

$$x \otimes (x \to (x \otimes y)) = x \wedge (x \otimes y) = x \otimes y > \bot,$$

故应用引理 3.3.4 (2) 得 $x \to (x \otimes y) = y$. 于是 $\forall z \in C$,

$$\begin{aligned}[(z \otimes x) \to (y \otimes x)] \to (z \to y) &= [z \to (x \to (y \otimes x))] \to (z \to y)\\ &= (z \to y) \to (z \to y) = \top = \neg\neg x,\end{aligned}$$

即 $\neg\neg x \leqslant [(z \otimes x) \to (y \otimes x)] \to (z \to y)$. 由于此不等式当 $x = \bot$ 时也成立, 故据定义 3.2.9 知 C 是 Π–链.

由推论 3.3.1 及定理 3.3.4, 可得到饱和 BL–链的结构定理:

定理 3.3.5 每一个饱和链 C 可表示为如下的序数和:

$$C = \bigoplus_{i \in I} M_i,$$

其中, I 是有界全序集, 每一个 M_i 或是 G–链, 或是 MV–链, 或是 Π–链.

可以证明, 有限 BL–链一定是饱和的, 且非平凡有限 Π–链仅有两元链$\{\bot, \top\}$. 因此, 下面的推论成立.

推论 3.3.3　任意有限 BL–链是 MV–链和 G–链的有限序数和.

定理 3.3.6　每一个 BL–链 C 都可同构嵌入到一个饱和 BL–链 $\bar{C}$ 中, 而且 C 在 $\bar{C}$ 中稠密, 即对任意两个 $\bar{C}\backslash C$ 中的新幂等元 $u \leqslant u'$, 存在 $x \in C$ 使得 $u \leqslant x \leqslant u'$.

证明　设 C 是 BL–链, S 是 C 的所有非饱和剖分构成的集合. 对任意$\alpha\in S$, α的上半部分记为α^+, 下半部分记为α^-. 令 $\bar{C} = C \cup S$, 并定义 $\bar{C}$ 上的序关系 $\preceq$ 如下 (注意, $\leqslant$ 是指 C 中的序关系):

$$\forall x, y \in \bar{C}, x \preceq y \text{ 当且仅当 } \begin{cases} x, y \in C \text{ 且 } x \leqslant y, \\ x, y \in S \text{ 且 } x^- \subseteq y^-, \\ x \in C, y \in S \text{ 且 } x \in y^-, \\ x \in S, y \in C \text{ 且 } y \in x^+, \end{cases}$$

则 $\preceq$ 是 $\bar{C}$ 上的全序关系, 且其界为 $\bot_C$, $\top_C$(即 C 的界). 同时, 按如下方法扩充 C 的运算 $\otimes$ 和 $\to$ 到 $\bar{C}$ 上 ($\forall x \in \bar{C}$, $\alpha\in S$, $c \in C$):

$\alpha\otimes x = x\otimes\alpha=\min\{\alpha, x\}$, 其中, min 是关于全序 $\preceq$ 的;

$$\alpha \to x = \begin{cases} \top, & \alpha \preceq x, \\ x, & \alpha \prec x. \end{cases} \qquad c \to \alpha = \begin{cases} \top, & c \in \alpha^-, \\ \alpha, & c \in \alpha^+. \end{cases}$$

可以验证, $\bar{C}$ 关于上述这些运算构成 BL–链, 下证 $\bar{C}$ 是饱和的.

设 $\bar{\alpha}$ 是 $\bar{C}$ 的一个剖分, 显然$\alpha=\bar{\alpha} \cap C$ 是 C 的一个剖分, 且$\alpha^+ = \bar{\alpha}^+ \cap C$, $\alpha^- = \bar{\alpha}^- \cap C$. 存在如下两种可能情况: (1) α由幂等元 $u \in C$ 决定; (2) $\alpha\in S$.

对于情况 (1), 设 $x \in \bar{\alpha}^+$. 若 $x \in C$, 则 $x \in\alpha^+$, 从而 $u \preceq x$. 若 $x = \beta \in S$, 假定 $u \in \beta^+$. 因为 $\beta \in S$, 故有 $b \in \beta^+$ 使得 $b \leqslant u$, 于是 $b \in\alpha^- \subseteq \bar{\alpha}^-$, $\beta \prec b$, 这是一个矛盾. 因此, $x \in \bar{\alpha}^+ \Rightarrow x \succeq u$. 对偶地, 可证明 $x \in \bar{\alpha}^- \Rightarrow x \preceq u$. 这说明, $\bar{\alpha}$ 是由 u 决定的.

对于情况 (2), 设 $x \in \bar{\alpha}^+$. 若 $x \in C$, 则 $x \in\alpha^+$, 从而$\alpha\prec x$. 若 $x = \beta \in S$, 假定 $\beta^- \subseteq\alpha^-$, 若 $a \in\alpha^-\backslash\beta^-$, 则 $a \in\alpha^-$ 且 $a \in \beta^+$, 即 $\beta \prec a$, 这是一个矛盾. 所以, $x \in \bar{\alpha}^- \Rightarrow x \succeq \alpha$. 对偶的结果也成立, 从而说明 $\bar{\alpha}$ 是由α决定的.

综上所述, $\bar{C}$ 是饱和的. 而由 $\bar{C}$ 的构造方法知 C 可同构嵌入 $\bar{C}$ 中, 且满足稠密性条件.

注 3.3.4　(1) 上述证明思想的本质是, 将原来的非饱和剖分通过在 “中间” 增加幂等元, 使其成为新链中的饱和剖分, 也可参阅文献 [159] 中 Theorem 3 的证明.

(2) 如果 BL– 链 C 不是 G– 链、MV– 链或 Π– 链, 则 $\bar{C}$ 包含这样的闭区间 $[\alpha, \beta]$, 其中, α, β是在 $\bar{C}$ 中的幂等元, $(\alpha, \beta)\subseteq C$, $C\backslash((\alpha, \beta)\cup\{\bot, \top\})\neq\varnothing$ 且 $[\alpha,\beta]_{\bar{C}}$ 是 MV– 链或 Π– 链.

3.3.4 部分嵌入与标准完备性

定义 3.3.7 设 A, B 是一个 BL– 链, S 是 A 的有限子集且使得$\{\bot, \top\}\subseteq S$. 具有定义域 S 的从 A 到 B 的一个部分嵌入 (partial embedding) 是一个函数 f: $S\to B$, 它满足以下条件 $(\forall x, y, z\in S)$:

(PE1) $x\leqslant y$ 当且仅当 $f(x)\leqslant f(y)$;

(PE2) $x\otimes y=z$ 蕴含 $f(x)\otimes f(y)=f(z)$;

(PE3) $x\to y=z$ 蕴含 $f(x)\to f(y)=f(z)$;

(PE4) $f(\bot)=\bot$, $f(\top)=\top$.

称 BL– 链 A 可部分嵌入到 BL– 链 B 中, 如果 A 的任意包含 $\bot$ 和 $\top$ 的有限子集均是 A 到 B 的一个部分嵌入的定义域. 称 A 可部分嵌入到一个 BL– 链族$\{B_i\}_{i\in I}$ 中, 如果 A 的任意包含 $\bot$ 和 $\top$ 的有限子集均是 A 到某个 B_i 的一个部分嵌入的定义域.

引理 3.3.6 设 A 是 BL– 链且可部分嵌入到一个 BL– 链簇$\{B_i\}_{i\in I}$ 中. 如果一个 BL–等式在 A 中不成立, 则必存在 $i\in I$ 使得这一等式在 B_i 中也不成立.

证明 假设一个等式在 A 中不成立, 可假设此等式的形式为 $\tau(x_1,\cdots,x_n)=\top$, 其中, τ 是变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 BL– 项 (BL-term), 则存在 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 使得 $\tau^A(a_1,\cdots,a_n)<\top$. 设 S 是由 τ 的所有子项通过赋值于 A(用 a_i 代替变量 x_i, i=1, $\cdots$, n) 构成的集合 (包括 $\bot$, $\top$). 由已知条件, 必存在 $i\in I$ 使得 S 是从 A 到 B_i 的部分嵌入 f 的定义域. 从而对于 $\tau(x_1,\cdots,x_n)$ 的每一个子项$\sigma(x_1,\cdots,x_n)$ 有

$$f(\sigma^A(a_1,\cdots,a_n))=\sigma^{B_i}(f(a_1),\cdots,f(a_n)).$$

所以, 由 (PE1) 和 (PE4) 可以得到 $\tau^{B_i}(f(a_1),\cdots,f(a_n))=f(\tau^A(a_1,\cdots,a_n))<\top$.

注 3.3.5 与系统 **BL** 的公式 φ 相对应的 BL– 项 (常记为 $\varphi^\bullet$), 是指替换公式中 φ 的逻辑联结词 $\to$, &, $\wedge$, $\vee$, $\bar{0}$, $\bar{1}$ 为函数符号及常元 $\to$, $\otimes$, $\wedge$, $\vee$, 0, 1 且将命题变量 p_i 替换为对象变量 x_i 后得到的表达式. 对于 BL– 代数 L, 容易验证, φ 是 L–重言式当且仅当等式 $\varphi^\bullet$=1 在 L 中成立 (参见文献 [22] 中 Definition 2.3.17 及 Lemma 2.3.18).

一个 O– 群 $(G; +, -, 0)$ 是指全序的可换序群, 其中, 0 为单位元 (有时也用 1 表示单位, 但这里用 0 更方便一些, 目的是避免与实数 1 混淆). 记 $\mathbf{R}$ 为带有自然顺序的实数加法群, 它是一个 O– 群. 有下述结论 (可查阅文献 [172]).

定理 3.3.7　设 G 是一个 O–群, 对每一个 G 的有限子集 S, 存在一个函数 f: $S\to\mathbf{R}$ 满足下面的性质 ($\forall a, b, c\in S$):

(PG1) $a\leqslant b$ 当且仅当 $f(a)\leqslant f(b)$;

(PG2) $a+b=c$ 蕴含 $f(a)+f(b)=f(c)$;

(PG3) 如果 $0\in S$, 则 $f(0)=0$;

(PG4) $b=-a$ 当且仅当 $f(a)=-f(b)$.

设 G 是一个 O–群, 如果 $0< u\in G$, 则区间 $[0, u]=\{x\in G\text{: } 0\leqslant x\leqslant u\}$构成 MV–链, 其中运算如下定义: $x\otimes y=\max\{0, x+y-u\}$, $x\to y=\min\{u, u-x+y\}$, 且 $\perp=0$. 这个 MV–链记为 $\mathbf{\Gamma}(G, u)$. 可以证明 (见文献 [25], [173]), 对每一个 MV–链 C, 都存在一个 O–群 G 和 $0< u\in G$, 使得 C 同构于 $\mathbf{\Gamma}(G, u)$. 此外, 标准 MV–链与 $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}, 1)$ 是一致的.

定理 3.3.8　每一个 MV–链 C 都可部分嵌入到标准 MV–链中.

证明　对于 MV–链 C, 存在 O–群 G 和 $0< u\in$G, 使得 C 同构于 $\mathbf{\Gamma}(G, u)$. 设 S 是 G 的任意有限子集, 不妨设 $S=\{0=a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n=u\}\subseteq G$. 令 $S^+=\{a_i+a_j : 0\leqslant i, j\leqslant n\}$. 因为 $0=a_0$, 故有 $S\subseteq S^+$. 由定理 3.3.7, 存在一个函数 f:$S^+\to\mathbf{R}$ 满足性质 (PG1)$\sim$ (PG4). 设 g 为 f 在 S 上的限制. 以下证明 $h=(1/g(u))g$ 是 C 到 $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}, 1)$ 的一个部分嵌入.

性质 (PE1) 和 (PE4) 显然成立, 仅需要证明 (PE2) 和 (PE3) 成立. 假设 $a_i\otimes a_j=a_k$. 如果 $k>0$, 则 $a_i+a_j-u=a_k$, 即 $a_i+a_j=u+a_k$. 因为 $a_i, a_j, u=a_n, a_i+a_j$ 及 $u+a_k$ 均属于 S^+, 所以 $f(a_i)+f(a_j)=f(a_i+a_j)$, $f(u)+f(a_k)=f(u+a_k)$. 进而, $f(a_i)+f(a_j)=f(a_i+a_j)=f(u+a_k)=f(u)+f(a_k)$, 即 $f(a_i)+f(a_j)-f(u)=f(a_k)$, $g(a_i)+g(a_j)-g(u)=g(a_k)$, $(1/g(u))g(a_i)+(1/g(u))g(a_j)-1=(1/g(u))\ g(a_k)$, 亦即 $h(a_i)+h(a_j)-1=h(a_k)$, $h(a_i)\otimes h(a_j)=h(a_k)$. 假设 $k=0$, 则 $a_i+a_j\leqslant$u, $f(a_i)+f(a_j)=f(a_i+a_j)\leqslant f(u)$, 所以 $h(a_i)\otimes h(a_j)=0$. 这说明 h 满足性质 (PE2). 假设 $a_i\to a_j=a_k$. 如果 $k=n$, 则 $a_i\leqslant a_j$, 从而 $f(a_i)\leqslant f(a_j)$, 进而 $h(a_i)\to h(a_j)=1$. 如果 $k<n$, 则 $u-a_i+a_j=a_k$, 即 $u+a_j=a_i+a_k$, 于是 $f(u)+f(a_j)=f(u+a_j)=f(a_i+a_k)=f(a_i)+f(a_k)$. 从而, $h(a_i)\to h(a_j)=h(a_k)$. 这说明 h 满足性质 (PE3).

由引理 3.3.6, 并应用上述定理 3.3.8 可得如下的 MV–代数完备性定理 (此即本书前述的定理 3.2.3).

推论 3.3.4　一个等式在所有 MV–代数中成立, 当且仅当它在标准 MV–链中成立.

设 G 是 O–群和 $\perp$ 是不属于 G 的一个元素, 在集合 $G^-\cup\{\perp\}$上定义了二元运

算 $\otimes$ 和 $\to$ 如下 (这里的 G^- 是 G 的负锥):

$$x \otimes y = \begin{cases} x+y, & x, y \in G^-, \\ \bot, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$x \to y = \begin{cases} \min\{0, y \to x\}, & x, y \in G^-, \\ 0, & x = \bot, \\ \bot, & x \in G^-, y = \bot. \end{cases}$$

容易验证 $(G^- \cup \{\bot\}; \otimes, \to, \bot, 0)$ 是一个 Π- 代数, 将被记为 $\mathscr{P}(G)$. 在文献 [174], [175] 中证明, 对任意给定的 Π- 链 C, 必存在一个 O- 群 G, 使得 C 同构于 $\mathscr{P}(G)$. 同时, 可以验证如下定义的函数 f: $[0,1] \to \mathbf{R}^- \cup \{\infty\}$是从标准 Π- 链到 Π- 链 $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ 的同构:

$$f(x) = \begin{cases} \log(x), & x > 0, \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

定理 3.3.9 每一个Π- 链 C 都可部分嵌入到标准Π- 链中.

证明 不失一般性, 可以假设 $C = \mathscr{P}(G)$, 这里 G 是 O- 群. 只需证明 $\mathscr{P}(G)$ 可部分嵌入到Π- 链 $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ 中.

设 $S=\{\bot = a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n=0\} \subseteq G^- \cup \{\bot\}$, 且假设 $a_i < a_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$. 取 $S_1=\{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, -a_{n-1}, \cdots, -a_1\}$. 由定理 3.3.7 知, 存在映射 f: $S_1 \to \mathbf{R}$ 满足性质 (PG1)$\sim$ (PG4). 定义映射 g: $S \to \mathscr{P}(\mathbf{R})$ 如下:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \backslash \{\bot\}, \\ \infty, & x = \bot. \end{cases}$$

直接由运算的定义可得, $a_i + a_j = a_k \Rightarrow g(a_i) + g(a_j) = g(a_k)$, $\forall i, j, k=0, 1, \cdots, n$. 如果 $a_i \to a_j = a_n$, 则 $a_i \leqslant a_j$, 从而 $g(a_i) \leqslant g(a_j)$, 进而 $g(a_i) \to g(a_j)=0=g(a_n)$. 如果 $a_i \to a_j = a_k$, 这里 $0 < k < n$, 则 $i > 0$, $j > 0$, $a_j - a_i = a_k$. 因为 $-a_i \in S_1$, $f(a_j) - f(a_i) = f(a_k)$, 从而 $g(a_i) \to g(a_j) = g(a_k)$. 如果 $a_i \to a_j = a_0$, 则 $i > 0$, $j=0$, 同样有 $g(a_i) \to g(a_j) = g(a_k)$.

推论 3.3.5 一个等式在所有 Π- 代数中成立, 当且仅当它在标准 Π- 链中成立.

容易得到如下结论 (可直接验证, 也可参阅文献 [22] 中的 Lemma 4.2.14 及 Corollary 4.2.15).

引理 3.3.7 每一个 G- 链 C 都可部分嵌入标准 G- 链中.

定理 3.3.10 每一个 BL- 链 C 都可部分嵌入到由所有 t 代数构成的族中.

证明　由定理 3.3.6, 可假定 C 是饱和 BL- 链. 据定理 3.3.5, $C = \bigoplus_{i\in I} M_i$, 这里 I 是有界全序集, 且每一个 M_i 或是 G- 链, 或是 MV- 链, 或是 Π- 链. 设 S 是 C 的非空有限子集, 则有 I 的有限子集$\{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}, i_n\}\subseteq I$, 使得

$$S \subseteq \bigcup_{k\leqslant n} M_{i_k}, \quad \perp^{M_{i_0}} = \perp^C.$$

对于任意 $k \leqslant n$, 存在 $a_k, b_k \in C$, 使得 $M_{i_k} = [a_k, b_k]_C$. 定义 $S_k = S\bigcap(a_k, b_k)$, $k \leqslant n$; $S_{n+1} = S\setminus \bigcup_{k\leqslant n} S_k$. 设 $0=r_0 < s_0 \leqslant r_1 < s_1 \leqslant \cdots \leqslant r_n < s_n=1$ 是有理数, 且满足 $r_k = s_{k+1} \Leftrightarrow a_k = b_k + 1$ 及

$$[0, 1] = \left(\bigcup_{k\leqslant n} [r_k, s_k]\right) \bigcup \left(\bigcup_{k<n} [s_k, r_{k+1}]\right).$$

令 $E=Idp(C)$. 如果 $[a_k, b_k]_C \in G(E)$ 或 $a_k = b_k$, 则赋予 BL- 代数结构的区间 $[r_k, s_k]$ 同构于标准 G- 链. 如果 $[a_k, b_k]_C$ 是 MV- 代数或 Π- 代数, 则 $[r_k, s_k]$ 分别同构于标准 MV- 链或标准 Π- 链. 如果 $b_k < a_{k+1}$, 则可使 $[s_k, r_{k+1}]$ 同构于标准 G- 链. 设 T_C 是这些区间 t 代数的原始和 (忽略那些满足 $s_k = r_{k+1}$ 的平凡区间 $[s_k, r_{k+1}]$). 如果 $S_k \neq \varnothing$, 则由引理 3.3.6 及引理 3.3.7 知, 存在部分嵌入 f_k: $S_k \to[r_k, s_k]$. 而函数 f_{n+1}: $S_{n+1} \to[0, 1]$ 是 S_{n+1} 到 T_C 的一个部分嵌入, 这里 $f_{n+1}(a_k) = r_k(a_k \in S_{n+1}$ 时), $f_{n+1}(b_k) = s_k(b_k \in S_{n+1}$ 时). 于是, 函数 g: $S \to[0, 1]$ 确定了一个 S 到 T_C 的一个部分嵌入, 这里 $g(x) = f_i(x)$(当 $x \in S_i$ 时, $i=0, 1,\cdots, n, n+1$).

推论 3.3.6(BL- 代数的完备性)　一个等式在所有 BL- 代数中成立, 当且仅当它在所有 t 代数中成立.

3.4　模糊逻辑系统 $\mathscr{L}^*$

3.4.1　R_0- 代数及其完备性

定义 3.4.1[11]　设 M 是 $(\neg, \vee, \to)$ 型代数, 如果 M 上有偏序 $\leqslant$ 使 $(M; \leqslant)$ 成为有界分配格, $\vee$ 是关于序 $\leqslant$ 的上确界运算, $\neg$ 是关于序 $\leqslant$ 的逆序对合对应, 且 $(\forall a, b, c \in M)$

(M1) $\neg a \to \neg b = b \to a$;

(M2) $1\to a = a$, $a \to a =1$;

(M3) $b \to c \leqslant (a \to b) \to (a \to c)$;

(M4) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$;

(M5) $a \to (b \vee c)=(a \to b) \vee (a \to c)$, $a \to (b \wedge c)=(a \to b) \wedge (a \to c)$;

(M6) $(a \to b)\vee((a \to b) \to \neg a \vee b)=1$.

这里 1 是 $(M; \leqslant)$ 中的最大元, 则称 M 为 R_0– 代数.

如果 $(\neg, \vee, \to)$ 型代数 M 满足上述除 (M6) 外的所有性质, 则称 M 为弱 R_0– 代数.

以下也用 a' 表示 $\neg a$. 又, De Morgan 对偶律成立, 即 $(a\vee b)' = a' \wedge b'$, $(a\wedge b)' = a' \vee b'$.

例 3.4.1[11] 在单位区间 [0, 1] 上规定 $a'=1-a$, $a \vee b=\max\{a, b\}$, 且

$$a \to b = R_0(a,b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b, \end{cases}$$

则 $([0, 1]; ', \vee, \to)$ 是 R_0– 代数, 称为 R_0 单位区间.

命题 3.4.1[11] 设 M 是全序 R_0– 代数, 则 $(\forall a, b \in M)$

$$a \to b = \begin{cases} 1, & a \leqslant b, \\ a' \vee b, & a > b. \end{cases}$$

命题 3.4.2[11] 设 M 是 R_0– 代数, 则以下性质成立 $(\forall a, b, c \in M)$:

(P1) $a \to b =1$ 当且仅当 $a \leqslant b$;

(P2) $a \leqslant b \to c$ 当且仅当 $b \leqslant a \to c$;

(P3) $a \vee b \to c=(a \to c) \wedge (b \to c)$, $a \wedge b \to c=(a \to c) \vee (b \to c)$;

(P4) 若 $b \leqslant c$, 则 $a \to b \leqslant a \to c$; 若 $a \leqslant b$, 则 $b \to c \leqslant a \to c$;

(P5) $a \to b \geqslant a' \vee b$;

(P6) $(a \to b) \vee (b \to a)=1$;

(P7) $a \wedge a' \leqslant b \vee b'$;

(P8) $a \to (b \to a)=1$;

(P9) $a \to (a' \to b)=1$;

(P10) $a \vee b=((a \to b) \to b)\wedge((b \to a) \to a)$;

(P11) $a \to b \leqslant a \vee c \to b \vee c$, $a \to b \leqslant a \wedge c \to b \wedge c$;

(P12) $a \to b \leqslant (a \to c) \vee (c \to b)$.

应用上述性质, 容易验证 $(\forall a \in M)a' = a \to 0$. 这里 0 是最小元 (由定义 3.4.1, $(M; \leqslant)$ 是有界格, 故最小元 0 是存在的).

命题 3.4.3[11] 设 M 是 R_0– 代数, 在 M 中引入算子 $\oplus$ 与 $\otimes$ 如下:

$$a \oplus b = a' \to b, \quad a \otimes b = (a \to b')', \quad a, b \in M,$$

则

(P13) $(M; \oplus, 0)$ 是以 0 为单位的交换半群;

(P14) $(M; \otimes, 1)$ 是以 1 为单位的交换半群;

(P15) $\oplus$ 与 $\otimes$ 都是单调算子;

(P16) $a \otimes b \leqslant a \wedge b \leqslant a \vee b \leqslant a \oplus b$;

(P17) $a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \to c$;

(P18) $a \otimes b \to c = a \to (b \to c)$, $a \to (b \to (a \otimes b))=1$;

(P19) $a \otimes a'=0$, $a \oplus a'=1$;

(P20) $na=2a$, $a^n = a^2$, 这里 $n \geqslant 2$, $na = \underbrace{a \oplus \cdots \oplus a}_{n个}$, $a^n = \underbrace{a \otimes \cdots \otimes a}_{n个}$;

(P21) $a \otimes (b \vee c)=(a \otimes b) \vee (a \otimes c)$;

(P22) $(a \vee b)^n = a^n \vee b^n$;

(P23) $a^2 \to (b \to c)=(a^2 \to b) \to (a^2 \to c)$.

注 3.4.1　(1) 由 R_0– 代数的上述性质容易看出, R_0– 代数关于 $(\wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 构成可换剩余格.

(2) BL– 代数与 R_0– 代数互不包含, MV– 代数与 R_0– 代数也是互不包含的.

以下结论的证明留给读者.

定理 3.4.1　设 $(L; \wedge, .\vee, \otimes, .\to, 0, 1)$ 是一个可换剩余格, 在 L 上定义 $\neg$ 为

$$x' = x \to 0, \quad \forall x \in L,$$

则 $(L; ', \vee, \to)$ 构成 R_0– 代数的充要条件是 L 满足:

$$\neg\neg x = x, \quad (x \to y) \vee ((x \to y) \to \neg x \vee y) = 1, \quad \forall x, y \in L.$$

设$\{M_i|i \in I\}$是一族 R_0– 代数, 在笛卡儿积 $M = \prod\limits_{i \in I} M_i$ 中点式定义偏序 $\leqslant$ 及运算 $'$, $\vee$, 和 $\to$, 则 M 构成一个 R_0– 代数, 称为$\{M_i|i \in I\}$的乘积 R_0– 代数.

定理 3.4.2[11]　每个 R_0– 代数都同构于一族全序 R_0– 代数的乘积 R_0– 代数的某个子代数.

定义 3.4.2[11]　设 $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个不同的符号, $X=\{x_1, \cdots, x_n\}$, $F(X)$ 是由 X 生成的 $(', \vee, \to)$ 型自由代数, 这里 $'$ 为一元运算, $\vee$ 与 $\to$ 是二元运算. 设 $f(x_1, \cdots, x_n) \in F(X)$, 则称形如 (其中, $=$ 与 1 都是符号)

$$f(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

的等式为 R_0– 等式. 设 M 是 R_0– 代数, 1_M 是其最大元, 如果对 M 的任意 n 个元 $a_1, \cdots, a_n$ 恒有

$$\bar{f}(a_1, \cdots, a_n) = 1_M, \quad a_1, \cdots, a_n \in M,$$

这里 = 是等号, 且 $\bar{f}$ 作用于 $a_1, \cdots, a_n$ 的方式恰如 f 作用于 $x_1, \cdots, x_n$ 的方式, 则称上述 R_0–等式在 R_0–代数 M 中成立.

定理 3.4.3(R_0–代数的完备性定理)[11] 一个 R_0–等式在每个 R_0–代数中都成立当且仅当它在 R_0 单位区间 [0, 1] 中成立.

3.4.2 形式演算系统 $\mathscr{L}^*$ 的语义和语构理论

定义 3.4.3[11] 设 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$, $F(S)$ 是 S 生成的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型自由代数, 称 $F(S)$ 中的元为 $\mathscr{L}^*$ 系统中的公式 (或命题), 称 S 中的元为 $\mathscr{L}^*$ 系统中的原子公式 (或原子命题). 在 $\mathscr{L}^*$ 系统中约定 $A \wedge B$ 表示 $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

定义 3.4.4[11] 设 $v{:}F(S) \rightarrow [0, 1]$ 是映射, $[0, 1]_{R_0}$ 为 R_0 单位区间 [0, 1]. 若 v 是 $F(S)$ 到 $[0, 1]_{R_0}$ 的 $(\neg, \vee, \rightarrow)$ 型同态, 即

$$v(\neg A) = \neg v(A) = 1 - v(A),$$

$$v(A \vee B) = v(A) \vee v(B) = \max\{v(A), v(B)\},$$

$$v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B) = R_0(v(A), v(B)),$$

则称 v 为 $F(S)$ 在 R_0 单位区间中的赋值, 简称赋值. $F(S)$ 的全体赋值之集记为 Ω.

定义 3.4.5[11] 设 $A, B \in F(S)$.

(1) 如果对任意 $v \in \Omega$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为重言式, 记为 $\models A$.

(2) 如果对任意 $v \in \Omega$ 均有 $v(A) = v(B)$, 则称 A 与 B 逻辑等价, 记为 $A \approx B$.

定义 3.4.6[11] 形式系统 $\mathscr{L}^*$ 中的公理由以下形式的公式组成:

(L*1) $A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$;

(L*2) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$;

(L*3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$;

(L*4) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

(L*5) $A \rightarrow \neg\neg A$;

(L*6) $A \rightarrow (A \vee B)$;

(L*7) $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$;

(L*8) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$;

(L*9) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)$;

(L*10) $(A \rightarrow B) \vee ((A \rightarrow B) \rightarrow \neg A \vee B)$.

$\mathscr{L}^*$ 中的推理规则为 MP 规则.

$\mathscr{L}^*$ 中的证明、定理等概念可与定义 1.5.8 同样的方式定义, 也用 $\vdash A$ 表示 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理.

定义 3.4.7[11] 设 $A, B \in F(S)$. 如果 $\vdash A \rightarrow B$ 且 $\vdash B \rightarrow A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记为 $A \sim B$.

定理 3.4.4[11]　可证等价关系是 $F(S)$ 上的 $(\neg, \vee, \to)$ 型同余关系, 即

(1) 若 $A \sim B$, 则 $\neg A \sim \neg B$;

(2) 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \vee C \sim B \vee D$;

(3) 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \to C \sim B \to D$.

定理 3.4.5[11]　$F(S)$ 关于可证等价关系的商 $[F]=F(S)/\sim$ 构成一个 R_0- 代数, 其中的偏序定义为

$$[A] \leqslant [B] \text{ 当且仅当 } \vdash A \to B$$

且 $\neg [A] = [\neg A]$, $\sup\{[A], [B]\} = [A \vee B]$.

定理 3.4.6(可靠性定理)[11]　设 $A \in F(S)$, 若 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理, 则 A 是重言式, 即若 $\vdash A$, 则 $\models A$.

定理 3.4.7(完备性定理)[11]　设 $A \in F(S)$, 则 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的定理当且仅当 A 是重言式, 即 $\vdash A$ 当且仅当 $\models A$.

对于经典逻辑形式系统 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$(见 1.5 节), 如下的演绎定理成立: 设 $\Gamma \subseteq F(S)$, A, $B \in F(S)$. 如果 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, 则 $\Gamma \vdash A \to B$. 在系统 $\mathscr{L}^*$ 中, 演绎定理不成立, 但有下述的广义演绎定理.

定理 3.4.8(广义演绎定理)[11]　设 $\Gamma \subseteq F(S)$, A, $B \in F(S)$. 如果 $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, 则 $\Gamma \vdash A^2 \to B$. 这里, A^2 表示 $A \otimes A$.

注 3.4.2　关于形式系统 $\mathscr{L}^*$, 文献 [176]~[181] 从不同角度做了进一步研究, 如文献 [176] 给出完备性定理的更为数学化的证明、并提出形式化系统 $\mathscr{L}_n^*$; 文献 [178], [181] 给出系统 $\mathscr{L}^*$ 的一些等价形式.

以下介绍裴道武教授在文献 [30], [43] 中给出的形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的强完备性定理及简化公理系.

设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, v 为 $F(S)$ 在 R_0 单位区间中的赋值. A 称为 Γ 的语义结论, 如果对任意的赋值 v, 当 $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$时总有 $v(A)=1$. 记为 $\Gamma \models A$.

定理 3.4.9(强完备性定理)[30]　设 $\Gamma \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 则 A 是 $\mathscr{L}^*$ 中的Γ-结论当且仅当 A 是 Γ 的语义结论, 即 $\Gamma \vdash A$ 当且仅当 $\Gamma \models A$.

定义 3.4.8[43]　形式系统 $\mathbf{NM}^*$ 中的公理由以下形式的公式组成:

(Ax*1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

(Ax*2) $A \wedge B \to A$;

(Ax*3) $A \wedge B \to B \wedge A$;

(Ax*4) $A \to ((A \to B) \to A \wedge B)$;

(Ax*5) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$;

(Ax*6) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$;

(Ax*7) $(A \& B \to \bar{0}) \vee (A \wedge B \to A \& B)$,

NM* 中的推理规则为 MP 规则. 这里, $\bar{0}$ 为真值常量, $A\&B$ 是 $\neg(A \to \neg B)$ 的简写, $A \vee B$ 是 $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ 的简写.

定理 3.4.10[43] 形式系统 NM* 与 $\mathscr{L}^*$ 等价.

习 题 3

1. 给出定理 3.1.1、定理 3.2.1 及定理 3.4.1 的证明.

2. 能否通过在系统 **BL** 的基础上添加推理规则得到其扩张形式 **Π** 及 **SBL**, 可参考定理 3.2.5、定理 3.2.6.

3. 试证明以下结论: 有限 BL–链一定是饱和的, 且非平凡有限Π–链仅有两元链$\{0, 1\}$.

4. 深入研究 3.3 节, 考虑能否简化系统 **BL** 标准完备性定理的证明过程, 或给出其他证明方法.

5. 举例说明, 在系统 **BL** 中演绎定理也不成立. 研究系统 **BL** 的广义演绎定理和强完备性定理 (论证或举反例).

6. 阅读相关文献 (如 [22], [165]~[167]), 了解系统 **BL** 的各种扩张形式 (如 $\mathbf{BL}_{\boldsymbol{\Delta}}$, $\mathbf{SBL}_{\sim}$, **ŁΠ**, $\mathbf{Ł\Pi_{1/2}}$, **PŁ**, **PŁ′** 等), 并分析它们之间的关系.

7. 讨论形式系统 **NM*** 各公理的独立性 (这是文献 [43] 中的一个公开问题).

第 4 章　基于左连续 t–模的模糊逻辑系统 MTL 与 UL*

4.1　模糊逻辑系统MTL

4.1.1　形式系统 MTL 与系统 IMTL/WNM/NM

由定理 2.1.2、定理 2.1.3 及定理 2.1.5 知, 一个 t–模可确定一个剩余蕴涵当且仅当它是左连续的, 文献 [40] 中也指出了这一点. 逻辑系统 **MTL**(是独异点 t–模基逻辑的英文简写, 即 monoidal t-norm-based logic) 正是所有左连续 t–模基逻辑的公共完备公理化系统.

定义 4.1.1[40]　对于给定的左连续 t–模 $*$, 命题演算系统 $QPC(*)$ 具有命题变元 $p_1, p_2, \cdots$, 联结词&, $\to$, $\wedge$ 和真值常量 $\bar{0}$. 公式 (formula) 如下定义: 每一个命题变元是公式; $\bar{0}$ 是公式; 如果 φ, ψ 是公式, 则 $\varphi\&\psi$, $\varphi\to\psi$, $\varphi\wedge\psi$ 是公式. 其他联结词定义如下:

$\neg\varphi$ 即是 $\varphi\to\bar{0}$,

$\varphi\vee\psi$ 即是 $((\varphi\to\psi)\to\psi)\wedge((\psi\to\varphi)\to\varphi)$,

$\varphi\equiv\psi$ 即是 $(\varphi\to\psi)\&(\psi\to\varphi)$.

一个赋值 (evaluation) 是一个作用于每个命题变元 p 的映射 e, $e(p)\in[0,1]$. e 可如下唯一扩展到所有公式:

$$e(\varphi\&\psi)=e(\varphi)*e(\psi), e(\varphi\to\psi)=e(\varphi)\Rightarrow e(\psi), e(\varphi\wedge\psi)=\min\{e(\varphi),e(\psi)\}.$$

这里 $\Rightarrow$ 是与左连续 t–模 $*$ 相伴的剩余蕴涵 (以后用 $\to$ 表示 $\Rightarrow$).

按常规方法, 记 S 为原子公式之集 (可数集), 即 $S=\{p_1, p_2, \cdots\}$. 记 $F(S)$ 为所有 (合式) 公式之集.

定义 4.1.2[40]　逻辑系统 **MTL** 由 MP 规则及以下公理组成:

(A1) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$;

(A2) $(\varphi\&\psi)\to\varphi$;

(A3) $(\varphi\&\psi)\to(\psi\&\varphi)$;

(A4) $(\varphi\wedge\psi)\to\varphi$;

(A5) $(\varphi\wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)$;

(A6) $(\varphi\&(\varphi\to\psi))\to(\varphi\wedge\psi)$;

(A7a) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to((\varphi\&\psi)\to\chi)$;

(A7b) $((\varphi\&\psi)\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$;

(A8) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$;

(A9) $\bar{0}\to\varphi$.

注 4.1.1 (1) 容易知道, **MTL** 中添加如下公理即得 **BL** (即 **BL** 是 **MTL** 的语义扩张):

(A6′) $(\varphi\&(\varphi\to\psi))\equiv(\varphi\wedge\psi)$

(2) 命题 3.1.2 及定理 3.1.1 对于 **MTL** 系统也是正确的 [40].

MTL 的一个理论 (theory) 是指一些公式组成的集合, 即一个理论 T 满足 $T\subseteq F(S)$. 符号 $T\vdash\varphi$ 表示 φ 在理论 T 中是可证的. 对于公式 φ 与 ψ, 如果 $T\vdash\varphi\to\psi$ 且 $T\vdash\psi\to\varphi$, 则称 φ 与 ψ 是 T 可证等价的, 记为 $\varphi\equiv_T\psi$.

逻辑系统 **IMTL**, **WNM** 及 **NM** 是系统 **MTL** 的语义扩张 (其名称依次是相应英文名称的缩写: involutive monoidal *t*-norm based logic, weak nilpotent minimums, nilpotent minimums), 即

定义 4.1.3[40] 形式系统 **IMTL** 是在 **MTL** 系统上添加下述公理得到的:

(INV) $\neg\neg\varphi\to\varphi$.

定义 4.1.4[40] 形式系统 **WNM** 是在 **MTL** 系统上添加下述公理得到的:

(WNM) $(\varphi\&\psi\to\bar{0})\vee(\varphi\wedge\psi\to\varphi\&\psi)$.

形式系统 **NM** 是在 **MTL** 系统上添加公理 (INV) 及 (WNM) 得到的.

命题 4.1.1[40] 以下公式在 **IMTL** 系统中是可证的:

(1) $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi)$;

(2) $(\varphi\to\psi)\equiv\neg(\varphi\&\neg\psi)$;

(3) $((\varphi\&\psi)\to\chi)\equiv((\psi\&\neg\chi)\to\neg\varphi)$.

文献 [42] 证明了 **IMTL** 系统与下述的 $\mathscr{L}_0^*$ 系统等价.

定义 4.1.5[42] 由 MP 规则及以下公理组成的逻辑系统称为 $\mathscr{L}_0^*$:

(1) $A\to(B\to A)$;

(2) $(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$;

(3) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

(4) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$;

(5) $A\to\neg\neg A$;

(6) $A\to(A\vee B)$;

(7) $(A\vee B)\to(B\vee A)$;

(8) $(A\to C)\wedge(B\to C)\to(A\vee B\to C)$;

(9) $(A\wedge B\to C)\to(A\to C)\vee(B\to C)$;

(10) $A\to(B\to A\wedge B)$;

(11) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$.

定理 4.1.1[42]　IMTL 系统与 $\mathscr{L}_0^*$ 系统等价, 即它们包含完全相同的定理.

文献 [177] 基于强正则剩余格提出如下逻辑系统 $\mathscr{L}^N$, 我们将证明它与 $\mathscr{L}_0^*$ 系统等价, 从而与 IMTL 系统等价 (原始证明来自文献 [182]).

定义 4.1.6[177]　由 MP 规则及公理 (1)~(10) 组成的逻辑系统称为 $\mathscr{L}^N$(这里的公理 (1)~(10) 指定义 4.1.5 中的相应公理).

引理 4.1.1[177]　在 $\mathscr{L}^N$ 系统中, 以下结论成立:

(12) $\vdash A \wedge B \to A$;

(13) $\vdash A \wedge B \to B \wedge A$;

(14) $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$;

(15) $\{A \to B, A \to C\} \vdash A \to B \wedge C$;

(16) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

命题 4.1.2　在 $\mathscr{L}^N$ 系统中, 以下结论成立:

(17) $\{A \to B, C \to D\} \vdash A \wedge C \to B \wedge D$.

证明　(i) $A \wedge C \to A$　(由引理 4.1.1 (12))

(ii) $A \to B$　(已知)

(iii) $A \wedge C \to B$　(由 (i), (ii), 引理 4.1.1 (14))

(iv) $A \wedge C \to C$　(由引理 4.1.1 (12), (13), MP)

(v) $C \to D$　(已知)

(vi) $A \wedge C \to D$　(由 (iv), (v), 引理 4.1.1 (14))

(vii) $A \wedge C \to B \wedge D$　(由 (iii),(vi), 引理 4.1.1 (15))

定理 4.1.2　$\mathscr{L}^N$ 系统与 $\mathscr{L}_0^*$ 系统等价, 即它们包含完全相同的定理, 从而与 IMTL 有完全相同的定理.

证明　由 $\mathscr{L}^N$ 系统与 $\mathscr{L}_0^*$ 系统的定义, 只需证明定义 4.1.5 中的公理 (11) 是 $\mathscr{L}^N$ 系统的定理. 下面给出它的证明: $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$.

(i) $(\neg B \to \neg A) \wedge (\neg C \to \neg A) \to (\neg B \vee \neg C \to \neg A)$ (由系统 $\mathscr{L}^N$ 的公理 (8))

(ii) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$　(由引理 4.1.1 (16))

(iii) $(A \to C) \to (\neg C \to \neg A)$　(由引理 4.1.1 (16))

(iv) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (\neg B \to \neg A) \wedge (\neg C \to \neg A)$

(由命题 4.1.2 (17))

(v) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (\neg B \vee \neg C \to \neg A)$　(由 (iv), (i), 引理 4.1.1 (14))

(vi) $(\neg B \vee \neg C \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg(\neg B \vee \neg C))$　(引理 4.1.1 (16))

(vii) $(A \to \neg\neg A) \to ((\neg\neg A \to \neg(\neg B \vee \neg C)) \to (A \to \neg(\neg B \vee \neg C)))$

(由系统 $\mathscr{L}^N$ 的公理 (3), (4))

(viii) $A \to \neg\neg A$ (由系统 $\mathscr{L}^N$ 的公理 (5))

(ix) $(\neg\neg A \to \neg(\neg B \vee \neg C)) \to (A \to \neg(\neg B \vee \neg C))$ (由 (vii), (viii), MP)

(x) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to \neg(\neg B \vee \neg C))$

(由 (v),(vi),(ix), 引理 4.1.1 (14))

(xi) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

文献 [179] 中引入基础 $\mathscr{L}^*$ 系统, 它是在形式系统 $\mathscr{L}^*$ 中去掉公理 (L*10) 后得到的. 容易看出, $\mathscr{L}^N$ 系统较基础 $\mathscr{L}^*$ 系统多了一条公理: $A \to (B \to A)$. 而由文献 [178] 及 [179] 知: 在基础 $\mathscr{L}^*$ 系统中, 公式 $A \to (B \to A)$ 是定理. 因此, $\mathscr{L}^N$ 系统定义中的公理: $A \to (B \to A)$ 可以删去. 这样, 由定理 4.1.1、定理 4.1.2 得: $\mathscr{L}^N$、$\mathscr{L}_0^*$、基础 $\mathscr{L}^*$、**IMTL** 四个系统彼此等价. 另外, 裴道武教授在文献 [43] 中给出 **IMTL** 系统一个新的简捷而独立的公理系统.

定义 4.1.7[43] 由 MP 规则及以下公理组成的逻辑系统称为 **IMTL***:

(1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

(2) $A \wedge B \to C$;

(3) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$;

(4) $A \to ((A \to B) \to A \wedge B)$;

(5) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$;

(6) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$,

其中, $A \vee B$ 是 $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ 的简写, 另外 $A\&B$ 定义为 $\neg(A \to \neg B)$.

定理 4.1.3[43] 系统 **IMTL** 与 **IMTL*** 包含完全相同的定理, 即系统 **IMTL** 与系统 **IMTL*** 等价.

根据定义 3.4.8、定理 3.4.10 及定理 4.1.3 知, 系统 **NM** 与系统 $\mathscr{L}^*$ 等价.

4.1.2 *MTL*–代数及系统 MTL 的完备性

定义 4.1.8[40] 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个可换剩余格. $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为是 *MTL*–代数, 如果满足如下的预线性等式 $(\forall x, y \in L)$:

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1.$$

注 4.1.2 (1) [0, 1] 关于自然序及运算 min, max, 任意确定的左连续 t–模 $\otimes$ 及其相伴剩余蕴涵 $\to$ 构成一个 *MTL*–代数, 称 $([0,1]; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 为标准 *MTL*–代数.

(2) **MTL** 逻辑中所有公式关于可证等价关系形成的商代数是一个 *MTL*–代数.

(3) 对于任意 *MTL*–代数 L, 可按通常的方式定义 L–赋值、L–重言式等概念.

定义 4.1.9[40]　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个 MTL–代数. $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为是 $IMTL$–代数, 如果满足如下条件 $(\forall x \in L)$:

(Imtl) $(x \to 0) \to 0 = x$.

MTL–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为是 WNM–代数, 如果满足如下条件 $(\forall x, y \in L)$:

(Wnm) $(x \otimes y \to 0) \vee (x \wedge y \to x \otimes y) = 1$.

$IMTL$–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 称为是 NM–代数, 如果还满足上述条件 (Wnm).

定理 4.1.4[40]　**MTL** 是完备的, 即对任意的公式 φ 以下条件等价:

(1) φ 在 **MTL** 中可证, 即 $\vdash \varphi$;

(2) 对任意 MTL–代数 L, φ 是 L–重言式;

(3) 对任意线性 MTL–代数 L, φ 是 L–重言式.

系统 **MTL** 的一个语义扩张 (schematic extension, 也译作模式扩张), 是指在系统 **MTL** 的基础上添加若干 (有限或无限多个) 公理模式后得到的逻辑系统. 设 $\mathcal{C}$ 是系统 **MTL** 的一个模式扩张, MTL–代数 L 称为是 $\mathcal{C}$–代数, 如果 $\mathcal{C}$ 的所有公理都是 L–重言式.

定理 4.1.5[40]　设 $\mathcal{C}$ 是系统 **MTL** 的一个模式扩张, φ 是一个公式, 则以下条件等价:

(1) φ 在 $\mathcal{C}$ 中可证, 即 $\mathcal{C} \vdash \varphi$;

(2) 对于任意 $\mathcal{C}$–代数 L, φ 是 L–重言式;

(3) 对于任意线性序的 $\mathcal{C}$–代数 L, φ 是 L–重言式.

由上述结论, 系统 **MTL** 的扩张 **IMTL**, **WNM**, **NM**, 均有相应的完备性定理, 如系统 **IMTL** 的完备性可叙述为: 对任意的公式 φ 以下条件等价:

(1) φ 在 **IMTL** 中可证, 即 $\vdash\varphi$;

(2) 对任意 $IMTL$–代数 L, φ 是 L–重言式;

(3) 对任意线性 $IMTL$–代数 L, φ 是 L–重言式.

对于系统 **WNM** 与 **NM** 的完备性, 还可进一步具体化. 实际上, 它们分别是基于弱幂零极小 t–模与幂零极小 t–模的模糊逻辑系统.

设 $(C; \leqslant, 0, 1)$ 是一个有界线性序集, 一个函数 $n{:}C \to C$ 称为弱否定函数, 如果它是反序的且 $n(1)=0$, $(\forall x \in C) n(n(x)) \geqslant x$. 称弱否定函数 n 是对合的或强否定函数, 如果 $(\forall x \in C) n(n(x))=x$.

定义 4.1.10[173]　设 n 是 $[0, 1]$ 上的弱否定函数, 称如下定义的 t–模 $\otimes_n$ 为弱幂零极小 t–模:

$$x \otimes_n y = \begin{cases} 0, & x \leqslant n(y), \\ \min\{x, y\}, & \text{其他}. \end{cases}$$

与上述 t–模对应的剩余蕴涵如下 (且 $n(x) = x \to_n 0$):

$$x \to_n y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ \max\{n(x), y\}, & \text{其他}. \end{cases}$$

可以证明, 如果 ([0, 1]; ∧, ∨, ⊗, →, 0, 1) 是一个 WNM–代数, 则 ⊗ 一定是弱幂零极小 t–模. 但不存在唯一的标准 WNM–代数, 即 [0, 1] 上的 WNM–代数并不同构. 称 [0, 1] 上的 WNM–代数为半标准 WNM–代数.

定理 4.1.6[40] 公式 φ 在系统 **WNM** 中可证当且仅当对于所有半标准 WNM–代数 L 来说 φ 是 L–重言式.

在定义 4.1.10 中, 若 n 是 [0, 1] 上的强否定函数, 则相应的 t–模 $\otimes_n$ 称为幂零极小 t–模 (此概念最早出自文献 [183]).

定理 4.1.7[40] 所有由幂零极小 t–模构成的 [0, 1] 上的 $IMTL$–代数均同构.

上述结论说明, [0, 1] 上的标准 NM–代数存在, 即取 $n(x) = 1 - x$ 对应的幂零极小 t–模, 它正是前面论述到的 R_0 t–模. 可以证明系统 **NM** 的标准完备性定理, 它就是定理 3.4.7, 这里不再赘述.

4.2 系统MTL的标准完备性

前面介绍了系统 **WNM** 的半标准完备性和系统 **NM** 的标准完备性, 本节介绍 **MTL** 的标准完备性, 它说明形式系统 **MTL** 是左连续 t–模基逻辑的公共完备公理化. 本节内容取自匈牙利学者 Jenei 与意大利学者 Montagna 的论文 [41].

MTL 的标准完备性是指, 每一个公式 A 在 **MTL** 中可证 (即 **MTL**$\vdash A$) 当且仅当对每一个标准 MTL–代数 ([0, 1]; ⊗, →, 0, 1) 及到其上的每一个赋值 e 均有 $e(A)$=1. 由定理 4.1.4(**MTL** 的完备性定理) 知, 要证明标准完备性, 只需证明以下事实即可: 若 **MTL**$\nvdash A$, 则一定存在左连续 t–模 ⊗(相应的剩余蕴涵为 →) 及 ([0, 1]; ⊗, →, 0, 1) 上的一个赋值 e 使得 $e(A) \neq$1. 本节将证明这一结论.

4.2.1 全序 MTL–代数的嵌入性质

由定理 4.1.4 知, 若 **MTL**$\nvdash A$, 则一定存在线性序 MTL–代数 L 及其上的一个赋值 e 使得 $e(A) \neq$1. 显然, 这里仅与 A 的子公式的赋值相关, 所以, 不失一般性可假设 MTL–代数 L 是有限生成的, 从而是有限的或可数的. 这里先证明有限或可数线性序 MTL–代数的嵌入性质, 后面将利用它证明标准完备性.

定理 4.2.1[41] 设 (L; ⊗, →, 0_L, 1_L) 是任意有限或可数线性序 MTL–代数, 其上的序关系为 $\leqslant_L$, 则存在一个可数序集 (X; $\preccurlyeq$)、X 上的二元运算 ⊙ 及从 L 到 X 上的映射 f, 使得下面的条件成立:

(1) X 是稠密序集, 且有最大元 x_M 和最小元 x_m.

(2) $(X; \odot, \preccurlyeq, x_M)$ 是整的可换线性序幺半群.

(3) $\odot$ 关于 $(X; \preccurlyeq)$ 上的序拓扑是左连续的.

(4) f 是结构 $(L; \otimes, \leqslant_L, 0_L, 1_L)$ 到结构 $(X; \odot, \preccurlyeq, x_m, x_M)$ 的一个嵌入, 且 $(\forall s, t \in L) f(s \to t)$ 是 $f(s)$ 与 $f(t)$ 在 $(X; \odot, \preccurlyeq, x_m, x_M)$ 上的剩余.

注 4.2.1 这里并没有要求在 $(X; \odot, \preccurlyeq, x_M)$ 中剩余一定存在, 只是要求在 f 的值域 range(f) 中剩余存在且满足 (4).

定理 4.2.1 的证明 令 $X=\{(s, q)\colon s \in L\backslash\{0_L\}, q \in \mathbf{Q}\cap(0, 1]\}\cup\{(0_L, 1)\}$, 这里 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集. 对于 $(s, q), (t, r) \in X$, 定义:

$$(s,q) \preccurlyeq (t,r) \text{ 当且仅当 } (s <_L t, \ \text{ 或 } s = t \text{ 且 } q \leqslant r).$$

显然, $\preccurlyeq$ 有最大元 $(1_L, 1)$ 和最小元 $(0_L, 1)$. 而且 $\preccurlyeq$ 是稠密的: 如果 $(s, q) \preccurlyeq (t,r)$, 则

当 $s <_L t$ 时, $(s,q) \prec (t, r/2) \prec (t,r)$;

当 $s = t$ 且 $q \leqslant r$ 时, $(s,q) \prec (t, (q+r)/2) \prec (t,r)$.

这说明 (1) 成立.

对于任意 $(s, q), (t, r) \in X$, 定义:

$$(s,q) \odot (t,r) = \begin{cases} \min\{(s,q),(t,r)\}, & s \otimes t = \min_L\{s,t\}, \\ (s \otimes t, 1), & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, min 是关于 $\preccurlyeq$ 取小, 而 $\min_L$ 是关于 $\leqslant_L$ 取小. 以下证明 $\odot$ 满足条件 (2).

$\odot$ 满足可换性是显然的. 而且, $(1_L, 1)$ 是关于 $\odot$ 的单位元. 事实上, $\min_L\{1_L, s\} = s$, 所以 $(1_L, 1)\odot(s, q)=\min\{(1_L, 1), (s, q)\}=(s, q)$.

接下来证明结合性, 即 $\forall (s, q), (t, r), (u, p) \in X$ 有

$$(s,q) \odot [(t,r) \odot (u,p)] = [(s,q) \odot (t,r)] \odot (u,p). \tag{4.2.1}$$

以下仅使用 $\otimes$ 的结合性来证明 (4.2.1) 成立, 分如下几种情况讨论:

情形 (1). 若 $s \otimes (t \otimes u)=\min_L\{s, t, u\}$, 则 (4.2.1) 的两边均等于 $\min\{(s, q), (t, r), (u, p)\}$.

情况 (2). 若 $(s \otimes t) \otimes u \neq \min_L\{(s \otimes t), u\}$且 $s \otimes (t \otimes u) \neq \min_L\{s, (t \otimes u)\}$, 则 (4.2.1) 的两边均等于 $(s \otimes (t \otimes u), 1)$.

如果情况 (1) 和 (2) 都不发生, 则 $(s \otimes t) \otimes u \notin \{s, t, u\}$(否则, 将成为情形 (1)), 并且, 或者 $(s \otimes t) \otimes u=\min_L\{(s \otimes t), u\}$(此时, 可以假定 $s \otimes t <_L u$, 否则将成为情形 (1)), 或者 $s \otimes (t \otimes u)=\min_L\{s, (t \otimes u)\}$ (此时, 可以假定 $t \otimes u <_L s$, 否则将成为情形 (1)). 所以, 需要考虑如下的情况 (3) 和 (4).

情况 (3). $(s\otimes t)\otimes u=s\otimes t<_L u$. 不失一般性, 可以假设 $s\otimes t<_L\min_L\{s, t\}$(否则将变成情况 (1)), 则 $[(s,q)\odot(t,r)]\odot(u,p)=(s\otimes t,1)$. 这样, 只需证明 (4.2.1) 的左边也等于 $(s\otimes t, 1)$, 即 $(s, q)\odot[(t, r)\odot(u, p)]=(s\otimes t, 1)$. 事实上, 如果 $s\otimes(t\otimes u)\neq\min_L\{s, t\otimes u\}$, 则 (4.2.1) 的左边等于 $(s\otimes(t\otimes u), 1)=(s\otimes t, 1)$. 如果 $s\otimes(t\otimes u)=\min_L\{s, t\otimes u\}$, 则可以假设 $t\otimes u<_L s$(否则将变成情况 (1)). 所以, $s\otimes(t\otimes u)=s\otimes t=t\otimes u$. 又, $t\otimes u<_L\min_L\{t, u\}$(否则将变成情况 (1)), 所以 $(t, r)\odot(u, p)=(t\otimes u, 1)$, 从而 (4.2.1) 的左边变为

$$(t\otimes u,1)\odot(s,q)=\min\{(t\otimes u,1),(s,q)\}=(t\otimes u,1)=(s\otimes t,1),$$

即 (4.2.1) 成立.

情况 (4). $s\otimes(t\otimes u)=t\otimes u<_L s$. 可类似于情况 (3) 进行论证.

接下来, 证明 $\odot$ 的保序性 (即单调性), 由于 $\odot$ 是可换的, 故仅需证明:

如果 $(s, q)\preccurlyeq(t, r)$, 则对所有的 (u, p) 有 $(u, p)\odot(s, q)\preccurlyeq(u, p)\odot(t, r)$.

分以下几种情况进行讨论:

如果 $s\otimes u=\min_L\{s, u\}$且 $t\otimes u=\min_L\{t, u\}$, 则 $(u, p)\odot(s, q)=\min\{(u, p), (s, q)\}\preccurlyeq\min\{(u, p), (t, r)\}=(u, p)\odot(t, r)$.

如果 $s\otimes u=\min_L\{s, u\}$且 $t\otimes u\neq\min_L\{t, u\}$, 则 $s\otimes u\leqslant_L t\otimes u$, $(u, p)\odot(s, q)=\min\{(u, p), (s, q)\}\preccurlyeq(t\otimes u, 1)=(u, p)\odot(t, r)$.

如果 $s\otimes u\neq\min_L\{s, u\}$且 $t\otimes u=\min_L\{t, u\}$, 则 $s\otimes u<_L\min_L\{s, u\}\leqslant_L\min_L\{t, u\}=t\otimes u$. 所以 $(s, q)\odot(u, p)=(s\otimes u, 1)$, 而 $(t, r)\odot(u, p)$ 的第一个分量是 $t\otimes u=\min_L\{t, u\}>_L s\otimes u$, 故 $(s, q)\odot(u, p)\preccurlyeq(t,r)\odot(u, p)$.

如果 $s\otimes u\neq\min_L\{s, u\}$且 $t\otimes u\neq\min_L\{t, u\}$, 则 $s\otimes u\leqslant_L t\otimes u$, $(s, q)\odot(u, p)=(s\otimes u, 1)\preccurlyeq(t\otimes u, 1)=(t, r)\odot(u,p)$.

所以 $\odot$ 具有保序性 (单调性), 进而说明 (2) 成立.

下面证明 (3) 成立, 即证明 $\odot$ 是左连续的. 由 $\odot$ 的单调性和结合性, 仅需证明: 对于 X 中元素的任意递增序列$\{(s_i, q_i)\colon i\in\mathbf{N}\}$, 若 $\sup\{(s_i, q_i)\colon i\in\mathbf{N}\}=(s,q)$, 则对任意 $(t, r)\in X$ 均有 $\sup\{(s_i, q_i)\odot(t,r): i\in\mathbf{N}\}=(s,q)\odot(t,r)$. 首先, 对几乎所有的 i 必有 $s_i=s$, 而其他的 (s_i, q_i) 组成的序列以 $(s, q/2)\prec(s, q)$ 为上界. 因此, 当去掉序列$\{(s_i, q_i)\colon i\in\mathbf{N}\}$中的有限个元素后, 不失一般性, 可以假设对所有的 i, $s_i=s$ 且 $q=\sup\{q_i\colon i\in\mathbf{N}\}$. 现在, 如果 $s\otimes t=\min_L\{s, t\}$, 则 $(s,q)\odot(t,r)=\min\{(s,q),(t,r)\}$, $(s_i,q_i)\odot(t,r)=\min\{(s_i,q_i),(t,r)\}$, 且此时 $\odot$ 的左连续性可由 min 运算的左连续得到; 否则, 对每一个 i, $(s, q)\odot(t, r)=(s_i, q_i)\odot(t, r)=(s\otimes t, 1)$. 这就完成了左连续的证明, 即 (3) 成立.

最后证明 (4) 成立. 对任意 $s\in L$, 定义 $f(s)=(s, 1)$. 显然, f 是递增的, 因此是单射. 而且, $f(1_L)=(1_L, 1)$ 既是 $(X;\preccurlyeq)$ 的顶元又是 $\odot$ 的单位元, 而 $f(0_L)=(0_L, 1)$

是 $(X; \preccurlyeq)$ 的底元. 同时, $f(s) \odot f(t)=(s, 1)\odot(t, 1)=(s \otimes t, 1)=f(s \otimes t)$. 所以, f 是偏序幺半群的嵌入. 余下需要证明对所有的 $s, t \in L$, $f(s \to t)$ 是 s 和 t 关于 $\odot$ 的剩余, 即 $f(s) \odot f(s \to t) \preccurlyeq f(t)$, 且 $f(s) \odot (u, p) \preccurlyeq f(t) \Rightarrow (u, p) \preccurlyeq f(s \to t)$. 第一个结论很容易证明, 因为

$$f(s) \odot f(s \to t) = (s, 1) \odot (s \to t, 1) \preccurlyeq (t, 1) = f(t).$$

对于第二个结论, 证其逆否命题. 假设 $f(s \to t)=(s \to t, 1)\prec(u, p)$. 因为 $p \leqslant 1$, 故必有 $s \to t <_L u$. 因为 $s \to t$ 是 s 和 t 在 L 中关于 $\otimes$ 的剩余, 所以 $s \otimes u >_L t$. 故 $(t, 1) \prec (s, 1) \odot (u, p)$, 即 $f(t) \prec f(s) \odot (u, p)$. 这就完成了整个证明.

4.2.2 标准完备性及其他完备性

定理 4.2.2[41] 每一个可数的全序 MTL–代数均可嵌入到标准 MTL–代数中.

证明 设 X, L 等就是定理 4.2.1 中的相应概念. 因为 $(X; \preccurlyeq)$ 是有最大和最小元的可数的、稠密的线性序集, 它序同构于 $(\mathbf{Q}\cap[0, 1]; \leqslant)$. 设 g 是相应的同构映射, 若定理 4.2.1 中的 (1)~(4) 成立, 令 $(\forall\alpha, \beta \in[0, 1], s \in L)$

$$\alpha \odot' \beta = g(g^{-1}(\alpha) \odot g^{-1}(\beta)), \quad f'(s) = g(f(s)),$$

则 $\mathbf{Q}\cap[0, 1], \leqslant, \odot', f'$ 满足定理 4.2.1 中的条件 (1)~(4), 这只要 $X, \preccurlyeq, \odot, f$ 满足相应条件即可. 所以, 可以假设 $X=\mathbf{Q}\cap[0, 1]$ 且 $\preccurlyeq$ 就是 $\leqslant$.

现在定义 $(\forall\alpha, \beta \in[0, 1])$:

$$\alpha\overline{\odot}\beta = \sup_{x\in X: x\leqslant\alpha}\ \sup_{y\in X: y\leqslant\beta}(x \odot y).$$

由 $\odot$ 的结合性和可换性知 $\overline{\odot}$ 满足结合律和交换律, 同时容易从定义看出 $\overline{\odot}$ 是保序的 (单调的) 且 1 为单位元.

下面证明 $\overline{\odot}$ 是左连续的. 假设$\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ 和$\{\beta_n : n \in \mathbf{N}\}$ 在 [0, 1] 上的递增实数序列且 $\sup\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\} = \alpha, \sup\{\beta_n : n \in \mathbf{N}\} = \beta$, 则由 $\overline{\odot}$ 的单调性得 $\sup\{\alpha_n\overline{\odot}\beta_n\} \leqslant \alpha\overline{\odot}\beta$. 因为 $\overline{\odot}$ 在 $\boldsymbol{Q}\cap[0, 1]$ 上的限制是左连续的, 故

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\odot}\beta &= \sup\{q\overline{\odot}r : q, r \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1], q \leqslant \alpha, r \leqslant \beta\}\\ &= \sup\{q\overline{\odot}r : q, r \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1], q < \alpha, r < \beta\}.\end{aligned}$$

于是, 对任意 $q < \alpha$ 和任意 $r < \beta$, 存在 n 使得 $q < \alpha_n$ 且 $r < \beta_n$. 所以,

$$\sup\{\alpha_n\overline{\odot}\beta_n : n \in \mathbf{N}\} \geqslant \sup\{q\overline{\odot}r : q < \alpha, r < \beta, q, r \in \boldsymbol{Q} \cap [0,1]\} = \alpha\overline{\odot}\beta.$$

所以 $\overline{\odot}$ 是在 [0, 1] 上左连续的 t–模.

由定义, $\overline{\odot}$ 是 $\odot$ 的扩展. 由 (1)~(4), f 是 $(L; \otimes, \leqslant_L, 0_L, 1_L)$ 到 $([0, 1]; \overline{\odot}, \leqslant, 0, 1)$ 的一个嵌入, 且 $\overline{\odot}$ 有一个剩余, 记为 $\looparrowright$.

要完成证明, 只需再证 $(\forall s, t \in L) f(s \to t) = f(s) \looparrowright f(t)$. 由性质 (4), $f(s \to t)$ 是 $f(s)$ 与 $f(t)$ 在 $(\mathbf{Q} \cap [0, 1]; \odot, \leqslant, 0, 1)$ 上的剩余, 所以

$$f(s) \overline{\odot} f(s \to t) = f(s) \odot f(s \to t) \leqslant f(t).$$

假设结论 $(\forall s, t \in L) f(s \to t) = f(s) \looparrowright f(t)$ 不成立, 则存在 $\alpha > f(s) \looparrowright f(t)$ 使得 $\alpha \overline{\odot} f(s) \leqslant f(t)$. 因为 $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ 在 $[0, 1]$ 上是稠密的, 故存在 $q \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]$ 使得 $f(s \to t) < q \leqslant \alpha$. 于是,

$$q \overline{\odot} f(s) = q \odot f(s) \leqslant f(t).$$

这与条件 (4) 矛盾.

定理 4.2.3 (标准完备性定理)[41] **MTL** 关于左连续 t–模及其剩余是完备的, 即对任意公式 A, $\mathbf{MTL} \vdash A$ 当且仅当对任意标准 MTL–代数 L 有 $\models_L A$.

证明 由定理 4.1.4, 只需证明: 如果 $\mathbf{MTL} \nvdash A$, 则存在左连续 t–模 $\otimes$ 及到 $([0, 1]; \otimes, \to, 0, 1)$ 上的一个赋值 e 使得 $e(A) \neq 1$ (这里, $\to$ 是 t–模 $\otimes$ 的剩余蕴涵).

设 A 是一个公式, 使得 $\mathbf{MTL} \nvdash A$, 则由定理 4.1.4 知, 存在线性序 MTL–代数 L 及 L 上的一个赋值 e, 使得 $e(A) \neq 1$. 设 f' 是 L 到标准 MTL–代数上的嵌入 (即由定理 4.2.2 给出的), 则 $f' \circ e$ 是标准 MTL–代数上的一个赋值且 $f' \circ e(A) \neq 1$. 这说明 **MTL** 的标准完备性成立.

文献 [184] 给出 **MTL** 标准完备性定理的另一种证明, 并证明了强标准完备性. 文献 [185] 证明了系统 **MTL** 的强有理完备性定理, 同时还证明了系统 **IMTL** 的标准完备性及强有理完备性定理. 现将相关结果罗列在下面.

定理 4.2.4 (强完备性定理)[40] 设 $T \subseteq F(S))$, $A \in F(S)$, 则 $T \vdash A$ 当且仅当对任意 MTL–链 L 有 $T \models_L A$.

定理 4.2.5 (强标准完备性定理)[184] 设 $T \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 则 $T \vdash A$ 当且仅当对任意标准 MTL–代数 L 有 $T \models_L A$.

定理 4.2.6 (强有理完备性定理)[185] 设 $T \subseteq F(S)$, $A \in F(S)$, 则 $T \vdash A$ 当且仅当对任意的格约简为有理区间 $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ 的 MTL–链 L 有 $T \models_L A$.

定理 4.2.7 (系统 **IMTL** 的标准完备性定理)[185] **IMTL** 关于标准 $IMTL$–代数是完备的, 即对任意公式 A, $\mathbf{IMTL} \vdash A$ 当且仅当对任意标准 $IMTL$–代数 L 有 $\models_L A$. 这里, 标准 $IMTL$–代数是指 $([0, 1]; \otimes, \to, 0, 1)$, 其中 $\otimes$ 是一个左连续 t–模且对应的否定 $(\neg x = x \to 0)$ 是对合的, $\to$ 是 $\otimes$ 的剩余蕴涵.

4.3 系统MTL的扩张

4.3.1 模糊逻辑系统 NMG

本节介绍文献 [181] 中建立的模糊逻辑系统 **NMG**, 它是形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的有趣

扩张, 其语义可解释为一类序数和 t–模及其剩余蕴涵, 且具有标准完备性.

定义 4.3.1[181]　系统 NMG 是系统 MTL 通过添加如下公理构成的模式扩张:

(WNM) $(\varphi\&\psi\to\bar{0})\vee(\varphi\wedge\psi\to\varphi\&\psi)$;

(NMG) $(\neg\neg\varphi\to\varphi)\vee(\varphi\wedge\psi\to\varphi\&\psi)$.

相应地, 一个 NMG–代数 M 是一个满足以下条件的 MTL–代数: $\forall x, y\in M$,

(Wnm) $(x\otimes y\to 0)\vee(x\wedge y\to x\otimes y)=1$;

(Nmg) $(\neg\neg x\to x)\vee(x\wedge y\to x\otimes y)=1$.

一个 NMG–代数 M 称为是严格的 (strict), 如果 M 中有这样两个元素 $\frac{1}{4}_M$ 和 $\frac{1}{2}_M$ 满足如下条件:

(1) $\neg\frac{1}{4}_M=\frac{1}{4}_M$, $\neg\frac{1}{2}_M=0$ 且 $\frac{1}{2}_M<1$;

(2) 对任意 $x>\frac{1}{2}_M$ 有 $\neg x=0_M$, 且对任意 $0_M<x<\frac{1}{2}_M$ 有 $\neg\neg x=x$.

命题 4.3.1[181]　设 $a\in(0,1)$, 在 $[0,1]$ 上定义二元运算 $\otimes_W$ 如下:

$$\forall x,y\in[0,1],\ x\otimes_W y=\begin{cases}a\times\left(\dfrac{x}{a}\otimes_{NM}\dfrac{y}{a}\right), & 0\leqslant x,y\leqslant a,\\ \min\{x,y\}, & \text{其他}.\end{cases}$$

这里 $\otimes_{NM}$ 是指 R_0t–模, 则

(1) $\otimes_W$ 是左连续但非连续 t–模.

(2) $\forall x,y\in[0,1],\ x\otimes_W y=\begin{cases}0, & x+y\leqslant a,\\ \min\{x,y\}, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $\otimes_W$ 的剩余蕴涵为

$$\forall x,y\in[0,1],\ x\to_W y=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ \max\{a-x,y\}, & \text{其他}.\end{cases}$$

(4) 若一元运算 $\neg$ 定义为 $(\forall x\in[0,1])\ \neg x=x\to_W 0$, 则

$$\neg x=\begin{cases}1, & x=0,\\ a-x, & 0<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(5) 若定义 $(\forall x, y\in[0,1])\ x\vee y=((x\to_W y)\to_W y)\otimes_W(((x\to_W y)\to_W y)\to_W((y\to_W x)\to_W x))$, 则 $x\vee y=\max\{x,y\}$, $\forall x,y\in[0,1]$.

(6) 若定义 $(\forall x, y\in[0,1])\ x\wedge y=(x\otimes_W y)\vee\neg(y\vee\neg y\vee\neg x)$, 则 $x\wedge y=\min\{x, y\}$, $\forall x, y\in[0,1]$.

(7) $[0, 1]^a_W$=([0, 1]; $\otimes_W$, $\to_W$, ∨, ∧, 0, 1) 是一个严格 *NMG*–链.

注 4.3.1 容易看出, $\otimes_W$ 是一个序数和 t–模, 它的第一个组成成分 $[0, a]$ 是幂零极小 t–模, 第二个组成成分 $[a, 1]$ 是取小 t–模.

命题 4.3.2[181] $\forall a, b \in (0, 1)$, *NMG*–代数 $[0, 1]^a_W$ 同构于 $[0, 1]^b_W$.

对于任意 $a \in (0, 1)$, 记 T^a_W 为系统 **NMG** 中的所有 $[0, 1]^a_W$–重言式, 则由上述结论知, $\forall a, b \in (0, 1)$, $T^a_W = T^b_W$. 故用 $[0, 1]_W$ 表示 $[0, 1]^a_W$, 用 T_W 表示 T^a_W. 同时, 也用 $\overline{W}$ 表示 $[0, 1]^{\frac{1}{2}}_W$.

命题 4.3.3[181] 设 $a \in (0, 1)$, 则

(1) $(0, a) \cup \{0, 1\}$及 $(a, 1) \cup \{0, 1\}$是 $[0, 1]^a_W$ 的子代数, 分别记为 W^{NM}_a 及 W^G_a;

(2) W^{NM}_a 代数同构于标准 *NM*–代数 $[0, 1]_{\rm NM}$ (即 R_0 单位区间);

(3) W^G_a 代数同构于标准 *G*–代数 $[0, 1]_{\rm G}$.

定理 4.3.1 (标准完备性定理)[181] **NMG** 关于标准 *NMG*–代数 $[0, 1]_W$ 是完备的, 即公式 A 是系统 **NMG** 中的定理当且仅当 A 是 $[0, 1]_W$–重言式, 亦即 **NMG**$\vdash A$ 当且仅当 $A \in T_W$.

由上述完备性定理及命题 4.3.1(5), (6) 可得如下结论, 这说明在系统 **NMG** 中, ∧, ∨ 可以不作为原始联结词.

定理 4.3.2[181] 以下公式是系统 **NMG** 中的定理:

(1) $\varphi \vee \psi \equiv ((\varphi \to \psi) \to \psi) \& (((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi))$;

(2) $\varphi \wedge \psi \equiv (\varphi \& \psi) \vee \neg(\psi \vee \neg\psi \vee \neg\varphi)$.

注 4.3.2 (1) 由命题 4.3.3 及定理 4.3.1 知, **NMG** 中的定理既是系统 **G** 中的定理又是系统 **NM** 中的定理.

(2) 文献 [186] 建立了一个新的具有标准完备性的逻辑系统 **NMŁ**, 它是系统 **MTL** 及 **IMTL** 的扩张, 而系统 **NM** 与 **Łuk** 均是 **NMŁ** 的扩张, 即 **NMŁ** 中的定理既是系统 **Łuk** 中的定理又是系统 **NM** 中的定理.

4.3.2 模糊逻辑系统 ΠMTL

本节介绍系统 **MTL** 的另一种扩张形式 **ΠMTL**, 它在文献 [185], [187]~[189] 中讨论过 (最早出现在文献 [187] 中).

定义 4.3.2[187] 系统 **ΠMTL** 是系统 **MTL** 通过添加如下公理构成的模式扩张:

(Π1) $\neg\neg\psi \to [(\varphi \& x \to \psi \& \chi) \to (\varphi \to \psi)]$;

(Π2) $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \bar{0}$.

相应地, 一个 *ΠMTL*–代数 L 是一个满足以下条件的 *MTL*–代数: $\forall x, y, z \in L$,

(1) $[(z \to 0) \to 0] \to [(x \otimes z \to y \otimes z) \to (x \to y)] = 1$;

(2) $x \wedge (x \to 0) = 0$.

一个线性序的 ΠMTL–代数称为 ΠMTL–链.

命题 4.3.4[187]　一个 MTL–链 L 成为 ΠMTL–链的充要条件是 L 满足消去律, 即

$$\forall x, y, z \in L, z \neq 0,\ 若\ x \otimes z = y \otimes z,\ 则\ x = y.$$

定理 4.3.3 (完备性定理)[185]　系统 **ΠMTL** 关于 ΠMTL–链是完备的, 即 **ΠM TL**$\vdash\varphi$ 当且仅当对任意 ΠMTL–链 L 及任意 L 赋值 e 均有 $e(\varphi)=1$.

对于标准完备性, 需要用到一个新的概念, 即阿基米德类 (Archimedean class), 它来自全序群及全序幺半群的相关理论 [190].

定义 4.3.3[188,189]　设 L 是一个 MTL–链, a, $b \in L$. 定义 L 上的关系 $\sim$ 如下:

$$a \sim b\ 当且仅当存在\ n \in \mathbf{N}\ 使得\ a^n \leqslant b \leqslant a\ 或\ b^n \leqslant a \leqslant b,$$

则 $\sim$ 是 L 上的等价关系. 对任意 $a \in L$, 称等价类 $[a]_\sim$ 是一个阿基米德类.

显然, $\forall x$, $y \in [a]_\sim$, 若 $x \leqslant y$, 则存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $y^n \leqslant x$. 这就是说 $[a]_\sim$ 作为 L 的子集, 其元素具有阿基米德性质 (试与定义 2.1.9 (4) 进行比较).

容易验证, 标准乘积链 $[0, 1]_\Pi$ 有 3 个阿基米德类, 即$\{0\}$, $\{1\}$及开区间 $(0, 1)$.

例 4.3.1[189]　设 $L=\mathbf{Z}^-\times\mathbf{R}^-$(其中, $\mathbf{Z}^-$ 与 $\mathbf{R}^-$ 分别表示非正整数和非正实数集), L 上的序是字典序, 即

$$(k, r) \leqslant (m, s)\ 当且仅当\ (k < m,\ 或\ k = m\ 且\ r \leqslant s).$$

定义 L 上的运算 $\otimes$ 如下:

$$(k, r) \otimes (m, s) = (k + m, r + s),$$
$$(k, r) \to (m, s) = \begin{cases} (0, 0), & (k, r) \leqslant (m, s), \\ (m - k, \min\{0, s - r\}), & (k, r) > (m, s), \end{cases}$$

则 $(L; \otimes, \to, (0, 0))$ 是整的消去剩余链, 通过添加一个最小元可使 L 成为 ΠMTL–链 (如添加底元 $\bot \notin L$, $\forall x \in L$, $x \otimes \bot = \bot \otimes x = \bot$, $x \to \bot = \bot$, $\bot \to x =(0, 0)$; $\bot \otimes \bot = \bot$, $\bot \to \bot=(0, 0)$). 可以验证, ΠMTL–链 $L\cup\{\bot\}$有 4 个阿基米德类, 即$\{\bot\}$, $\{(0, 0)\}$, $\{(0, a) \in L | a < 0\}$, $\{(b, a) \in L | b < 0\}$.

命题 4.3.5[184,189]　设 L 是一个 MTL–链, a, $b \in L$, 则

(1) $[a]_\sim$ 关于 $\otimes$ 封闭;

(2) $[a]_\sim$ 是凸的, 即 $\forall x$, $y \in [a]_\sim$, 若 $x \leqslant z \leqslant y$, 则 $z \in [a]_\sim$;

(3) $[a \otimes b]_\sim = [a \wedge b]_\sim$.

由上述结论 (2) 知, $L/\sim$ 是全序的, $[a]_\sim < [b]_\sim$ 当且仅当 $a \notin [b]_\sim$ 且 $a < b$.

命题 4.3.6[184,189]　一个 MTL–链 L 有有限个阿基米德类当且仅当同余格 $\mathrm{Con}(L)$ 是有限的.

定理 4.3.4 (标准完备性定理)[188,189] 一个公式 φ 在系统 ΠMTL 中可证当且仅当对 [0, 1] 上的只有有限个阿基米德类的 ΠMTL–链 L 来说 φ 是 L–重言式.

定理 4.3.5 (强完备性定理)[188,189] 设 T 是 ΠMTL 上的一个理论, φ 是一个公式, 则 $T\vdash\varphi$ 当且仅当对任意 ΠMTL–链 L 及 T 的任意 L 模型 e 均有 $e(\varphi)$=1.

注 4.3.3 所谓 T 的 L 模型 e 是指一个 L–赋值 e 满足 $(\forall\psi\in T)e(\psi)$=1.

定理 4.3.6 (有限强标准完备性定理)[188,189] 设 T 是的一个有限理论, φ 是一个公式, 则 $T\vdash\varphi$ 当且仅当对 [0, 1] 上任意的只有有限个阿基米德类的 ΠMTL–链 L 及 T 的任意 L 模型 e 均有 $e(\varphi)$=1.

注 4.3.4 在上述结论中, 对 T 的有限性限制不能去掉, 因为文献 [191] 已经证明 ΠMTL 不具有一般的强标准完备性.

4.4 模糊逻辑系统UL* 及其完备性

目前国内外大多数基于 t–模的模糊逻辑系统, 通常将逻辑非 $\neg A$ 取为 $A\to 0$. 这未必是合理的, 因为这样定义的 "逻辑非" 依赖于蕴涵算子, 选取不同的蕴涵算子将造成 "逻辑非" 的不同性质. 同时, "逻辑非" 的性质应该相对稳定, 特别是应该保持对合性 (即 $\neg\neg A\approx A$) 和换质位对称性 (contrapositive symmetry, 即 $\neg A\to\neg B\approx B\to A$). 令人遗憾的是, 这在乘积逻辑系统、Gödel 逻辑系统、**BL** 系统、**MTL** 系统中不再成立. 西班牙学者 Esteva、Godo 及捷克学者 Hájek、Navara 也注意到这一问题, 并在文献 [165] 中建立了具有对合否定的逻辑系统 **SBL**$_\sim$. 但 **SBL**$_\sim$ 只对严格连续 t–模有意义, 这就极大地限制了它的适用范围.

我们正是从 "逻辑非" 与 "逻辑蕴涵" 彼此独立这一思想出发, 建立了基于一般左连续 t–模的保持对合性、换质位对称性的新的形式系统 **UL***, 通过引入 UL^*–代数、建立相应滤子理论及素滤子定理, 证明了系统 **UL*** 的完备性, 这实际上是 Esteva, Godo, Hajek, Navara 已有工作在更大范围的拓展. 此项工作可参阅作者的博士学位论文 [192] 及发表于《中国科学》的论文 [193]. 需要说明的是, 意大利学者 Flaminio 及西班牙学者 Marchioni 在文献 [194] 中独立于我们建立了模糊逻辑系统 **MTL**$_\sim$, 它与 **UL*** 等价. 他们的论文晚于文献 [192], [193](可参见文献 [193] 英文版首页. 实际上文献 [193] 的基本思想源于作者更早发表的论文 [195,196]), 但文献 [194] 给出了标准强完备性定理且建立了相应的谓词逻辑.

值得指出的是在 **UL*** 系统中, 逻辑非 "$-$" 是对合的, 但 "$-$" 与 "$\neg$" 是相互独立的 ("$\neg$" 的含义是 "$\neg A=A\to 0$"). 另外, 尽管 **UL*** 中有算子 $\wedge$, 但它不是 "逻辑与", &才是 "逻辑与" 的抽象. 文献 [29] 中给出一般模糊推理的形式化定理, 体现了模糊逻辑与模糊推理相结合的研究思路, 文中充分运用了运算 "$\otimes$", 而它相当于这里的&(刻画的是 t–模的特征). **UL*** 系统具有广泛适用性 (基于左连续 t–模)、

优良逻辑特性 (对合否定及换质位对称性), 并能与模糊推理很好结合 (摒弃最大最小且照顾推理柔性 —— 可解释为带参 t–模基逻辑, 见 4.4.4 小节), 因而具有重要理论意义和实用价值.

4.4.1 系统 UL* 及其可靠性定理

以一般左连续 t–模及 Schweizer-Sklar t–模为背景, 引入如下逻辑系统 **UL***, 它可以看成逻辑系统 **MTL** 的扩张 —— 附加一个新的对合否定 "$-$" 及投影算子 "Δ" 的 **MTL**. 关于投影算子 "Δ", 其原型是如下函数 Δ: $[0, 1]\rightarrow[0, 1]$,

$$\forall x\in[0, 1], \text{ 当 } x=1 \text{ 时 } \Delta x=1; \text{ 当 } x\neq 1 \text{ 时 } \Delta x=0.$$

这相当于将 $[0, 1]$ 上的真值 "投影" 到$\{0, 1\}$上.

定义 4.4.1 设 S 是可数集, "$-$" 和 "Δ" 是 S 上的一元运算, &, $\rightarrow$, $\wedge$ 是 S 上的二元运算, $\bar{0}$ 为真值常量. $F(S)$ 是由 S 生成的 $(-, \Delta, \&, \rightarrow, \wedge)$ 型自由代数. 称 $F(S)$ 中具有以下各种形式的公式为公理:

(UL*1) $(A\rightarrow B)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow C))$;

(UL*2) $(A\&B)\rightarrow A$;

(UL*3) $(A\&B)\rightarrow(B\&A)$;

(UL*4) $(A\wedge B)\rightarrow A$;

(UL*5) $(A\wedge B)\rightarrow(B\wedge A)$;

(UL*6) $(A\&(A\rightarrow B))\rightarrow(A\wedge B)$;

(UL*7) $((A\&B)\rightarrow C)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))$;

(UL*8) $(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\&B)\rightarrow C)$;

(UL*9) $((A\rightarrow B)\rightarrow C)\rightarrow(((B\rightarrow A)\rightarrow C)\rightarrow C)$;

(UL*10) $\bar{0}\rightarrow A$;

(UL*11) $(A\rightarrow(--A))\&((--A)\rightarrow A)$;

(UL*12) $\Delta A\vee(\neg\Delta A)$;

(UL*13) $\Delta(A\vee B)\rightarrow(\Delta A\vee\Delta B)$;

(UL*14) $\Delta A\rightarrow A$;

(UL*15) $\Delta A\rightarrow\Delta\Delta A$;

(UL*16) $\Delta(A\rightarrow B)\rightarrow(\Delta A\rightarrow\Delta B)$;

(UL*17) $\Delta(A\rightarrow B)\rightarrow\Delta((-B)\rightarrow(-A))$,

其中, $\neg A$ 是 $A\rightarrow\bar{0}$ 的简写, $A\vee B$ 是 $((A\rightarrow B)\rightarrow B)\wedge((B\rightarrow A)\rightarrow A)$ 的简写. 有下述两个推理规则:

MP 规则 (分离规则)—— 由 A 和 $A\rightarrow B$ 推得 B.

必然推理规则 —— 由 A 推得 ΔA.

由公式集 $F(S)$、公理 (UL*1)~ (UL*17) 以及上述推理规则组成的系统称为 **UL***.

系统 **UL*** 中的证明、定理等概念可以按定义 1.5.8 及定义 1.5.9 的方法进行定义, 记号 $\vdash$ 的意义也与之一致.

由于公理 (UL*1)~(UL*10) 与定义 4.1.2 中系统 **MTL** 的公理一致, 故可类似证明下面的结论成立 (它们在 **MTL** 中也成立, 见注 4.1.1(2)).

定理 4.4.1 以下公式是系统 **UL*** 的定理:

(T1) $A \to (B \to A)$;

(T2) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

(T3) $A \to A$;

(T4) $(A\&B) \to (A \wedge B)$;

(T5) $A \to (B \to (A\&B))$;

(T6) $(B \to C) \to (A\&B \to A\&C)$;

(T7) $A\&(B\&C) \to (A\&B)\&C$, $(A\&B)\&C \to A\&(B\&C)$;

(T8) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(T9) $A \to (A \vee B)$, $B \to (A \vee B)$;

(T10) $(A \vee B) \to (B \vee A)$;

(T11) $(A \to B) \vee (B \to A)$;

(T12) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$, $(A \vee B) \to (B \vee A)$;

(T13) $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$;

(T14) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$.

由 (UL*1) 及推理规则易得

定理 4.4.2 在系统 **UL*** 中成立

(T15) 若 $\Gamma=\{A \to B, B \to C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \to C)$.

定理 4.4.3 在系统 **UL*** 中成立

(T16) $A \to (--A)$, $(--A) \to A$;

(T17) 若 $\vdash A$ 且 $\vdash B$, 则 $\vdash A \wedge B$.

证明 (T16) 的证明如下:

(1) $(A \to (--A))\&((--A) \to A)$ (由 (UL*11))

(2) $(A \to (--A))\&((--A) \to A) \to (A \to (--A))$ (由 (UL*2))

(3) $A \to (--A)$ (由 (1), (2) 及 MP 规则)

同理可证 $(--A) \to A$ 是定理.

(T17) 的证明如下:

(1) A (已知)

(2) $A \to (B \to (A\&B))$ (由 (T5))

(3) $B \to (A\&B)$ (由 (1), (2) 及 MP 规则)

(4) B (已知)

(5) $A\&B$ (由 (3), (4) 及 MP 规则)

(6) $(A\&B) \to (A \wedge B)$ (由 (T4))

(7) $A \wedge B$ (由 (5), (6) 及 MP 规则)

定理 4.4.4 在系统 **UL*** 中成立

(T18) 若 $\vdash A \to B$, 则 $\vdash (-B) \to (-A)$;

(T19) 若 $\vdash (-A) \to (-B)$, 则 $\vdash B \to A$.

证明 下面是 (T18) 的证明:

(1) $A \to B$ (已知)

(2) $\Delta(A \to B)$ (由必然推理规则)

(3) $\Delta(A \to B) \to \Delta((-B) \to (-A))$ (由 (UL*17))

(4) $\Delta((-B) \to (-A))$ (由 (2), (3) 及 MP 规则)

(5) $\Delta((-B) \to (-A)) \to ((-B) \to (-A))$ (由 (UL*14))

(6) $(-B) \to (-A)$ (由 (4), (5) 及 MP 规则)

(T19) 的证明如下:

(1) $(-A) \to (-\mathrm{B})$ (已知)

(2) $(-(-B)) \to (-(-A))$ (由 (1) 及 (T18))

(3) $B \to (-(-B))$ (由 (T16))

(4) $B \to (-(-A))$ (由 (3), (2) 及 (T15))

(5) $(-(-A)) \to A$ (由 (T16))

(6) $B \to A$ (由 (4), (5) 及 (T15))

定义 4.4.2 设 $A, B \in F(S)$, 如果 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \approx B$.

定理 4.4.5 可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的等价关系且是 $(-, \Delta, \&, \to, \wedge)$ 型同余关系, 即

(1) 若 $A \approx B$, 则 $(-A) \approx (-B)$;

(2) 若 $A \approx B$, 则 $\Delta A \approx \Delta B$;

(3) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A\&C \approx B\&D$;

(4) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \to C \approx B \to D$;

(5) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \wedge C \approx B \wedge D$.

证明 仅以 (2), (5) 为例进行证明. 设 $A \approx B$, 则 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$. 从 $\vdash A \to B$ 出发, 应用必然推理规则得 $\vdash \Delta(A \to B)$. 由此及 (UL*16), 应用 MP 规

则得 $\vdash \Delta A \to \Delta B$. 同理可证 $\vdash \Delta B \to \Delta A$, 即 $\Delta A \approx \Delta B$. 这说明 (2) 成立.

设 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则

(1) $(A \wedge C) \to A$ (由 (UL*4))

(2) $A \to B$ (已知)

(3) $(A \wedge C) \to B$ (由 (1), (2), (T15))

(4) $(A \wedge C) \to C$ (由 (UL*4), (UL*5))

(5) $C \to D$ (已知)

(6) $(A \wedge C) \to D$ (由 (4), (5), (T15))

(7) $((A \wedge C) \to B) \wedge ((A \wedge C) \to D)$ (由 (3), (6), (T19))

(8) $(((A \wedge C) \to B) \wedge ((A \wedge C) \to D)) \to (A \wedge C \to B \wedge D)$ (由 (T14))

(9) $(A \wedge C) \to (B \wedge D)$ (由 (7), (8) 及 MP 规则)

同理可证 $(B \wedge D) \to (A \wedge C)$, 故 $A \wedge C \approx B \wedge D$, 即 (5) 成立.

定理 4.4.6 在系统 **UL*** 中有如下的 De Morgan 律:

(T20) $\neg(A \wedge B) \approx (\neg A) \vee (\neg B)$;

(T21) $\neg(A \vee B) \approx (\neg A) \wedge (\neg B)$;

(T22) $-(A \wedge B) \approx (-A) \vee (-B)$;

(T23) $-(A \vee B) \approx (-A) \wedge (-B)$.

证明 由于系统 **UL*** 是 **MTL** 的扩张 (添加了投影算子及新的对合否定 $-$), 故 (T20), (T21) 成立 (参见文献 [40] 中的 Proposition 1(34), (35)).

(T22) 的证明如下:

(1) $(A \wedge B) \to A, (A \wedge B) \to B$ (由 (UL*4), (UL*5))

(2) $(-A) \to (-(A \wedge B)), (-B) \to (-(A \wedge B))$ (由 (1)), (T18))

(3) $((-A) \to (-(A \wedge B))) \wedge ((-B) \to (-(A \wedge B)))$ (由 (2), (T17))

(4) $((-A) \to (-(A \wedge B))) \wedge ((-B) \to (-(A \wedge B))) \to (((-A) \vee (-B)) \to (-(A \wedge B)))$

(由 (T13))

(5) $((-A) \vee (-B)) \to (-(A \wedge B))$ (由 (3), (4) 及 MP 规则)

(6) $(-A) \to ((-A) \vee (-B)), (-B) \to ((-A) \vee (-B))$ (由 T9)

(7) $-((-A) \vee (-B)) \to (-(-A)), -((-A) \vee (-B)) \to (-(-B))$

(由 (6), (T18))

(8) $-((-A) \vee (-B)) \to A, -((-A) \vee (-B)) \to B$ (由 (7), (T16), (T15))

(9) $(-((-A) \vee (-B)) \to A) \wedge (-((-A) \vee (-B)) \to B)$ (由 (8), (T17))

(10) $(-((-A) \vee (-B)) \to A) \wedge (-((-A) \vee (-B)) \to B) \to (-((-A) \vee (-B))$

$\to (A \wedge B))$　　(由 (T14))

(11) $-((-A) \vee (-B)) \to (A \wedge B)$　　(由 (9), (10) 及 MP 规则)

(12) $(-(A \wedge B)) \to -(-((-A) \vee (-B)))$　　(由 (11), (T18))

(13) $(-(A \wedge B)) \to ((-A) \vee (-B))$　　(由 (12), (T16), (T15))

(14) $-(A \wedge B) \approx (-A) \vee (-B)$　　(由 (5), (13))

由 (T22) 及 (T16) 即得 (T23).

定理 4.4.7　$F(S)$ 上的可证等价关系 $\approx$ 具有下述性质:

(T24) $A\&(B\&C) \approx (A\&B)\&C, (A\&B) \to C \approx A \to (B \to C)$;

(T25) $A \vee (B \vee C) \approx (A \vee B) \vee C,\ A \wedge (B \wedge C) \approx (A \wedge B) \wedge C$;

(T26) $\Delta A \approx \Delta(A\&A)$;

(T27) $\Delta A \approx \Delta A\&\Delta A$;

(T28) $\Delta(A\&B) \approx \Delta A\&\Delta B$.

证明　容易证明 (T24), (T25) 成立.

对于 (T26) 可如下证明:

(1) $A\&A \to A$　　(由 (UL*2))

(2) $\Delta(A\&A \to A)$　　(由 (1) 及必然推理规则)

(3) $\Delta(A\&A \to A) \to (\Delta(A\&A) \to \Delta A)$　　(由 (UL*16))

(4) $\Delta(A\&A) \to \Delta A$　　(由 (2), (3) 及 MP 规则)

(5) $A \to (A \to A\&A)$　　(由 (T5))

(6) $\Delta A \to (\Delta A \to \Delta(A\&A))$　　(由 (5), (UL*16), 必然推理规则)

(7) $\bar{0} \to \Delta(A\&A)$　　(由 (UL*10))

(8) $\neg\Delta A \to (\Delta A \to \Delta(A\&A))$　　(由 (7), (T8) 及 MP 规则)

(9) $(\Delta A \to (\Delta A \to \Delta(A\&A))) \wedge (\neg\Delta A \to (\Delta A \to \Delta(A\&A)))$

　　(由 (6), (8), (T17))

(10) $(\Delta A \vee (\neg\Delta A)) \to (\Delta A \to \Delta(A\&A))$　　(由 (9), (T13) 及 MP 规则)

(11) $\Delta A \to \Delta(A\&A)$　　(由 (UL*12), (10) 及 MP 规则)

(12) $\Delta A \approx \Delta A\&\Delta A$　　(由 (4), (11))

(T27) 的证明如下:

(1) $\Delta A \to (\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A))$　　(由 (T5))

(2) $\bar{0} \to \Delta A\&\Delta A$　　(由 (UL*10))

(3) $\neg\Delta A \to (\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A))$　　(由 (2), (T8) 及 MP 规则)

(4) $(\Delta A \to (\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A))) \wedge (\neg\Delta A \to (\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A)))$

　　(由 (1), (3), (T17))

(5) $(\Delta A \vee (\neg\Delta A)) \to (\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A))$　　(由 (4), (T13) 及 MP 规则)

(6) $\Delta A \to (\Delta A\&\Delta A)$　　(由 (UL*12), (5) 及 MP 规则)

(7) $(\Delta A\&\Delta A)\to\Delta A$ (由 (UL*2))

(8) $\Delta A\approx\Delta A\&\Delta A$ (由 (6), (7))

(T28) 的证明如下：

(1) $\Delta(A\&B)\to(\Delta(A\&B)\&\Delta(A\&B))$ (由 (T27))

(2) $(A\&B)\to A$ (由 (UL*2))

(3) $\Delta((A\&B)\to A)$ (由 (2) 及必然推理规则)

(4) $\Delta(A\&B)\to\Delta A$ (由 (3), (UL*16) 及 MP 规则)

(5) $(\Delta(A\&B)\&\Delta(A\&B))\to(\Delta(A\&B)\&\Delta A)$ (由 (4), (T6) 及 MP 规则)

(6) $\Delta(A\&B)\to(\Delta(A\&B)\&\Delta A)$ (由 (1), (5), (T15))

(7) $\Delta(A\&B)\to\Delta B$ (同 (4) 的证明)

(8) $(\Delta A\&\Delta(A\&B))\to(\Delta A\&\Delta B)$ (由 (7), (T6) 及 MP 规则)

(9) $\Delta(A\&B)\to(\Delta A\&\Delta B)$ (由 (6), (8), (UL*3), (T15))

(10) $A\to(B\to(A\&B))$ (由 (T5))

(11) $\Delta A\to(\Delta B\to\Delta(A\&B))$ (由 (10), (UL*16), 必然推理规则)

(12) $(\Delta A\&\Delta B)\to\Delta(A\&B)$ (由 (11), (UL*8) 及 MP 规则)

(13) $\Delta(A\&B)\approx\Delta A\&\Delta B$ (由 (9), (12))

定义 4.4.3 函数 v: $F(S)\to[0,1]$ 叫做 $F(S)$ 的 $[0,1]$–赋值, 如果 v 满足 ($*$ 为任意左连续 t–模, $\Rightarrow$ 为与 $*$ 相伴的剩余蕴涵)

(1) $v(-A)=1-v(A)$;

(2) $v(\Delta A)=\Delta(v(A))$, 右端 Δ 的定义如下：

$$\forall x\in[0,1],\ \Delta x=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $v(A\&B)=v(A)*v(B)$;

(4) $v(A\to B)=v(A)\Rightarrow v(B)$;

(5) $v(A\wedge B)=\min\{v(A),v(B)\}$.

用 $\Omega_{[0,1]}$ 表示 $F(S)$ 的全体 $[0,1]$–赋值之集.

定义 4.4.4 设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v\in\Omega_{[0,1]}$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为 1–重言式.

以下定理表明：**UL*** 中的语构关于语义 $\Omega_{[0,1]}$ 是可靠的.

定理 4.4.8 (可靠性定理) **UL*** 中的定理一定是 1–重言式.

证明 只需证明 **UL*** 中的公理 (UL*1)~(UL*17) 都是 1–重言式, 并且 **UL*** 中的 MP 推理规则、必然推理规则保持 1–重言式.

容易证明 (UL*1)~(UL*17) 都是 1–重言式 (对于 (UL*1)~(UL*10), 它们在 **MTL** 中都是 1–重言式, 当然在 **MTL** 的扩张 **UL*** 中也是 1–重言式. 对于 (UL*11)~

(UL*17), 直接验证知, 它们都是 1–重言式).

设 A 和 $A\to B$ 都是 1–重言式, 则对任意赋值 v 均有 $v(A)=v(A\to B)$=1, 从而 $v(B)$=1→ $v(B)=v(A)\to v(B)=v(A\to B)$=1. 所以 B 为 1–重言式, 这说明 MP 规则保持重言式. 类似地, 必然推理规则也保持 1–重言式. 事实上, 设 A 是 1–重言式, 则对任意 [0,1]–赋值 v 均有 $v(A)$=1, 从而 $v(\Delta A)=\Delta(v(A))$=Δ1=1, 所以 ΔA 为 1–重言式.

注 4.4.1　(1) 文献 [165] 提出了具有对合否定的逻辑系统 **SBL**$_\sim$(其中的对合否定 “$\sim$” 相当于本书的 $-$, 它是基于严格 t–模的, 且 0-1 投影算子 Δ 可由两个非运算定义, 即 $\Delta\varphi=\neg(\sim\varphi)$. 但系统 **UL*** 基于左连续 t–模且 “$-$”、“$\neg$”、“Δ” 相互独立, Δ 不能由两个非运算定义. 比如, 对于如下 t–模 (它是 $p=-2$ 的 Schweizer-Sklar t–模, 详见 4.4.4 节):

$$T(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-1}, & x^2+y^2\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

取 x=0.4, 则有 $\Delta x=0,(1-x)\to 0$=0.8. 这说明, 此时文献 [165] 中的 $\Delta x=\neg\sim x$ 不成立.

(2) 可以仿照文献 [22] 中为系统 **BL** 添加投影算子 Δ 得到扩张 **BL**$_\Delta$ 的方法, 建立 **IMTL** 的扩张系统 **IMTL**$_\Delta$. 如果系统 **UL*** 中的两个否定 $-$, $\neg$ 正好重合, (UL*17) 成为自然的公理, 从而此时的 **UL*** 正好是 **IMTL**$_\Delta$.

4.4.2　UL^*–代数及其素滤子定理

依据自由代数 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的 ($-$, Δ, &, $\to$, $\wedge$) 型商代数 [F]= $F(S)/\approx$ 为背景, 引入 UL^*–代数的概念, 并研究它的滤子理论, 它们将在系统 **UL*** 完备性定理的证明中发挥重要作用.

定义 4.4.5　设 M 是 ($-$, Δ, $\otimes$, $\to$, $\wedge$) 型代数, 称 M 是 UL^*–代数, 如果 M 满足

(1) (M; $\otimes$, $\to$, $\wedge$, $\vee$, 0, 1) 构成可换剩余格 (相应的序为 $\leqslant$), 这里 0、1 分别是最小元、最大元, 而 $\vee$ 定义为

(P1) $a\vee b$=$((a\to b)\to b)\wedge((b\to a)\to a)$, $\forall a, b, c\in M$,

且满足

(P2) $(a\to b)\vee(b\to a)$=1, $\forall a, b, c\in M$.

(2) $-$ 是关于序 $\leqslant$ 而言的 M 上的逆序对合对应, 即有 $a\leqslant b\Rightarrow(-b)\leqslant(-a)$ 且对任意的 $a\in M$ 成立 $(--a)=a$.

(3) “Δ” 是 M 上的一元运算, 且对任意 $a, b, c\in M$ 成立

(P3) $\Delta a\vee(\neg(\Delta a))$=1;

(P4) $\Delta(a \vee b) \leqslant (\Delta a) \vee (\Delta b)$;

(P5) $\Delta a \leqslant a$;

(P6) $\Delta a \leqslant \Delta\Delta a$;

(P7) $\Delta(a \to b) \leqslant (\Delta a) \to (\Delta b)$;

(P8) $\Delta(a \to b) = \Delta((-b) \to (-a))$;

(P9) $\Delta 1=1$,

其中, ¬ 的意义是 $\neg a = a \to 0$, $\forall a \in M$.

容易证明 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的 $(-, \Delta, \&, \to, \wedge)$ 型商代数 $[F]=F(S)/\approx$ 是一个 UL^*–代数. 同时, 在 [0, 1] 上任意确定的左连续 t–模 $\otimes$ 及其相伴剩余蕴涵 $\to$ 关于自然顺序及如下定义的 $-, \Delta$ 构成 UL^*–代数 $([0, 1]; -, \Delta, \otimes, \to, \wedge)$ (这里 $\wedge$ 即为 min):

$$-x = 1 - x; \quad \Delta x = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \forall\, x \in [0,1].$$

定理 4.4.9 设 M 是 UL^*–代数, 则对任意 $a, b, c \in M$ 成立

(P10) $(-1)=0$, $(-0)=1$;

(P11) 若 $a \leqslant b$, 则 $\Delta a \leqslant \Delta b$;

(P12) $\Delta a = \Delta\Delta a$;

(P13) $\Delta a \otimes \Delta(\neg a)=0$;

(P14) $\Delta a=1$ 当且仅当 $a=1$;

(P15) $\Delta a \otimes \Delta a = \Delta a$;

(P16) $\Delta a \otimes \Delta b = \Delta(a \otimes b)$;

(P17) $\Delta(-a) = \Delta(\neg a)$.

证明 因为 1 为最大元, 故有 $(-0)\leqslant 1$, 应用定义 4.4.5 (2) 得 $(-1)\leqslant -(-0)=0$. 于是 $(-1)=0$, 而 $(-0)= -(-1) =1$, 即 (P10) 成立.

若 $a \leqslant b$, 则 $a \to b=1$(这是可换剩余格的基本性质, 见定理 2.2.1). 故应用 (P9) 及 (P7) 得 $1=\Delta 1=\Delta(a \to b) \leqslant (\Delta a) \to (\Delta b)$, 即 $(\Delta a) \to (\Delta b)=1$, $\Delta a \leqslant \Delta b$. 这说明 (P11) 成立.

由 (P5) 有 $\Delta\Delta a \leqslant \Delta a$, 再据 (P6) 有 $\Delta a \leqslant \Delta\Delta a$, 所以 $\Delta a = \Delta\Delta a$, 即 (P12) 成立.

在 (P7) 中取 $b=0$ 得 $\Delta(a \to 0)\leqslant (\Delta a) \to (\Delta 0)$. 又据 (P5) 得 $\Delta 0\leqslant 0$, 此即 $\Delta 0=0$. 从而 $\Delta(a \to 0)\leqslant (\Delta a) \to 0$, 即 $\Delta(\neg a) \leqslant (\Delta a) \to 0$. 由于 $(\otimes, \to)$ 是伴随对, 故 $\Delta(\neg a) \otimes \Delta a =0$. 因 $\otimes$ 是可换的, 所以 $\Delta a \otimes \Delta(\neg a)=0$, (P13) 成立.

若 $\Delta a=1$, 则由 (P5) 有 $1=\Delta a \leqslant a$, 即 $a=1$. 再据 (P9) 知 (P14) 成立.

对于 (P15), (P16), 可类似于定理 4.4.7(T27), (T28) 进行证明 (应用可换剩余格的相关性质).

由 (P8) 及 (P10), (P9) 可得

$$\Delta(\neg a) = \Delta(a \to 0) = \Delta(-0) \to \Delta(-a) = \Delta 1 \to \Delta(-a) = 1 \to \Delta(-a) = \Delta(-a).$$

这说明 (P17) 成立.

注 4.4.2 上述结论中的 (P17) 与文献 [165] 中 Lemma 6 (10) 不同, 即一般地 $\Delta(-a) \neq \neg a$. 例如, 取 M=[0,1], 非运算 $-$ 定义为 $(-x)$ =1$-x$, Δ 为 0-1 投影, $\otimes, \to$ 分别为 $p = -2$ 时的 Schweizer-Sklar t–模 (见注 4.4.1(2)) 及其剩余蕴涵, $\wedge$ 为 min, 则 M 是 UL^*–代数, 而 $\Delta(-0.6)$=0$\neq$0.8=$\neg$0.6. 同时说明, UL^*–代数中一般不成立 $\Delta x = \neg(-x)$.

定义 4.4.6 设 M 是 UL^*–代数, M 的非空子集 F 称为是 M 的一个滤子, 如果满足:

(F1) 若 $a, b \in F$, 则 $a \otimes b \in F$;

(F2) 若 $a \in F$, $a \leqslant b$, 则 $b \in F$;

(F3) 若 $a \in F$, 则 $\Delta a \in F$;

(F4) 若 $a \to b \in F$, 则 $(-b) \to (-a) \in F$.

一个滤子 F 称为是素的, 如果还满足

(F5) 对任意 $a, b \in M$, $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$.

注 4.4.3 由于在 UL^*–代数中一般不成立 $\Delta x = \neg(-x)$, 故上述定义中的条件 (F3) 不能像文献 [165] 那样由其他条件推出. 另外, 容易证明下面的结论成立.

定理 4.4.10 设 M 是 UL^*–代数, M 的非空子集 F 是 M 的一个滤子, 当且仅当满足:

(F1′) 1$\in F$;

(F2′) 若 $a \in F$, $a \to b \in F$, 则 $b \in F$;

(F3) 若 $a \in F$, 则 $\Delta a \in F$;

(F4) 若 $a \to b \in F$, 则 $(-b) \to (-a) \in F$.

类似文献 [165] 中 Lemma 7, Lemma 8 的证明, 可以得到如下结果.

定理 4.4.11 对于 UL^*–代数 M, 以下结论成立:

(1) 如果 M 是线性序的, 则对任意 $a \in M-\{1\}$有 Δa=0.

(2) 如下定义的关系 $\equiv_F$ 是 M 上的一个同余关系,

$$a \equiv_F b \text{ 当且仅当 } a \to b \in F, b \to a \in F,$$

其中, F 是 M 的一个滤子.

(3) M 关于 $\equiv_F$ 的商代数 $M/{\equiv_F}$ 是一个 UL^*–代数.

(4) 商代数 $M/{\equiv_F}$ 是线性序的当且仅当 F 是 M 的素滤子.

(5) 如果 M 是线性序的, 则 M 是单的, 即仅有的滤子是$\{1\}$与 M.

定理 4.4.12(素滤子定理) 设 M 是一个 UL^*–代数, $a \in M-\{1\}$, 则存在 M 的一个素滤子 F 满足 $a \notin F$.

证明 首先证明如下结论成立:

(P18) 包含一个滤子 F 及元素 x 的最小滤子是 $F'=\{u|\exists v \in F, u \geqslant v \otimes (\Delta x)\}$.

事实上, 对于 F' 来说, (F1), (F2) 显然成立. 假设 $u \in F'$, 则有 $v \in F$ 使得 $u \geqslant v \otimes (\Delta x)$, 据定理 4.4.9 (P11), (P16), (P12) 得 $\Delta u \geqslant \Delta(v \otimes (\Delta x))=(\Delta v) \otimes (\Delta\Delta x)=(\Delta v) \otimes (\Delta x)$, 注意到 $\Delta v \in F$(对滤子 F 应用 (F3)), 所以 $\Delta u \in F'$, 即 F' 满足 (F3). 如果 $a \to b \in F'$, 则有 $v \in F$ 使得 $a \to b \geqslant v \otimes (\Delta x)$, 据 (P5), (P8), (P11), (P12) 可得

$$
\begin{aligned}
(-b) \to (-a) &\geqslant \Delta((-b) \to (-a)) = \Delta(a \to b) \geqslant \Delta(v \otimes (\Delta x)) \\
&= (\Delta v) \otimes (\Delta\Delta x) = (\Delta v) \otimes (\Delta x),
\end{aligned}
$$

这说明 $(-b) \to (-a) \in F'$, 即 F' 满足 (F4). 于是 F' 是 M 的一个滤子, 而它是 “包含滤子 F 及元素 x 的最小滤子” 则是显然的.

现在证明: 对于 $a \in M-\{1\}$, 存在 M 的一个素滤子 F 满足 $a \notin F$. 假设 F 是不包含 a 的滤子 (这样的滤子一定存在, 如$\{1\}$), 而 $x, y \in M$ 且满足 $x \to y \notin F$, $y \to x \notin F$. 利用上面的结论, 可以构造两个滤子 F_1,F_2, 它们分别是包含 F 与 $x \to y$, $y \to x$ 的最小滤子. 可以断定 F_1, F_2 中至少有一个不包含 a, 否则, 由 $a \in F_1$, $a \in F_2$ 可得 (存在 $v_1,v_2 \in F$)

$$
\begin{aligned}
a &\geqslant v_1 \otimes (\Delta(x \to y)) \vee v_2 \otimes (\Delta(y \to x)) \\
&\geqslant ((v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta(x \to y))) \vee ((v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta(y \to x))) \\
&\qquad\qquad \text{(可换剩余格性质,}\otimes\text{单调性)} \\
&= (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta(x \to y) \vee \Delta(y \to x)) \qquad \text{(可换剩余格性质)} \\
&\geqslant (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta((x \to y) \vee (y \to x))) \qquad \text{(由 (P4))} \\
&= (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta 1) = (v_1 \otimes v_2) \otimes 1 \qquad \text{(由 (P2), (P9))} \\
&= v_1 \otimes v_2 \in F. \qquad \text{(由 (F1))}
\end{aligned}
$$

从而有 $a \in F$, 这是一个矛盾. 于是, 按照这种方式, 可以构造一个不包含 a 的嵌套的滤子序列, 而它们的 “并” 正是要寻找的素滤子.

4.4.3 系统 UL* 的完备性

文献 [144] 给出剩余格的如下等式定义:

引理 4.4.1[144] 所有可换剩余格构成一个簇, 它可以由以下等式组定义:

(1) $a \vee (b \vee c)=(a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c)=(a \wedge b) \wedge c$;

(2) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;

(3) $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$;

(4) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$, $a \otimes b = b \otimes a$;

(5) $a \otimes 1 = a$, $a \to 1 = 1$, $0 \to a = 1$;

(6) $(a \otimes b) \to c = a \to (b \to c)$;

(7) $a \otimes (a \to b) \vee b = b$;

(8) $a \to (a \vee b) = 1$.

注 4.4.4　上面的等式 (1)~(3) 正好构成格的等式定义.

定理 4.4.13　所有 UL^*–代数组成的类是一个代数簇, 它可以由等式 (1)~(8) 及以下等式组定义:

(9) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$;

(10) $a \vee b = ((a \to b) \to b) \wedge ((b \to a) \to a)$;

(11) $- - a = a$;

(12) $\Delta a \vee (\Delta a \to 0) = 1$;

(13) $\Delta(a \vee b) \to (\Delta a \vee \Delta b) = 1$;

(14) $\Delta a \to a = 1$;

(15) $\Delta a \to \Delta\Delta a = 1$;

(16) $\Delta(a \to b) \to (\Delta a \to \Delta b) = 1$;

(17) $\Delta(a \to b) = \Delta((-b) \to (-a))$;

(18) $\Delta 1 = 1$.

证明　容易看出, UL^*–代数一定满足等式 (1)~(18). 现假定代数结构 $(M; \vee, \wedge, -, \Delta, \otimes, \to, 0, 1)$ 满足等式 (1)~(18), 下证 M 是 UL^*–代数.

由引理 4.4.1 知, M 是可换剩余格. 根据 UL^*–代数的定义, 只需再证明以下条件在 M 中成立:

$(*)$ $a \to b = 1 \Rightarrow (-b) \to (-a) = 1$, 即 $a \leqslant b \Rightarrow (-b) \leqslant (-a)$.

事实上, 如果 $a \to b = 1$, 则由 (18) 知 $\Delta(a \to b) = 1$. 应用 (17) 得 $\Delta((-b) \to (-a)) = 1$. 于是应用 (14) 及可换剩余格的性质得

$$1 = \Delta((-b) \to (-a)) \to ((-b) \to (-a)) = 1 \to ((-b) \to (-a)) = (-b) \to (-a).$$

这说明 $(*)$ 成立.

应用泛代数的结果可以得到

定理 4.4.14　全体 UL^*–代数构成的类关于子代数、同态像以及直积封闭.

定义 4.4.7　设 M 为 UL^*–代数, 函数 v: $F(S) \to M$ 叫做一个 M–赋值, 如果 v 是 $(-, \Delta, \otimes, \to, \wedge)$ 型同态.

用 Ω_M 表示全体 M–赋值之集. 设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v \in \Omega_M$ 均有 $v(A)$=1, 则称 A 为 M–重言式.

类似定理 4.4.8 可证如下结论成立.

定理 4.4.15(M–可靠性定理) 对于任意的 UL^*–代数 M, 系统 **UL*** 中的定理一定是 M–重言式.

定理 4.4.16 设 M 是 UL^*–代数, 则存在一簇全序 UL^*–代数$\{M_i|i \in I\}$, 使得 M 可以同构嵌入 M^*, 这里 $M^*=\prod\limits_{i\in I} M_i$.

证明 设 $\Gamma=\{P|P$ 是 M 的素滤子$\}$, 则 $\Gamma \neq \varnothing$ (容易证明, 每一个滤子都可扩充成一个极大滤子, 而极大滤子必是素滤子). 由定理 4.4.11, 对任意 $P \in \Gamma$, M/P 是全序 UL^*–代数, 记这簇全序 UL^*–代数的积为 M^*. 可以证明, 映射 f:$M \to M^*$, $x \mapsto([x]_P)_{P\in\Gamma}$ 是从 M 到 M^* 的单同态, 即 M 可以同构嵌入 M^*.

事实上, f 显然是同态映射. 设 $x, y \in M$, 若 $x \neq y$, 则 $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ 不同时成立, 不妨设 $x \leqslant y$ 不成立, 即 $x \to y \neq$1. 应用定理 4.4.12, 存在 M 的素滤子 P 使得 $x \to y \notin P$. 于是, 在 M/P 中 $[x]_P \leqslant [y]_P$ 不成立, 因此 $[x]_P \neq [y]_P$, 进而 $f(x) \neq f(y)$.

定理 4.4.17(系统 **UL*** 的完备性定理) 逻辑系统 **UL*** 是完备的, 即对系统 **UL*** 中的任意公式 A, 以下各项等价:

(1) A 是 **UL*** 系统的定理;

(2) 对任意的 UL^*–代数 M , A 是 M–重言式;

(3) 对任意线性序的 UL^*–代数 M , A 是 M–重言式.

证明 (1)⇒(2). 见定理 4.4.15.

(2)⇒(3). 显然成立.

(3)⇒(2). 根据定理 4.4.16, 只需证明对于任意一簇全序 UL^*–代数$\{M_i|i \in I\}$, 当对于每一个 M_i 来说 A 是 M_i–重言式时, A 是 M^*–重言式, 这里 $M^*=\prod\limits_{i\in I} M_i$. 事实上, 对任意 M^* 上的赋值 v 有: $f_i v$ 也是 M_i 上的赋值, 这里 f_i: $M^* \to M_i$ 是投影映射. 若 $v(A)=(a_i)_{i\in I} \neq$1, 则存在 $a_i \neq$1, 从而 $f_i(v(A)) \neq$1. 这与 “对于每一个 M_i 来说 A 是 M_i–重言式” 的假设矛盾.

(2)⇒(1). 由于 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的商代数 [F] 是一个 UL^*–代数, 故据 (2) 知 A 是 [F]–重言式, 即对 [F] 上的所有赋值 v 有 $v(A)$=1. 特别地, 对于典型映射

$$v : F(S) \to [F], A \mapsto [A], A \in F(S)$$

应有 $v(A)$=1. 从而 $[A]$=1, 这说明 A 是系统 **UL*** 的定理 (易证 [F] 的最大元 1 恰是系统 **UL*** 的全部定理).

定理 4.4.18(系统 UL* 的标准完备性定理)[194]　对系统 UL* 中的任意公式 A 来说, A 是定理当且仅当 A 是 1–重言式. 或者说, $\vdash A$ 当且仅当 A 是 $[0,1]_{UL^*}$ 重言式, 这里 $[0,1]_{UL^*}$ 表示标准 UL^*–代数, 即 $([0,1]; -, \Delta, \otimes, \to, \wedge)$, 这里 $-$ 表示强否 (即 $-x = 1 - x$, 并非 $-x = x \to 0$), $\otimes$ 与 $\to$ 分别是左连续 t–模及其剩余蕴涵, Δ 为通常的投影算子, $\wedge$ 为取小运算.

4.4.4　Schweizer-Sklar t–模及系统 UL* 的若干注记

如前所述, 逻辑系统 UL* 关于左连续 t–模是标准完备的. 不过, 作者当初引入逻辑系统 UL* 时, 是从 Schweizer-Sklar t–模 (它属于左连续 t–模) 出发的, 并从含参 t–模及柔性推理的角度阐述了它的重要性. 现在看来, 这些论述仍有积极意义, 有助于认识 t–模基逻辑在应用中的灵活性, 故本节对此作一介绍.

1. Schweizer-Sklar t–模的定义及其剩余蕴涵

Schweizer 与 Sklar 在文献 [127], [128] 中提出如下 t–模定义, 也可参阅文献 [129], [130], 称为 Schweizer-Sklar$t$–模,

$$T_p^{SS}(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y), & p \to -\infty, \\ T_P(x,y), & p \to 0, \\ T_M(x,y), & p \to \infty, \\ \begin{cases} (x^{-p} + y^{-p} - 1)^{-\frac{1}{p}}, & x^{-p} + y^{-p} \geqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} & p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty). \end{cases}$$

注 4.4.5　(1) 上面的 T_D, T_P, T_M 分别表示突变积、乘积、最小值 t–模 (见 2.1.1 小节);

(2) 在 $p > 0$ 时 $(x^{-p} + y^{-p} - 1)$ 可能无意义, 比如 $x=0$ 或 $y=0$ 时 0 出现在分母上. 此时令其对应的 t–模值为 0.

图 4.1 分别给出 $p=2$ 及 $p=-2$ 时 Schweizer-Sklar t–模的三维图形.

容易证明, Schweizer-Sklar t–模对应的剩余蕴涵为 (见文献 [49])

$$I_p^{SS}(x,y) = \begin{cases} \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y, & \text{其他}, \end{cases} & p \to \infty, \\ \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ y/x, & \text{其他}, \end{cases} & p \to 0, \\ \begin{cases} y, & x = 1, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases} & p \to -\infty, \\ \min\{1, \ (1 - x^{-p} + y^{-p})^{-\frac{1}{p}}\}, & p \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty). \end{cases}$$

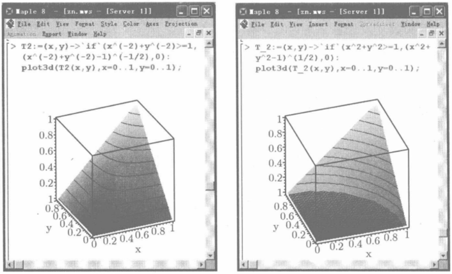


图 4.1 T_2^{SS}(左图) 及 T_{-2}^{SS}(右图) 的三维图形 (用 Maple 绘制)

注意, 对于 $p\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ 时, 文献 [49] 中没有对若干特殊点进行讨论, 这使得最后的剩余蕴涵表达式出现歧义. 为此, 特作以下分析:

(1) 当 $p>0$ 时, $I_p(x, 0)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$ 这是因为, 按照剩余蕴涵的定义 $0\to 0=\sup\{z|T_p(0,z)\leqslant 0\}=\sup\{z|0\leqslant 0\}=1$. 而当 $x\neq 0$ 时, $x\to 0=\sup\{z|T_p(x, z)\leqslant 0\}=\sup\{z|T_p(x, z)=0\}=0$, 这是因为 $(p>0, x\neq 0)$ 时只有 $z=0$ 满足 $T_p(x, z)=0$.

(2) 当 $p>0$ 时, $(1-x^{-p}+y^{-p})$ 可能非正 (比如 $1-0.1^{-2}+0.5^{-2}=-95$, $1-0.2^{-1}+0.25^{-1}=0$). 此时, 按照剩余蕴涵的定义易得 $I_p(x, y)=1$(实际上, 此时必有 $x<y$). 当然, 也可以仍用一个表达式

$$I_p(x,y)=\min\{1,\ (1-x^{-p}+y^{-p})^{-\frac{1}{p}}\},\quad p\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$$

来表示与 Schweizer-Sklar t–模相伴的剩余蕴涵, 但需要作如下约定 (当 $p>0$ 时): $I_p(0, 0)=1$; $x\neq 0$ 时 $I_p(x, 0)=0$; 如果 $(1-x^{-p}+y^{-p})$ 非正, $I_p(x, y)=1$.

本节主要讨论 $p\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ 的 Schweizer-Sklar t–模, 并用 $\otimes_p$ 表示 t–模 T_p^{SS}, $\to_p$ 表示其对应的剩余蕴涵. 另外, 用 $\oplus_p$ 表示 Schweizer-Sklar t 余模, 即

$$x\oplus_p y=1-(\max\{0,\ (1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1\})^{-\frac{1}{p}}.$$

2. Schweizer-Sklar t–模的基本性质

由于 $(\otimes_p, \to_p)$ 为伴随对, 故 $\otimes_p$ 与 $\to_p$ 满足可换剩余格的所有性质, 以下将直接应用它们.

命题 4.4.1 对任意 $x\in[0, 1]$, 规定

$$x' = 1 - x, \quad \neg_p x = x \to_p 0,$$

则对任何实数 p 及任意 $x, y \in [0, 1]$ 有

(1) $x \leqslant y \Rightarrow \neg_p y \leqslant \neg_p x$;

(2) $(x \otimes_p y)' = x' \oplus_p y'$;

(3) $(x \oplus_p y)' = x' \otimes_p y'$.

证明　(1) 显然成立. 由于

$$\begin{aligned}(x \otimes_p y)' &= 1 - (x \otimes_p y) = 1 - (\max\{0,\ x^{-p} + y^{-p} - 1\})^{-\frac{1}{p}},\\ x' \oplus_p y' &= (1-x) \oplus_p (1-y) = 1 - (\max\{0,\ (1-(1-x))^{-p}\\ &\quad + (1-(1-y))^{-p} - 1\})^{-\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

故 $(x \otimes_p y)' = x' \oplus_p y'$, 即 (2) 成立. 应用 (2) 及 $'$ 的对合性可得 (3).

命题 4.4.2　对于任何实数 $p < 0$ 及任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

(1) $(x \to_p y) \to_p y = (y \to_p x) \to_p x$;

(2) $\neg_p \neg_p x = x$;

(3) $x \oplus_p y = \neg_p [x \to_p (\neg_p y)]$.

证明　令 $\lambda = -p$, 因为 $p < 0$, 故 $\lambda > 0$. 先证 (1) 成立.

如果 $x \geqslant y$, 则 $x \to_p y = (\min\{1, 1 - x^\lambda + y^\lambda\})^{\frac{1}{\lambda}} = (1 - x^\lambda + y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}$. 从而

$$\begin{aligned}(x \to_p y) \to_p y &= (\min\{1, 1 - (1 - x^\lambda + y^\lambda) + y^\lambda\})^{\frac{1}{\lambda}}\\ &= (\min\{1, x^\lambda\})^{\frac{1}{\lambda}} = x,\end{aligned}$$

而此时 $(y \to_p x) \to_p x = 1 \to_p x = x$. 故 $(x \to_p y) \to_p y = (y \to_p x) \to_p x$.

如果 $y \geqslant x$, 据对称性知 $(x \to_p y) \to_p y = (y \to_p x) \to_p x = y$. 总之, (1) 成立.

在 (1) 中取 y=0 即得 $\neg_p(\neg_p x) = x$, 这说明 (2) 成立.

最后证明 (3) 成立. 因为

$$\begin{aligned}\neg_p(x \to_p (\neg_p y)) &= \neg_p(x \to_p (1 - y^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}})\\ &= \neg_p(\min\{1,\ 1 - x^\lambda + (1 - y^\lambda)\})^{\frac{1}{\lambda}}\\ &= (1 - \min\{1,\ 1 - x^\lambda + (1 - y^\lambda)\})^{\frac{1}{\lambda}}\\ &= (\max\{0,\ x^\lambda + y^\lambda - 1\})^{\frac{1}{\lambda}},\end{aligned}$$

故 $x \otimes_p y = \neg_p(x \to_p (\neg_p y))$.

注 4.4.6　上述结论在 $p > 0$ 时不成立, 比如取 p=1, x=2, y=1, 则 $\neg_p (\neg_p x)$= $(2 \to_p 0) \to_p 0 = 0 \to_p 0 = 1 \neq x$(计算 $2 \to_p 0$ 时遵循前面的约定), 这说明 (1), (2) 不成立. 而 $x \otimes_p y = 2 \neq 1 = \neg_p(x \to_p (\neg_p y))$, 即此时 (3) 也不成立.

命题 4.4.3　对于任何实数 $p > 0$ 及任意 $x, y, z \in [0, 1]$ 有

(1) $\Delta x = x' \to_p 0 = \neg_p(x')$.

(2) $x \wedge (\neg_p x)$=0.

(3) $z'' \leqslant (x \otimes_p z \to_p y \otimes_p z) \to_p (x \to_p y)$.

证明 若 x=1, 则 Δx=1, 而 $x' \to_p 0 = (1-x) \to_p 0 = 0 \to_p 0 = 1$, 即 $\Delta x = x' \to_p 0$.

若 $x \neq 1$, 则 $x' = 1 - x \neq 0$, 从而当 $p > 0$ 时 $x' \to_p 0 = 0$, 而此时也有 Δx=0. 总之, (1) 成立.

由 4.4.1 小节对 Schweizer-Sklar t–模的说明, 当 $p > 0$ 时, $x \to_p 0$ 或者等于 1(x=1 时) 或者等于 0($x \neq 1$ 时). 由此, 可直接验证 (2), (3) 成立.

注 4.4.7 (1) 一般地, 当 $p < 0$ 时 $\Delta x \neq x' \to_p 0$. (2) 由文献 [130] 中 Table 4.1 知, 当 $p \in [0, \infty)$, T_p^{SS} 是严格 t–模; 当 $p \in (-\infty, 0)$, T_p^{SS} 是幂零 t–模. 对所有 $p \in (-\infty, \infty)$, T_p^{SS} 是阿基米德 t–模. 文献 [130] 中的 λ 相当于这里的 $(-p)$.

由命题 4.4.2 及定理 3.2.1 容易看出, 对于 $p < 0$ 的 Schweizer-Sklar t–模, ([0, 1]; $\otimes_p$, $\to_p$, 0, 1) 构成一个 MV–链. 由命题 4.4.3 及定义 3.2.9 容易看出, 对于 $p > 0$ 的 Schweizer-Sklar t–模, ([0, 1]; $\otimes_p$, $\to_p$, 0, 1) 构成一个 Π–链. 因此, [166] 中建立的逻辑系统 **ŁΠ** 可看成传统意义上 (即取逻辑非为 $A \to_p 0$) 的 Schweizer-Sklar t–模基逻辑.

3. 广义相关性及 UL* 系统在近似推理中的应用

在引言中曾指出: 在模糊逻辑中, 选择怎样的蕴涵算子对模糊推理的效果有直接影响. 由于 t–模较好地反映了逻辑 "与" 的性质, 因而模糊逻辑系统中所选择的蕴涵算子基本上都与某种 t–模相伴. 然而要刻画人们日常推理中的灵活性 (或柔性), 选择带参数的 t–模似乎更为合理. 实际上, 对于逻辑系统 **UL***, 它是基于一般左连续 t–模的, 当将其特化为 Schweizer-Sklar t–模时, 可以对其中的参数 p 进行多种理解, 比如 Yager 的 "与度"[197]、Whalen 的 "模糊规则交互作用的强度"[49]、何华灿教授的广义相关系数 [17], 将这三者结合起来可以展现逻辑系统 **UL*** 在近似推理中的应用价值.

Yager 在文献 [197] 中首次提出 "与" 度的思想, 就是说人类在推理时对 "与"、"或" 有不同的要求, 这是人脑灵活性的表现. 陈永义在文献 [198] 中, 如下定义了 "与" 度:

$$AD(f) = 1 - 3\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

何华灿教授在文献 [17] 中, 进一步将 fuzzy 算子的 "与" 度拓展到命题之间, 认为命题之间有 "广义相关性", 它反映命题之间的关联关系, 用广义相关系数 h 来表示, 并给出如下定义:

$$h = 3\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中, $f(x, y)$ 是 fuzzy"与" 算子 (通常选用 t–模, 对于不连续的 t–模, 可以像文献 [199] 建议的那样取 Lebesgue 积分).

值得说明的是, 按照文献 [198]“与” 度的定义, “最大与算子 $\wedge$” 的 “与” 度最小 (恰为 0), 这与直观感觉恰好相反, 因此, 广义相关系数 h 实际上是文献 [198]“与” 度相对于 1 的补, 从而更具直观性 (可以类似 [198] 中定理 4.1 的证明得到 $0\leqslant h\leqslant 1$). 不仅如此, “最大与算子 $\wedge$” 对应的体积正好为 1/3, 因此, h 的几何意义就是 Fuzzy“与” 算子 $f(x, y)$ 与 “最大与算子 $\wedge$” 的体积之比. 有趣的是 Whalen [49] 认为应该考虑模糊规则之间的相互作用问题, 并提出相互作用 “强度” 的思想, 将 Schweizer-Sklar t–模中的参数 p 与 “强度” 联系起来, 这与广义相关系数的思想如出一辙 (文献 [17] 也选择了 Schweizer-Sklar t–模作为其构造命题联结词的基本模型). 下面借助广义相关系数及三 I 算法, 来分析系统 **UL*** 在模糊推理中的作用.

考虑如下的模糊推理问题: (GMP) 由公式 $A\to B$ 和 A^* 推得 B^*.

用系统 **UL*** 及三 I 算法, 可给 (GMP) 一个解: 因为 $(A\to_p B)\to_p(A^*\to_p B^*)=(A^*\&_p(A\to_p B))\to_p B^*$, 要使 $(A\to_p B)$ 与 $(A^*\to_p B^*)$ 更接近, 自然取 $B^*=A^*\&_p(A\to_p B)$. 而这实际上正好与$\&_p$ 的 “合取” 语义一致.

同样用文献 [27] 中的例子来说明问题. 假设公式 A 表示 “西红柿红了”, 公式 B 表示 “西红柿熟了”, A^* 表示 “某西红柿相当红了”. 而对于 $A\to B$ 的真值, 可能有多种理解, 比如 0.7, 0.8, 0.9 等; 对于 A^* 的真值, 同样可能有多种理解, 比如 0.7, 0.9, 0.95 等. A 与 B 之间有 “广义相关性”, 直观上看, 本问题中 A 与 B 之间 “有较大的相关性”, 故应取 $h\geqslant 0.75$(相对应的 $p>0$).

经计算有表 4.1 所示的结果 (取 p=2, 使用数学软件 Maple 计算可得相应的 $h\approx 0.92$).

表 4.1

A^*	$A\to_p B$	B^*	
		Schweizer-Sklar t–模	R_0 t–模
0.7	0.7	0.59	0.7
0.7	0.8	0.64	0.7
0.9	0.7	0.67	0.7
0.8	0.9	0.75	0.8
0.5	0.5	0.38	0
0.3	0.7	0.29	0

从表 4.1 可看出, 引入参数可以较好反映常识推理, 特别重要的是, 人们可以根据对 A 与 B 之间 “相关性” 的不同理解选择不同的参数 p, 使推理具有一定的柔性 (但总的趋势大致相当). 而系统 $\mathscr{L}^*$ 总取 A^* 与 $A\to B$ 中真值最小者, 过于刚性, 比如 (0.9, 0.7) 与 (0.7, 0.7) 没有区别; 同时, 对于 $\mathscr{L}^*$ 来说 (0.5, 0.5) 与 (0.3, 0.7) 其结果均为 0, 这尽管可从文献 [33] 中 “过半可信” 原则得到一定程度的解释, 但对于 A 与 B 之间关联程度较大时丢弃所有不过半的情况似乎有些生硬.

关于系统 $\mathbf{UL}^*$ 的意义再作些说明:

(1) 如前所述, 系统 $\mathbf{UL}^*$ 是对系统 **MTL** 的扩张, 但 **MTL** 没有对合否定, 这与通常 $\neg\neg A \approx A$ 的 "直观" 意义相差较远, 也与系统 $\mathscr{L}^*$ 的整齐结构形成鲜明对比. 系统 $\mathbf{UL}^*$ 保留 **MTL** 的广泛性 (基于一般左连续 t–模), 同时又具备系统 $\mathscr{L}^*$ 的对合否定, 这是系统 $\mathbf{UL}^*$ 的理论意义之一.

(2) 文献 [165] 建立了逻辑系统 $\mathbf{SBL}_\sim$, 但它限制在严格连续 t–模之下 (名称中的 S 正是 "严格" 的英文 strict 缩写). 而系统 $\mathbf{UL}^*$ 去掉了 "严格" 的限制, 并且仍然具有完备性, 从而较好地拓广了系统 $\mathbf{SBL}_\sim$, 这是系统 $\mathbf{UL}^*$ 的理论意义之二.

(3) 本章建立完备的 $\mathbf{UL}^*$ 系统的方法, 对于非可换模糊逻辑的形式化有直接的推广价值, 比如可用类似方法可以建立基于一般左连续伪 t–模 (pseudo t-norm) 的非可换模糊逻辑系统, 见本书第 6 章.

上面提到的各种逻辑系统及其与 t–模的关系可用图 4.2 表示.

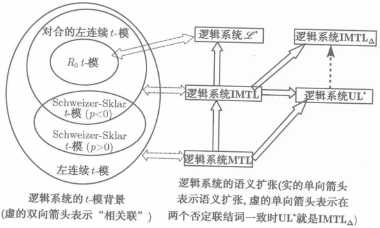


图 4.2 若干 t–模基逻辑之间的关系

习 题 4

1. 给出定理 4.1.3、定理 4.1.7 及定理 4.2.4 的证明.
2. 阅读文献 [184], 简述 **MTL** 标准完备性的新证明.
3. 阅读文献 [181], 给出 4.3.1 节所有结论的证明.
4. 给出系统 $\mathbf{UL}^*$ 标准完备性定理的完整证明.
5. 研究 Schweizer-Sklar t–模与模糊逻辑系统 **ŁΠ** 的关系, 讨论 Schweizer-Sklar t–模非可换推广的可能性.
6. 查阅国内外最新文献, 综述 MTL–代数结构的已有研究成果; 并在此基础上, 研究 UL^*–代数的结构及其滤子的特性.

第 5 章　与模糊逻辑相关的 Rough 逻辑系统

粗糙集 (rough set) 是波兰数学家 Pawlak 于 1982 年提出的 [200], 是一种新的处理含糊性和不确定性问题的数学工具. 相对于概率统计、模糊集等处理不确定性问题的数学工具而言, 粗糙集理论有其独特的优越性. 统计学需要概率分布, 模糊集理论需要隶属函数, 而粗糙集不需要关于数据的任何预备的或额外的信息, 它有确定的数学公式描述, 完全由数据决定, 所以更有客观性.

由于粗糙集理论有前述的优势, 因而自提出以来, 许多计算机科学家和数学家对其进行了坚持不懈的研究, 使之在理论上日趋完善, 特别是由于 20 世纪 80 年代末和 90 年代初在知识发现等领域得到成功的应用而越来越受到国际学术界的广泛关注. 1995 年 ACM Communication 将粗糙集列为新浮现的计算机科学的研究课题, 现在粗糙集理论已成为信息科学最活跃的研究领域. 目前, Rough 集理论已成功应用于知识发现、机器学习、决策支持、模式识别、专家系统、归纳推理等领域, 还广泛应用于医学、化学、材料学、地理学、管理科学和金融等其他学科.

Rough 集理论的内容十分丰富, 本章主要是介绍作者提出的基于 Rough 集的逻辑系统 **RSL** 及相关代数结构方面的研究成果, 因此对 Rough 集的论述是初步的和局部的, 对 Rough 集有兴趣的读者可以阅读相关书籍, 如文献 [201]~[204] 等.

5.1　Rough 集理论基础

5.1.1　Pawlak 粗糙集的基本概念

定义 5.1.1　设 U 是对象集 (论域), R 是 U 上的等价关系, 由 R 产生的等价类之集 (商集, 构成 U 的一个划分) 记为 $U/R=\{[x]_R|x\in U\}$, 其中, $[x]_R=\{y|(x, y)\in R\}$. 称 U 与 R 构成的整体 (U, R) 为近似空间 (approximation space). 对于任意 $X\subseteq U$, 记

$$R_-(X)=\cup\{[x]_R|\ [x]_R\subseteq X\}=\{x|\ [x]_R\subseteq X\}$$
$$R^-(X)=\cup\{[x]_R|\ [x]_R\cap X\neq\varnothing\}=\{x|\ [x]_R\cap X\neq\varnothing\}$$

分别称为 X 的下近似 (lower approximation) 和上近似 (upper approximation). 如果 X 的下近似和上近似相等, 则称 X 是可定义的集合, 否则称 X 为粗糙集或 Rough 集. 有时也称序对 $\langle R_-(X), R^-(X)\rangle$ 为 Rough 集. 集合 $\mathrm{bn}_R(X)=R^-(X)-R_-(X)$ 称为 X 的 R 边界 (boundary), 集合 $\mathrm{pos}_R(X)=R_-(X)$ 称为 X 的 R 正域 (positive

domain), 集合 $\mathrm{neg}_R(X) = U - R^-(X)$ 称为 X 的 R 负域 (negative domain).

图 5.1 直观地表示了 Rough 近似的基本概念.

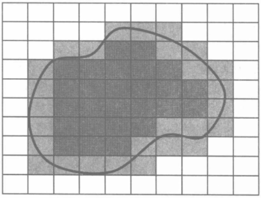


图 5.1 Rough 近似

注 5.1.1 将等价关系 R(或由 R 确定的 U 的划分 U/R) 看成知识, U 的子集理解成一个概念或范畴, 等价类 $[x]_R$ 理解为基本概念或基本范畴, 则对于 U 的任意子集 X, $R_-(X)$ 是那些根据知识 R 判断肯定属于 X 的 U 中元素组成的集合, $R^-(X)$ 是那些根据知识 R 判断可能属于 X 的 U 中元素组成的集合. 当 X 能表达成 R 基本范畴的并时, X 是 R 可定义的, 否则 X 是 R 不可定义的 (即 R 粗糙集). 显然, X 是 R 可定义集当且仅当 $R_-(X) = R^-(X)$, X 是 R 粗糙集当且仅当 $R_-(X) \neq R^-(X)$.

人工智能最主要的目的是为人类的某些智能行为建立适当的形式化模型, 以便利用计算机能再现人的智能的部分功能. 什么是人类的最主要的智能, 或者说智能的最重要表现形式是什么? 各家有不同的看法, 如 Simon 等认为人的智能表现为对问题求解目标的搜索 (search) 能力. Pawlak 则认为人的智能表现为对事物的分类能力. Rough 集理论正是基于此而提出来的, 它从一定程度上体现了人类的智能, 为处理复杂系统提供了有效方法.

定理 5.1.1 设 (U, R) 为近似空间, $X, Y \subseteq U$, $'$ 为集合的补运算, 则

(1) $R_-(X) \subseteq X \subseteq R^-(X)$;

(2) $R_-(\varnothing) = R^-(\varnothing) = \varnothing$, $R_-(U) = R^-(U) = U$;

(3) $R_-(X \cap Y) = R_-(X) \cap R_-(Y)$;

(4) $R^-(X) \cup R^-(Y) = R^-(X \cup Y)$;

(5) $X \subseteq Y \Rightarrow R_-(X) \subseteq R_-(Y)$;

(6) $X \subseteq Y \Rightarrow R^-(X) \subseteq R^-(Y)$;

(7) $R_-(X') = (R^-(X))'$;

(8) $R^{-}(X') = (R_{-}(X))'$;

(9) $R_{-}(X \cup Y) \supseteq R_{-}(X) \cup R_{-}(Y)$;

(10) $R^{-}(X \cap Y) \subseteq R^{-}(X) \cap R^{-}(Y)$;

(11) $R_{-}(R_{-}(X)) = R^{-}(R_{-}(X)) = R_{-}(X)$;

(12) $R_{-}(R^{-}(X)) = R^{-}(R^{-}(X)) = R^{-}(X)$.

上面 Rough 集的定义是构造性的, 即上、下近似算子由等价关系或划分等更基本的概念刻画. Rough 集还可以使用公理化方法进行定义, 即用一组公理来描述上、下近似的特征性质, 而公理集中出现的仅是两个抽象的近似运算. 当然, 能作为 Rough 集公理化定义的公理集, 必须能唯一地导出近似空间并与 Pawlak 的标准 Rough 上、下近似一致.

定理 5.1.2[205] 设 U 是论域, L 是 2^U 上的一元运算 (即 L: $2^U \to 2^U$), $'$ 为集合的补运算. 如果 L 满足以下公理:

(1) $L(X) \subseteq X$;

(2) $L(X \cap Y) = L(X) \cap L(Y)$;

(3) $(L(X))' = L((L(X))')$,

则存在 U 上的等价关系 R 使得 $(\forall X \subseteq U) L(X) = R_{-}(X)$. 若定义 2^U 上的一元运算 H: $2^U \to 2^U$ 如下:

$$\forall X \subseteq U, \quad H(X) = (L(X'))',$$

则 $(\forall X \subseteq U) H(X) = R^{-}(X)$. 此外, 上述公理 (1)~(3) 是独立的.

定理 5.1.3[205] 设 U 是论域, L 是 2^U 上的一元运算 (即 L: $2^U \to 2^U$), $'$ 为集合的补运算. 如果 L 满足以下公理:

(1′) $L(U) = U$;

(2′) $L(X) \subseteq X$;

(3′) $L(L(X) \cup Y) = L(X) \cup L(Y)$,

则存在 U 上的等价关系 R 使得 $(\forall X \subseteq U) L(X) = R_{-}(X)$. 若定义 2^U 上的一元运算 H: $2^U \to 2^U$ 如下:

$$\forall X \subseteq U, \quad H(X) = (L(X'))',$$

则 $(\forall X \subseteq U) H(X) = R^{-}(X)$. 此外, 上述公理 (1′)~(3′) 是独立的.

5.1.2 知识库、知识约简与信息系统

设 U 是论域, $\mathbf{R}$ 是 U 上的一族等价关系, 称 $K=(U, \mathbf{R})$ 为一个知识库. 如果 $\mathbf{P}$ 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集, 则 $\cap\mathbf{P}$ 也是一个等价关系, 称为 $\mathbf{P}$ 上的不可分辨 (indiscernibility) 关系, 记为 $\mathrm{ind}(\mathbf{P})$. 易于验证, $[x]_{\mathrm{ind}(\mathbf{P})} = \cap\{[x]_R | R \in \mathbf{P}\}$. 这样, $U/\mathrm{ind}(\mathbf{P})$ 表示与等

价关系族 $\mathbf{P}$ 相关的知识, 称为 K 中关于 U 的 $\mathbf{P}$ 基本知识 ($\mathbf{P}$ 基本集), ind($\mathbf{P}$) 的等价类称为知识 $\mathbf{P}$ 的基本概念 (基本范畴), 也称为 $\mathbf{P}$ 基本集.

定义 5.1.2 设 $K=(U, \mathbf{P})$, $K_1=(U, \mathbf{Q})$ 是两个知识库. 如果 ind($\mathbf{P}$)=ind($\mathbf{Q}$), 即 U/ind($\mathbf{P}$)=U/ind($\mathbf{Q}$), 则称 K 与 K_1(或 $\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{Q}$) 等价, 记作 $K \simeq K_1$(或 $\mathbf{P}\simeq\mathbf{Q}$).

注意, 这里的 $\mathbf{Q}$ 及下文的 $\mathbf{R}$ 并不代表有理数集及实数集, 它们均表示等价关系簇. 读者应能从上、下文中区别其不同含义.

知识库 K 与 K_1 等价, 意味着它们有相同的基本范畴集, 从而能表达关于论域的完全相同的事实.

知识约简就是在保持知识库分类能力不变的条件下, 删除其中不相关或不重要的知识. 知识约简中有两个基本概念: 约简 (reduct)、核 (core).

定义 5.1.3 设 $\mathbf{R}$ 是一族等价关系, $R \in \mathbf{R}$. 如果 ind($\mathbf{R}$)= ind($\mathbf{R}-\{R\}$), 则称 R 在 $\mathbf{R}$ 中是不必要的 (多余的), 否则称 R 在 $\mathbf{R}$ 中是必要的. 如果对每一个 $R \in \mathbf{R}$, R 在 $\mathbf{R}$ 中是必要的, 则称 $\mathbf{R}$ 是独立的, 否则称 $\mathbf{R}$ 是依赖的.

定理 5.1.4 如果 $\mathbf{R}$ 是独立的, $\mathbf{P}\subseteq\mathbf{R}$, 则 $\mathbf{P}$ 也是独立的.

定义 5.1.4 设 $\mathbf{P}$ 是等价关系族, $\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{P}$. 如果 $\mathbf{Q}$ 是独立的且 ind($\mathbf{Q}$)= ind($\mathbf{P}$), 则称 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{P}$ 的一个约简. $\mathbf{P}$ 的所有约简组成的集合记为 red($\mathbf{P}$).

定义 5.1.5 设 $\mathbf{P}$ 是等价关系族, $\mathbf{P}$ 中所有必要关系组成的集合称为 $\mathbf{P}$ 的核, 记为 core($\mathbf{P}$).

定理 5.1.5 设 $\mathbf{P}$ 是等价关系族, 则 core($\mathbf{P}$)=$\cap\{\mathbf{Q}|\mathbf{Q}\in$red($\mathbf{P}$)$\}$.

这说明核包含在所有约简之中, 它是知识约简时不能消去的知识特征集合.

知识发现就是要从大量的原始数据信息中分析和发现 (挖掘) 有用的规律信息, 即是将知识从一种原来的表达形式转换为一种新的目标表达形式 (人类或计算机便于处理的形式, 如逻辑规则等). 显然, 知识表达是知识发现的基础. Rough 集理论中用 "信息表"(或关系表) 来表达知识, 其基本要素是对象集合及对象的属性集, 关于这些对象的知识是通过指定对象的属性值 (特征值) 来描述的.

以下先给出信息系统 (又称为知识表达系统) 的一个抽象定义, 再给出信息表的具体例子.

定义 5.1.6 信息系统 (information system, 也称为知识表达系统) 是一个四元组 $S=(U, A, V, f)$, 其中 U 是对象的非空有限集 (即有限论域), A 是非空有限集, $V=\cup_{a\in A}V_a$(这里的 V_a 是属性 a 的值域), $f{:}U\times A\to V$ 是一个信息函数 (为每一个对象的每一个属性赋予一个信息值或称属性值, 即 $\forall x\in U, \forall a\in A, f(x, a)\in V_a$). 信息系统通常也简写为 $S=(U, A)$.

信息系统的数据以信息表 (关系表) 的形式表达, 表的行对应要研究的对象, 列对应对象的属性, 关于对象的信息通过指定对象的各属性值来表达. 在信息表中, 一

个属性对应一个等价关系 (可根据某个属性对对象进行分类), 整个表可看作一族等价关系, 即知识库. 这样, 知识约简实际上就是属性约简.

例 5.1.1　令 $U=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$是一组病人构成的集合, $A=\{$头痛, 肌肉痛, 体温$\}$是属性集. 关于这组病人的信息系统 (知识表达系统) 由如表 5.1 的信息表表示.

表 5.1

病人	头痛	肌肉痛	体温
e_1	是	是	正常
e_2	是	是	高
e_3	是	是	很高
e_4	否	是	正常
e_5	否	否	高
e_6	否	是	很高
e_7	否	否	高
e_8	否	是	很高

分别用 R_1, R_2, R_3 表示由属性 "头痛"、"肌肉痛"、"体温" 生成的 U 上的等价关系 (即属性值相同的对象等价. 由于在信息表中属性与等价关系互相对应, 故常直接用 R_1, R_2, R_3 表示属性), 则有

$$U/R_1 = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}\};$$
$$U/R_2 = \{\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\};$$
$$U/R_3 = \{\{e_1, e_4\}, \{e_2, e_5, e_7\}, \{e_3, e_6, e_8\}\}.$$

设 $X=\{e_1, e_4, e_6\}$, 取 $R = R_3$, 则对近似空间 (U, R) 来说, $R_-(X)=\{e_1, e_4\}$, $R^-(X)=\{e_1, e_3, e_4, e_6, e_8\}$. 取 $\mathbf{P}=\{R_1, R_2\}$, 则

$$U/\text{ind}(\mathbf{P}) = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_4, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\},$$

即 $\mathbf{P}$ 基本集是$\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_4, e_6, e_8\}$, $\{e_5, e_7\}$.

令 $\mathbf{R}=\{R_1, R_2, R_3\}$, 则 $K=(U, \mathbf{R})$ 是一个知识库. 根据定义易得

$U/\text{ind}(\mathbf{R})=\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5, e_7\}, \{e_6, e_8\}\}$.

$U/\text{ind}(\mathbf{R}-\{R_1\})=\{\{e_1, e_4\}, \{e_2\}, \{e_3, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}\neq U/\text{ind}(\mathbf{R})$, 即 R_1 在 $\mathbf{R}$ 中是必要的.

$U/\text{ind}(\mathbf{R}-\{R_2\})=\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5, e_7\}, \{e_6, e_8\}\}=U/\text{ind}(\mathbf{R})$, 即 R_2 在 $\mathbf{R}$ 中是不必要的.

$U/\text{ind}(\mathbf{R}-\{R_3\})=\{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_4, e_6, e_8\}, \{e_5, e_7\}\}\neq U/\text{ind}(\mathbf{R})$, 即 R_3 在 $\mathbf{R}$ 中是必要的.

令 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}-\{R_2\}=\{R_1, R_3\}$, 由于 $U/\mathrm{ind}(\mathbf{Q})\neq U/R_1$ 且 $U/\mathrm{ind}(\mathbf{Q})\neq U/R_3$, 所以 $\mathbf{Q}$ 是独立的, 从而 $\mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个约简. 容易验证, $\mathrm{core}(\mathbf{R})=\mathbf{Q}$.

定义 5.1.7 具有条件属性和决策属性的信息系统 (知识表达系统) 称为决策表, 即决策表是信息系统 $S=(U, A, V, f)$, 其中, $A=C\cup D$, $C\cap D=\varnothing$, C 称为条件属性集, D 称为决策属性集.

在决策表中, 不同的条件属性对于目标分类来说作用是不同的, Rough 集可用于分析属性的重要性, 也可用于从决策表中发现决策规则. 这方面的内容在此不作详细说明, 仅以下例简单说明.

考虑病例诊断信息系统, 将例 5.1.1 中的信息表扩充为如表 5.2 所述的决策表.

表 5.2

病人	头痛	肌肉痛	体温	流感
e_1	是	是	正常	否
e_2	是	是	高	是
e_3	是	是	很高	是
e_4	否	是	正常	否
e_5	否	否	高	否
e_6	否	是	很高	是
e_7	否	否	高	是
e_8	否	是	很高	否

表 5.2 中, $U=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, $C=\{$头痛, 肌肉痛, 体温$\}$是条件属性集, $D=\{$流感$\}$为决策属性集. 对上述决策表中的条件属性进行分析, 其重要性从高到低依次是 “体温”、“头痛”、“肌肉痛”. 对上述决策表进行属性约简, 可将冗余属性 “肌肉痛” 删去 (这样做不会改变整个系统的分类能力). 进一步分析, 可从决策表得到如下决策规则:

(头痛, 是) 且 (体温, 正常) $\to$ (流感, 否);

(头痛, 是) 且 (体温, 高) $\to$ (流感, 是);

(头痛, 是) 且 (体温, 很高) $\to$ (流感, 是);

(头痛, 否) 且 (体温, 正常) $\to$ (流感, 否).

5.1.3 Rough 集与模糊集 —— 粗糙模糊集与模糊粗糙集

模糊集和粗糙集都推广了经典集合论, 都可以用来描述知识的不精确性和不完全性. 然而它们的描述方法不同, 模糊集是通过对象关于集合的隶属程度来近似描述的, 而粗糙集是通过一个集合关于某个已知的可利用的信息库 (即近似空间) 的一对上、下近似来描述的. 模糊集理论和粗糙集理论有很强的互补性, 将这两个理论进行整合后, 去处理知识的不确定性和不完全性, 比它们各自去处理可望显示出

更强的功能. 法国学者 Dudios 和 Prade 在 1990 年提出了 rough fuzzy set 和 fuzzy rough set 的概念 [206], 之后有众多学者对其进行了深入研究, 本节仅介绍一些基本概念.

定义 5.1.8　设 (U, R) 为近似空间, 对 U 上的模糊集 $A:U \to [0, 1]$, 记

$$R_-(A)(x) = \wedge\{A(y)|y \in [x]_R\},$$
$$R^-(A)(x) = \vee\{A(y)|y \in [x]_R\},$$

称 $R_-(A)$ 为模糊集 A 关于 (U, R) 的下近似, 称 $R^-(A)$ 为模糊集 A 关于 (U, R) 的上近似. 若 $R_-(A) = R^-(A)$, 则称 A 为可定义的模糊集, 否则称 A 为粗糙模糊集.

显然, $R_-(A)$ 与 $R^-(A)$ 仍是 U 上的模糊集. 当 A 为经典集合时, $R_-(A)$ 与 $R^-(A)$ 也是经典集合, 且 $R_-(A)(x)=1$ 当且仅当 $[x]_R \subseteq A$, $R^-(A)(x)=1$ 当且仅当 $[x]_R \cap A \neq \varnothing$. 所以粗糙模糊集是粗糙集的自然推广.

令 $U = [0, 4)$, $U/R=\{[0, 0.5), [0.5, 1), [1, 1.5), [1.5, 2), [2, 2.5), [2.5, 3), [3, 3.5), [3.5, 4)\}$. A 是 U 上的模糊集, 其隶属函数如图 5.2 所示 (图中曲线), 则 $R_-(A)$ 的隶属函数图像由图中实线段构成, $R^-(A)$ 的隶属函数图像由图中虚线段构成.

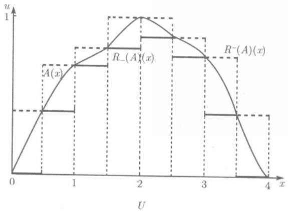


图 5.2　粗糙模糊集

对于 U 上的模糊集 A(记作 $A \in F(U)$) 及实数 $\alpha\in[0, 1]$, A 的 α 截集 A_α 作为经典集合, 它关于近似空间 (U, R) 有上、下近似, 即

$$R_-(A_\alpha) = \{x|[x]_R \subseteq A_\alpha\}, \quad R^-(A_\alpha) = \{x|[x]_R \cap A_\alpha \neq \varnothing\}.$$

且当 $\alpha < \beta$ 时有 (这里 $\beta\in[0, 1]$)

$$R_-(A_\beta) \subseteq R_-(A_\alpha), \quad R^-(A_\beta) \subseteq R^-(A_\alpha).$$

于是, $\{R_-(A_\alpha)|\alpha\in[0,1]\}$及$\{R^-(A_\alpha)|\alpha\in[0,1]\}$都是集合套, 从而由模糊集合论中的表现定理知可以确定 U 上的两个模糊集:

$$R_*(A)(x)=\vee\{\alpha|x\in R_-(A_\alpha)\}=\vee\{\alpha|[x]_R\subseteq A_\alpha\},$$
$$R^*(A)(x)=\vee\{\alpha|x\in R^-(A_\alpha)\}=\vee\{\alpha|[x]_R\cap A_\alpha\neq\varnothing\}.$$

定理 5.1.6[207] 设 (U,R) 为近似空间, A 为 U 上的模糊集, 则

$$R_*(A)=R_-(A),\quad R^*(A)=R^-(A).$$

定理 5.1.7 设 (U,R) 为近似空间, 关于 (U,R) 的模糊集的上、下近似具有以下性质:

(1) $R_-(A)\subseteq A\subseteq R^-(A)$;

(2) $R_-(\varnothing)=R^-(\varnothing)=\varnothing$, $R_-(U)=R^-(U)=U$;

(3) $R_-(A\cap B)=R_-(A)\cap R_-(B)$, $R^-(A\cup B)=R^-(A)\cup R^-(B)$;

(4) $R^-(A\cap B)\subseteq R^-(A)\cap R^-(B)$, $R_-(A\cup B)\supseteq R_-(A)\cup R_-(B)$;

(5) $R_-(A')=(R^-(A))'$; $R^-(A')=(R_-(A))'$;

(6) $R_-(R_-(A))=R^-(R_-(A))=R_-(A)$; $R_-(R^-(A))=R^-(R^-(A))=R^-(A)$,

其中, $A,B\in F(U)$, $'$ 为集合的补运算.

前述的粗糙模糊集 (一些文献也称其为模糊粗糙集) 是在 Pawlak 近似空间中用 (模糊) 上、下近似来表示模糊集, 它是 Pawlak 标准粗糙集的推广. 关于模糊 Rough 集, 文献中有各种不同的定义, 其中大部分是在模糊近似空间中用 (模糊) 上、下近似表达模糊集, 而对模糊近似空间又有各种不同的定义 (或者依据模糊关系、或者依据模糊近似关系、或者依据模糊等价关系), 且有基于一个论域或基于两个论域的区别. 此外, 还有基于 t-模、模糊覆盖、模糊划分、模糊拓扑等各种不同的模糊 Rough 集模型. 以下仅介绍基于一般模糊关系以及基于 t-模的模糊 Rough 集的基本概念.

定义 5.1.9 设 U 为非空论域, R 是 U 上的模糊关系, 即 $R\in F(U\times U)$. 对 U 上的模糊集 $A:U\to[0,1]$, 记

$$R_-(A)(x)=\wedge\{A(y)\vee(1-R(x,y))|y\in U\},$$
$$R^-(A)(x)=\vee\{A(y)\wedge R(x,y)|y\in U\},$$

称 $R_-(A)$ 为模糊集 A 关于 (U,R) 的模糊下近似, 称 $R^-(A)$ 为模糊集 A 关于 (U,R) 的模糊上近似.

注 5.1.2 从上述定义可以得到如下特殊模糊 Rough 集模型:

(1) 当 $A\subseteq U$, $R\subseteq U\times U$ 时 (即将经典集合与经典关系分别看成特殊的模糊集合和模糊关系), $R_-(A)(x)=1\Leftrightarrow(\forall y\in U)A(y)\vee(1-R(x,y))=1\Leftrightarrow(\forall y\in U)y\notin A$

蕴涵 $(x, y) \notin R$; $R^-(A)(x)=1 \Leftrightarrow (\exists y \in U)A(y) \wedge R(x, y)=1 \Leftrightarrow (\exists y \in U)y \in A$ 且 $(x, y) \in R$. 如果 R 是等价关系, 则 $R_-(A)(x)=1 \Leftrightarrow [x]_R \subseteq A$, $R^-(A)(x)=1 \Leftrightarrow [x]_R \cap A \neq \varnothing$. 这说明 Pawlak 标准 Rough 下、上近似是模糊下、上近似的特例.

(2) 当 $A \in F(U)$, $R \subseteq U \times U$ 时, $R_-(A)(x) = \wedge\{A(y) \vee (1\text{-}R(x, y)) | y \in U\} = \wedge\{A(y) | (x, y) \in R\}$; $R^-(A)(x) = \vee\{A(y) \wedge R(x, y) | y \in U\} = \vee\{A(y) | (x, y) \in R\}$. 如果 R 是等价关系, 则 $R_-(A)(x) = \wedge\{A(y) | y \in [x]_R\}$; $R^-(A)(x) = \vee\{A(y) | y \in [x]_R\}$. 这说明前述的粗糙模糊集也是定义 5.1.9 中模糊 Rough 集概念的特例.

定理 5.1.8 设 U 为非空论域, R 是 U 上的模糊关系, R_- 与 R^- 是定义 5.1.9 中的模糊下、上近似算子, 则

(1) $R_-(A) \subseteq A \subseteq R^-(A)$;

(2) $R^-(\varnothing) = \varnothing$, $R_-(U) = U$;

(3) $R_-(A)=(R^-(A'))'$, $R^-(A)=(R_-(A'))'$;

(4) $R_-(A \cap B) = R_-(A) \cap R_-(B)$, $R^-(A \cup B) = R^-(A) \cup R^-(B)$;

(5) $R^-(A \cap B) \subseteq R^-(A) \cap R_-(B)$, $R_-(A \cup B) \supseteq R_-(A) \cup R_-(B)$;

(6) $R_-(A \cup \alpha^\wedge) = R_-(A) \cup \alpha^\wedge$, $R_-(A \cap \alpha^\wedge) = R_-(A) \cap \alpha^\wedge$,

其中, $A, B \in F(U)$, $'$ 为模糊集的补运算, $\alpha^\wedge$ 表示恒取常数 $\alpha \in [0, 1]$ 的模糊集.

定理 5.1.9[207] 设 U 为非空论域, R 是 U 上的模糊关系, R_- 与 R^- 是定义 5.1.9 中的模糊下、上近似算子, $A \in F(U)$, 则 (其中 A_α 为 A 的 α 截集, $A_{\alpha+}$ 为 A 的 α 强截集)

(1) $R_-(A)(x) = \vee\{\alpha \wedge R_{(1-\alpha)-}(A_\alpha)(x) | \alpha \in [0, 1]\} = \vee\{\alpha \wedge R_{(1-\alpha)-}(A_{\alpha+})(x) | \alpha \in [0, 1]\}$;

(2) $R^-(A)(x) = \vee\{\alpha \wedge R_\alpha^-(A_\alpha)(x) | \alpha \in [0, 1]\} = \vee\{\alpha \wedge R_\alpha^-(A_{\alpha+})(x) | \alpha \in [0, 1]\}$.

Radzikowska 与 Kerre 在文献 [208] 中研究了基于蕴涵算子和 t–模的 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–模糊 Rough 集, 文献 [209], [210] 对此进行了进一步研究.

定义 5.1.10[208] 函数 $\mathcal{I}$:[0,1]×[0,1]→[0,1] 称为蕴涵算子 (implicator), 如果满足:

$$\mathcal{I}(1,1) = \mathcal{I}(0,1) = \mathcal{I}(0,0) = 1, \quad \mathcal{I}(1,0) = 0.$$

一个蕴涵算子称为边界蕴涵算子 (border implicator), 如果 $(\forall x \in [0, 1])$ $\mathcal{I}(1, x) = x$. 一个蕴涵算子称为是左单调的 (left monotonic), 如果对任意 $x \in [0, 1]$, $\mathcal{I}(\bullet, x)$ 是递减的; 一个蕴涵算子称为是右单调的 (right monotonic), 如果对任意 $x \in [0, 1]$, $\mathcal{I}(x, \bullet)$ 是递增的. 一个蕴涵算子称为是混合单调的 (hybrid monotonic), 如果它既是左单调的又是右单调的.

定义 5.1.11[208] 设 U 是非空论域, U 上的一个模糊关系 R 称为是 (模糊) 相似关系 (similarity relation), 如果 R 是

(1) 自反的, 即 $(\forall x \in U)R(x, x)=1$;

(2) 对称的, 即 $(\forall x, y \in U)R(x, y) = R(y,x)$;

(3) sup-min 传递的, 即 $(\forall x, y \in U)R(x, y) \geqslant \sup\{\min\{R(x,z), R(z,y)\}|z \in U\}$.

对于模糊相似关系 R 及 $x \in U$, 定义相似类 $[x]_R$ 为如下模糊集:

$$[x]_R(y) = R(x,y), \quad \forall y \in U.$$

注 5.1.3 有时称自反、对称的模糊关系为模糊相似关系, 这里以上述定义为准.

引理 5.1.1[208] 设 U 是非空论域, R 是 U 上的模糊相似关系, 则

(1) 对任意 t–模 $\mathcal{T}$ 有 $R(x, y)=\sup\{\mathcal{T}(R(x,z), R(z,y))|z \in U\},\forall x, y \in U$;

(2) 对任意连续 t–模 $\mathcal{T}$ 及其剩余蕴涵 $\mathcal{I}$ 有

$$R(x,y) = \inf\{\mathcal{I}(R(x,z), R(z,y))|z \in U\}, \quad \forall x, y \in U.$$

定义 5.1.12[208] 设 U 是非空论域, R 是 U 上的模糊相似关系, 称 FAS=(U, R) 为模糊近似空间 (fuzzy approximation space). 设 $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ 分别是边界蕴涵算子和 t–模, FAS 上的一个 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$ 模糊 Rough 近似是指如下定义的映射 $\mathrm{Apr}_{\mathrm{FAS}}^{\mathcal{I},\mathcal{T}}$:

$$\mathrm{Apr}_{\mathrm{FAS}}^{\mathcal{I},\mathcal{T}} : F(U) \to F(U) \times F(U); \forall A \in F(U), \mathrm{Apr}_{\mathrm{FAS}}^{\mathcal{I},\mathcal{T}}(A) = (\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A), \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)),$$

其中, $(\forall x \in U)$

$$\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A)(x) = \inf\{\mathcal{I}(R(x,y), A(y))|y \in U\},$$
$$\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)(x) = \sup\{\mathcal{T}(R(x,y), A(y))|y \in U\}.$$

模糊集 $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A)$, $\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)$ 分别称为 A 在 FAS 上的模糊 Rough $\mathcal{I}$–下近似、$\mathcal{T}$–上近似.

定义 5.1.13[208] 设 FAS=(U, R) 为模糊近似空间, $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ 分别是边界蕴涵算子和 t–模. 序对 $(P, Q) \in F(U) \times F(U)$ 称为是 FAS 上的 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–模糊 Rough 集, 如果存在 $A \in F(U)$ 使得 $(P, Q)=\mathrm{Apr}_{\mathrm{FAS}}^{\mathcal{I},\mathcal{T}}(A)=(\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A), \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A))$. 又, 一个模糊集 $A \in F(U)$ 称为是 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–可定义的, 如果 $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A) = A=\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)$.

定理 5.1.10[208] 设 FAS=(U, R) 为模糊近似空间, $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ 分别是边界蕴涵算子和 t–模, 则对任意 $A, B \in F(U)$ 有

(1) $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)$.

(2) $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(\varnothing) = \varnothing=\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(\varnothing)$.

(3) $\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(U) = U$; 若 $\mathcal{I}$ 是左单调的, $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(U) = U$.

(4) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A) \subseteq \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(B)$; 若 $\mathcal{I}$ 是右单调的, $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A) \subseteq \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(B)$.

定理 5.1.11[208]　设 FAS=(U, R) 为模糊近似空间, $\mathcal{T}, \mathcal{I}$ 分别是连续 t–模及其剩余蕴涵, 则对任意 $A \in F(U)$ 有

(1) $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A)$ 及 $\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A)$ 是 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–可定义的.

(2) $(\forall x \in U)$ $[x]_R$ 是 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–可定义的.

定理 5.1.12[208]　设 FAS=(U, R) 为模糊近似空间, $\mathcal{T}, \mathcal{I}$ 分别是 t–模及其剩余蕴涵, 则对任意 $A, B \in F(U)$ 有

(1) $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A \cap B) = \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A) \cap \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(B)$, $\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A \cap B) \subseteq \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A) \cap \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(B)$.

(2) $\mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A \cup B) \supseteq \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(A) \cup \mathrm{FAS}_{\mathcal{I}-}(B)$, $\mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A \cup B) \subseteq \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(A) \cup \mathrm{FAS}^{\mathcal{T}-}(B)$.

5.2　Rough 逻辑系统RSL

5.2.1　Rough 集与正则双 Stone 代数

对于 Pawlak 标准 Rough 集模型, 若将所有偶序对 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ (即可以作为某经典集下、上近似的序对, 论域 U 上的两个粗相等的子集对应同一个序对) 作为整体, 在其上定义相关运算, 可以构建基于 Rough 集的正则双 Stone 代数. 这一工作, 在文献 [211], [212] 中有论述 (文献 [201] 的 5.1 节和 5.2 节对此作了介绍), 但原文运用等价类和选择函数等知识, 不够直接和简明. 本节首先说明相关运算的封闭性, 然后仅用定义及经典集合的基本运算性质导出 Rough 双 Stone 代数. 作为预备知识, 先罗列相关基本概念.

定义 5.2.1[119,213]　双 Stone 代数是一个满足以下条件的 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 型代数结构 $(L; \vee, \wedge, {}^*, {}^+, 0, 1)$:

(1) $(L; \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界分配格;

(2) 对任意 $a \in L$, a^* 是 a 的伪补, 即 $a \wedge x{=}0 \Leftrightarrow x \leqslant a^*$.

(3) 对任意 $a \in L$, a^+ 是 a 的对偶伪补, 即 $a \vee x{=}1 \Leftrightarrow a^+ \leqslant x$.

(4) 对任意 $a \in L$, $a^* \vee a^{**}{=}1$, $a^+ \wedge a^{++}{=}0$.

注 5.2.1　关于 Stone 代数的概念请见定义 1.3.7.

命题 5.2.1[213,119]　在双 Stone 代数 $(L; \vee, \wedge, {}^*, {}^+, 0, 1)$ 中成立 $(\forall a, b \in L)$:

(1) $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$, $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$;

(2) $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$;

(3) $(a \vee b)^+ = a^+ \wedge b^+$, $(a \vee b)^{++} = a^{++} \vee b^{++}$;

(4) $(a \wedge b)^{++} = a^{++} \wedge b^{++}$;

(5) $a = a^{**} \wedge (a \vee a^*) = a^{++} \vee (a \wedge a^+)$;

(6) $a \wedge b=0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b=0$, $a \vee b=1 \Leftrightarrow a^{++} \vee b=1$;

(7) $a \leqslant b \Rightarrow b^* \leqslant a^*$, $a \leqslant b \Rightarrow b^+ \leqslant a^+$;

(8) $a^{++} \leqslant a \leqslant a^{**}$;

(9) $a^* \leqslant a^+$;

(10) $a^{+*} = a^{++}$, $a^{*+} = a^{**}$;

(11) $a^{+++} = a^+$, $a^{***} = a^*$.

对于双 Stone 代数 $(L; \vee, \wedge, {}^*, {}^+, 0, 1)$, 子集 $B(L)=\{x^* | x \in L\}$构成 L 的 Boole 子代数, 称为 L 的中心. 常用 $D(L)$ 表示 L 的稠密集$\{x \in L | x^*=0\}$. 对于 $M \subseteq L$, 记 $M^+=\{x^+ | x \in M\}$, $M^*=\{x^* | x \in M\}$.

定义 5.2.2 一个双 Stone 代数 $(L; \vee, \wedge, {}^*, {}^+, 0, 1)$ 称为是正则的, 如果满足以下条件之一 (它们彼此等价):

(RDSA) 对任意 $a, b \in L$, $(a^* = b^*, a^+ = b^+) \Rightarrow a = b$;

(RDSA1) 对任意 $a, b \in L$, $a \leqslant b \Leftrightarrow (a^{**} \leqslant b^{**}, a^{++} \leqslant b^{++})$;

(RDSA2) 对任意 $a, b \in L$, $a \wedge a^+ \leqslant b \vee b^*$.

定理 5.2.1[119,213,214] 设 $(B; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, F 是 B 的滤子 (F 可以等于 B), 记

$$(B, F) = \{(a, b) \in B \times B | a \leqslant b,\ b' \vee a \in F\},$$

则 $L=(B, F)$ 是 $B \times B$ 的有界子格, 且附加以下运算后构成一个正则双 Stone 代数:

$$(a, b)^* = (b', b'), \quad (a, b)^+ = (a', a'), \quad \forall (a, b) \in (B, F).$$

并且, $B(L)=\{(a, a) | a \in B\}$, $D(L)=\{(a, 1) | a \in F\}$. 反之, 如果 M 是任意正则双 Stone 代数, 令 $B = B(M)$, $F = D(M)^{++}$, 则映射 f: $M \to (B, F)$, $x \mapsto (x^{++}, x^{**})$ 是同构映射.

定义 5.2.3[214] 设 (U, R) 为近似空间, 对任意 $X \subseteq U$, 序对 $\langle R_-(X), R^-(X) \rangle$ 称为 (U, R) 上的一个 Rough 集. (U, R) 上所有 Rough 集构成的族称为完全 Rough 集代数 (full algebra of rough sets), 记为 $Sb_r(U, R)$.

定理 5.2.2 设 (U, R) 为近似空间, $Sb_r(U, R)$ 为全体 Rough 集构成的族, $\theta=\langle \varnothing, \varnothing \rangle$, $I = \langle U, U \rangle$. 对任意 $\langle R_-(X), R^-(X) \rangle$, $\langle R_-(Y), R^-(Y) \rangle \in Sb_r(U, R)$ 定义

$\langle R_-(X), R^-(X) \rangle \leqslant \langle R_-(Y), R^-(Y) \rangle$ 当且仅当 $(R_-(X) \subseteq R_-(Y)$ 且 $R^-(X) \subseteq R^-(Y))$;

$\langle R_-(X), R^-(X) \rangle \vee \langle R_-(Y), R^-(Y) \rangle = \langle R_-(X) \cup R_-(Y), R^-(X) \cup R^-(Y) \rangle$;

$\langle R_-(X), R^-(X) \rangle \wedge \langle R_-(Y), R^-(Y) \rangle = \langle R_-(X) \cap R_-(Y), R^-(X) \cap R^-(Y) \rangle$,

$$\langle R_-(X), R^-(X)\rangle^* = \langle \sim R^-(X), \sim R^-(X)\rangle,$$

(这里的 $\sim$ 表示集合论中的补运算)

则 $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, \theta, I)$ 是一个 Stone 代数 (称其为粗 Stone 代数). 若在粗 Stone 代数中再定义如下一元运算:

$$\langle R_-(X), R^-(X)\rangle^+ = \langle \sim R_-(X), \sim R_-(X)\rangle, \quad \forall \langle R_-(X), R^-(X)\rangle \in Sb_r(U, R),$$

则 $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, {}^+, \theta, I)$ 是一个正则双 Stone 代数 (称为 Rough 双 Stone 代数).

证明　(1) 首先证明在 $Sb_r(U, R)$ 上定义的上述运算是封闭的.

对于 $Sb_r(U, R)$ 上的运算 $\vee$, 需要证明对任意 $\alpha, \beta \in Sb_r(U, R)$, $\alpha \vee \beta \in Sb_r(U, R)$. 设 $\alpha = \langle R_-(X), R^-(X)\rangle$, $\beta = \langle R_-(Y), R^-(Y)\rangle$, 这里 $X \subseteq U, Y \subseteq U$. 根据 $\vee$ 的定义, 需要证明 $\langle R_-(X) \cup R_-(Y), R^-(X) \cup R^-(Y)\rangle$ 正好是 U 的某个子集的下、上近似构成的序对, 即存在 $P \subseteq U$ 使得 $R_-(P) = R_-(X) \cup R_-(Y)$, $R^-(P) = R^-(X) \cup R^-(Y)$. 事实上, 取

$$P = (X - \{x | [x]_R \subseteq X \cup Y, \text{ 且 } [x]_R \not\subseteq X, [x]_R \not\subseteq Y\}) \cup Y,$$

则 P 满足要求. 故 $Sb_r(U, R)$ 关于运算 $\vee$ 封闭.

对于 $Sb_r(U, R)$ 上的运算 $\wedge$, 需要证明对任意 $\alpha, \beta \in Sb_r(U, R)$, $\alpha \wedge \beta \in Sb_r(U, R)$. 设 $\alpha = \langle R_-(X), R^-(X)\rangle$, $\beta = \langle R_-(Y), R^-(Y)\rangle$, 这里 $X \subseteq U, Y \subseteq U$. 根据 $\wedge$ 的定义, 需要证明 $\langle R_-(X) \cap R_-(Y), R^-(X) \cap R^-(Y)\rangle$ 正好是 U 的某个子集的下、上近似构成的序对, 即存在 $Q \subseteq U$ 使得 $R_-(Q) = R_-(X) \cap R_-(Y)$, $R^-(Q) = R^-(X) \cap R^-(Y)$. 事实上, 取

$$Q = (X \cup \{x | [x]_R \subseteq \sim (X \cap Y), \text{ 且 } [x]_R \cap X \neq \varnothing, [x]_R \cap Y \neq \varnothing\}) \cap Y,$$

则 Q 满足要求. 故 $Sb_r(U, R)$ 关于运算 $\wedge$ 封闭.

对于 $Sb_r(U, R)$ 上的运算 *, 容易验证, 对任意 $X \subseteq U$ 有 $\langle R_-(X), R^-(X)\rangle^* = \langle R_-(Z), R^-(Z)\rangle$. 这里取 $Z = R_-(\sim X)$. 故 $Sb_r(U, R)$ 关于运算 * 封闭.

对于 $Sb_r(U, R)$ 上的运算 $^+$, 容易验证, 对任意 $X \subseteq U$ 有 $\langle R_-(X), R^-(X)\rangle^+ = \langle R_-(W), R^-(W)\rangle$. 这里取 $W = R^-(\sim X)$. 故 $Sb_r(U, R)$ 关于运算 $^+$ 封闭.

(2) 直接检验知, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, \theta, I)$ 是有界分配格.

(3) 证明 $Sb_r(U, R)$ 上的 * 是伪补运算. 设 $\alpha = \langle R_-(X), R^-(X)\rangle$, $\beta = \langle R_-(Y), R^-(Y)\rangle \in Sb_r(U, R)$. 若 $\alpha \wedge \beta = \theta$, 则 $\langle R_-(X) \cap R_-(Y), R^-(X) \cap R^-(Y)\rangle = \langle \varnothing, \varnothing\rangle$, 由 $R^-(X) \cap R^-(Y) = \varnothing$ 得 $R^-(Y) \subseteq \sim R^-(X)$, 进而 $R_-(Y) \subseteq R^-(Y) \subseteq \sim R^-(X)$, 故 $\langle R_-(Y), R^-(Y)\rangle \leqslant \langle \sim R^-(X), \sim R^-(X)\rangle$, 即 $\beta \leqslant \alpha^*$.

反之, 若 $\beta\leqslant\alpha^*$, 则 $\langle R_-(Y), R^-(Y)\rangle \leqslant \langle\sim R^-(X), \sim R^-(X)\rangle$, 即 $R_-(Y) \subseteq \sim R^-(X)$, $R^-(Y) \subseteq\sim R^-(X)$. 从而 $R_-(X)\cap R_-(Y) \subseteq R_-(X)\cap(\sim R^-(X))\subseteq R_-(X)\cap(\sim R_-(X))=\varnothing$, $R^-(X)\cap R^-(Y) \subseteq R^-(X)\cap(\sim R^-(X)) =\varnothing$, 即 $R_-(X)\cap R_-(Y) = \varnothing$ 且 $R^-(X)\cap R^-(Y) = \varnothing$, 所以 $\alpha\wedge\beta=\theta$.

(4) 类似于 (3) 可以证明, $Sb_r(U, R)$ 上的 $^+$ 是对偶伪补运算.

此外, 直接检验可知定义 5.2.1 (4) 及定义 5.2.2 (RDSA) 在 $Sb_r(U, R)$ 中均成立.

综上所述, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, {}^+, \theta, I)$ 是一个正则双 Stone 代数.

注 5.2.2 对于 $Sb_r(U, R)$ 中运算 $\vee, \wedge$ 的封闭性, 后面的 5.3.1 节将在更广泛的框架下给出详细证明.

定理 5.2.3[214,215] 设 $(L; \vee, \wedge, {}^*, {}^+, 0, 1)$ 是正则双 Stone 代数, 则必存在近似空间 (U, R) 使得 L 同构于 Rough 双 Stone 代数 $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, {}^+, \theta, I)$.

注 5.2.3 上述结果即是文献 [215] 中的 Corollary 4.2, 它与文献 [214] 中 Proposition 2.3 的表述略有不同, 不过从后者的证明过程不难得到上述结果.

5.2.2 *ND* 型 Rough 蕴涵及其性质

英国学者 Düntsch 在文献 [216] 中建立了基于 Rough 集的逻辑系统 $\mathcal{L}$, 其中用如下赋值函数赋予命题以 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 型的真值 (其中, P 为原子命题集, W 为论域):

$$v : P \to 2^W \times 2^W; \forall p \in P, v(p) = \langle A, B\rangle, \text{ 这里 } A \subseteq B.$$

Düntsch 将等式 $v(p) = \langle A, B\rangle$ 解释为命题 p 在所有 A 的情形下成立, 而在任何 B 之外的情形下不成立. 上述赋值函数 v 可进一步扩展到所有公式之集 Fml 上, 即文献 [216] 中的函数 mng: $Fml\to 2^W\times 2^W$. 于是, 根据 $\mathcal{L}$ 中蕴涵式的定义, 通过映射 mng 得到蕴涵公式 $\varphi\to\psi$ 的真值如下:

$$mng(\varphi \to \psi) = \langle -B \cup C \cup (D \cap -B), -B \cup D\rangle,$$

这里, $mng(\varphi)=\langle A, B\rangle$, $mng(\psi)=\langle C, D\rangle$, "$-$" 表示集合补运算. 这实际上导出了 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 型偶序对之间的一个蕴涵算子, 即

$$\langle A, B\rangle \to \langle C, D\rangle = \langle -B \cup C \cup (D \cap -B), -B \cup D\rangle.$$

然而, 此算子有明显的缺陷 (文献 [217] 对此也进行了分析), 比如, 很容易举例说明以下等式不被满足:

$$(f \to 0) \to 0 = f, f \to (g \to h) = g \to (f \to h),$$

这里, 0 表示 $\langle\varnothing, \varnothing\rangle$, f, g, h 为任意〈下近似, 上近似〉型偶序对. 将上述蕴涵算子改进为 ND 型蕴涵, 从结果看, $\rightarrow_{ND}$ 有较好的性质. 基于此建立新的逻辑形式系统, 并证明它的标准完备性定理 (见 5.2.4 节).

为了书写方便, 以下将 $R_{-}(X)$, $R^{-}(X)$ 分别简记为 X_d, X_u, 并用 $'$ 表示集合补 $\sim$.

定义 5.2.4[90,218]　设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, {}^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数. 定义 $Sb_r(U, R)$ 上的算子 $\rightarrow_{ND}$ 如下:

$$\forall\langle X_d, X_u\rangle, \langle Y_d, Y_u\rangle \in Sb_r(U, R),$$
$$\langle X_d, X_u\rangle \rightarrow_{ND} \langle Y_d, Y_u\rangle = \langle X_u' \cup Y_d \cup (Y_u \cap X_d'), X_d' \cup Y_u\rangle.$$

称为 $Sb_r(U, R)$ 上的 ND 型蕴涵算子.

注 5.2.4　(1) 上述蕴涵是 Düntsch 文献 [216] 中 Rough 蕴涵概念的改进, 故称为 ND 型, 即 new D-type.

(2) 上述定义在文献 [90] 中给出, 最早源自文献 [218], 不过那里是基于 Boole 代数上广义 Rough 集模型的, 也没有论证其封闭性. 下面将给出 ND 型蕴涵算子封闭性的证明.

定理 5.2.4[90]　设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, {}^*, {}^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数, $\rightarrow_{ND}$ 是 ND 型蕴涵算子, 则

(1) $\forall\langle X_d, X_u\rangle, \langle Y_d, Y_u\rangle \in Sb_r(U, R)$, $\langle X_d, X_u\rangle \rightarrow_{ND} \langle Y_d, Y_u\rangle = \langle(X_d' \cup Y_d) \cap (X_u' \cup Y_u), X_d' \cup Y_u\rangle$;

(2) $\forall\varphi, \psi \in Sb_r(U, R), \varphi \rightarrow_{ND} \psi = (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi^{*+})$, 这里 $\neg\varphi = \varphi^+ \wedge (\varphi \vee \varphi^*)$;

(3) $\forall\varphi, \psi \in Sb_r(U, R)$, $\varphi \rightarrow_{ND} \psi = (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\varphi^+ \vee \psi^{*+}) \wedge (\varphi \vee \varphi^* \vee \psi^{*+})$;

(4) $Sb_r(U, R)$ 关于 $\rightarrow_{ND}$ 是封闭的;

(5) $\forall\varphi \in Sb_r(U, R)$, $\neg\varphi = \varphi \rightarrow_{ND} \theta$.

证明　(1) 设 $\langle X_d, X_u\rangle, \langle Y_d, Y_u\rangle \in Sb_r(U, R)$, 则 $X_d \subseteq X_u$, $Y_d \subseteq Y_u$. 故 $X_u' \subseteq X_d'$, $Y_d' \cup Y_u = Y_u$. 于是由集合并、交运算的分配性得

$$\begin{aligned} X_u' \cup Y_d \cup (Y_u \cap X_d') &= (X_u' \cup Y_d \cup Y_u) \cap (X_u' \cup Y_d \cup X_d') \\ &= (X_u' \cup Y_u) \cap (X_d' \cup Y_d) \\ &= (X_d' \cup Y_d) \cap (X_u' \cup Y_u). \end{aligned}$$

从而 $\langle X_d, X_u\rangle \rightarrow_{ND} \langle Y_d, Y_u\rangle = \langle X_u' \cup Y_d \cup (Y_u \cap X_d'), X_d' \cup Y_u\rangle = \langle(X_d' \cup Y_d) \cap (X_u' \cup Y_u), X_d' \cup Y_u\rangle$.

(2) 令 $\varphi = \langle X_d, X_u\rangle$, $\psi = \langle Y_d, Y_u\rangle \in Sb_r(U, R)$. 首先证明 $\neg\varphi = \varphi^+ \wedge (\varphi \vee \varphi^*) =$

$\langle X_u', X_d' \rangle$.

$$\begin{aligned}\neg\varphi &= \varphi^+ \wedge (\varphi \vee \varphi^*)\\ &= \langle X_d', X_d' \rangle \wedge (\langle X_d, X_u \rangle \vee \langle X_u', X_u' \rangle)\\ &= \langle X_d', X_d' \rangle \wedge \langle X_d \cup X_u', X_u \cup X_u' \rangle\\ &= \langle X_d', X_d' \rangle \wedge \langle X_d \cup X_u', U \rangle\\ &= \langle X_d' \cap (X_d \cup X_u'), X_d' \rangle\\ &= \langle (X_d' \cap X_d) \cup (X_d' \cap X_u'), X_d' \rangle\\ &= \langle \varnothing \cup X_u', X_d' \rangle \qquad (\text{由} X_d \leqslant X_u \text{得} X_u' \leqslant X_d')\\ &= \langle X_u', X_d' \rangle.\end{aligned}$$

以下证明 $\varphi \to_{ND} \psi = (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi^{*+})$.

$$\begin{aligned}(\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi^{*+}) &= (\langle X_d', X_d' \rangle \vee \langle Y_d, Y_u \rangle) \wedge (\langle X_u', X_d' \rangle \vee \langle Y_u, Y_u \rangle)\\ &= \langle X_d' \cup Y_d, X_d' \cup Y_u \rangle \wedge \langle X_u' \cup Y_u, X_d' \cup Y_u \rangle\\ &= \langle (X_d' \cup Y_d) \cap (X_u' \cup Y_u), X_d' \cup Y_u \rangle\\ &= \varphi \to_{ND} \psi. \qquad (\text{由}(1))\end{aligned}$$

(3) 易验证 $\vee$ 与 $\wedge$ 的两个分配律成立, 再根据 (2) 并应用分配律可得 $\varphi \to_{ND} \psi = (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\varphi^+ \vee \psi^{**+}) \wedge (\varphi \vee \varphi^* \vee \psi^{*+})$.

(4) 由于 $Sb_r(U, R)$ 关于 $\vee, \wedge, ^*, ^+$ 封闭, 故由 (3) 知 $Sb_r(U, R)$ 关于 $\to_{ND}$ 封闭.

(5) 根据定义直接验证得到.

定义 5.2.5[90,218] 设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, ^*, ^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数. 定义 $Sb_r(U, R)$ 上的运算 $\otimes_{ND}$ 如下:

$$\forall \langle X_d, X_u \rangle,\ \langle Y_d, Y_u \rangle \in Sb_r(U, R),$$
$$\langle X_d, X_u \rangle \otimes_{ND} \langle Y_d, Y_u \rangle = \langle X_d \cap Y_d, X_u \cap Y_u \cap (X_d \cup Y_d) \rangle.$$

称为 $Sb_r(U, R)$ 上的 ND 型模算子.

定理 5.2.5[90] 设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, ^*, ^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数, $\otimes_{ND}$ 是 $Sb_r(U, R)$ 上的 ND 型模算子, 则

(1) $\forall \varphi, \psi \in Sb_r(U, R)$, $\varphi \otimes_{ND} \psi = (\varphi^{++} \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi^{++})$;

(2) $\forall \varphi, \psi \in Sb_r(U, R)$, $\varphi \otimes_{ND} \psi = \neg(\varphi \to_{ND} \neg\psi)$;

(3) $Sb_r(U, R)$ 关于 $\otimes_{ND}$ 是封闭的.

证明　依据定义, 可直接验证 (1), (2) 成立. 而由 (1) 及 $\vee, \wedge, ^+$ 的封闭性知, $Sb_r(U, R)$ 关于 $\otimes_{ND}$ 封闭.

直接验证可得如下结果.

定理 5.2.6[218]　设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, ^*, ^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数, $\to_{ND}$ 是 ND 型蕴涵算子, $\otimes_{ND}$ 是 $Sb_r(U, R)$ 上的 ND 型模算子, 则

(1) $(Sb_r(U, R); \otimes_{ND}, I)$ 是以 I 为单位的交换半群;

(2) $\forall \varphi, \psi, \chi \in Sb_r(U, R)$, $\varphi \leqslant \psi \to_{ND} \chi$ 当且仅当 $\varphi \otimes_{ND} \psi \leqslant \chi$;

(3) $\forall \varphi \in Sb_r(U, R)$, $\neg\neg\varphi = \varphi$;

(4) $\forall \varphi, \psi \in Sb_r(U, R)$, $(\varphi \to_{ND} \psi) \vee (\psi \to_{ND} \varphi) = 1$.

由定理 5.2.6 及定义 4.1.9 可得如下结果.

定理 5.2.7[90]　设 (U, R) 为近似空间, $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, ^*, ^+, \theta, I)$ 为 Rough 双 Stone 代数, $\to_{ND}$ 是 ND 型蕴涵算子, $\otimes_{ND}$ 是 $Sb_r(U, R)$ 上的 ND 型模算子, 则 $(Sb_r(U, R); \vee, \wedge, \otimes_{ND}, \to_{ND}, \theta, I)$ 是一个 $IMTL$–代数.

5.2.3　*RSL*–代数

本节将 ND 型蕴涵算子和 ND 型模算子推广到一般的正则双 Stone 代数上, 为下节建立基于 Rough 集的逻辑系统做准备.

定义 5.2.6[90]　设 $(L; \vee, \wedge, ^*, ^+, 0, 1)$ 是正则双 Stone 代数, 在 L 上定义一元运算 $\neg$、二元运算 $\to$ 与 $\otimes$ 如下:

(1) $\forall x \in L$, $\neg x = x^+ \wedge (x \vee x^*)$;

(2) $\forall x, y \in L$, $x \to y = (x^+ \vee y) \wedge (x^+ \vee y^{*+}) \wedge (x \vee x^* \vee y^{*+})$;

(3) $\forall x, y \in L$, $x \otimes y = (x^{++} \wedge y) \vee (x \wedge y^{++})$.

定理 5.2.8[90]　设 $(L; \vee, \wedge, ^*, ^+, 0, 1)$ 是正则双 Stone 代数, 运算 $\neg, \to$ 与 $\otimes$ 如定义 5.2.6, 则 $(\forall x, y \in L)$:

(1) $\neg x = x \to 0$;

(2) $x \to y = (x^+ \vee y) \wedge (\neg x \vee y^{*+})$;

(3) $x \otimes y = \neg(x \to \neg y)$;

(4) $x \otimes y = y \otimes x$, $x \otimes 1 = x$.

直接检验即可, 证明略去.

定理 5.2.9　设 $(L; \vee, \wedge, ^*, ^+, 0, 1)$ 是正则双 Stone 代数, 运算 $\neg, \to$ 与 $\otimes$ 如定义 5.2.6, 则以下结论成立:

(1) $\forall x \in L$, $\neg\neg x = x$;

(2) $\forall x, y \in L$, $x \to y = \neg y \to \neg x$.

证明 (1) 由运算 $\neg$ 的定义及命题 5.2.1 可得

$$\begin{aligned}
\neg\neg x &= \neg[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \\
&= [x^+ \wedge (x \vee x^*)]^+ \wedge \{[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]^*\} \\
&= [x^{++} \vee (x^+ \wedge x^{*+})] \wedge \{[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \vee [x^{+*} \vee (x^* \wedge x^{**})]\} \\
&= [x^{++} \vee (x^+ \wedge x^{**})] \wedge \{[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \vee (x^{+*} \vee 0)\} \\
&= [x^{++} \vee (x^+ \wedge x^{**})] \wedge \{[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \vee x^{++}\} \\
&= x^{++} \vee \{(x^+ \wedge x^{**}) \wedge [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \\
&= x^{++} \vee [x^+ \wedge x^{**} \wedge (x \vee x^*)] \\
&= x^{++} \vee \{x^+ \wedge [(x^{**} \wedge x) \vee (x^{**} \wedge x^*)]\} \\
&= x^{++} \vee [x^+ \wedge (x \vee 0)] \\
&= (x^{++} \vee x^+) \wedge (x^{++} \vee x) \\
&= 1 \wedge x \\
&= x.
\end{aligned}$$

(2) 由运算 $\neg, \rightarrow$ 的定义及命题 5.2.1 可得

$$\begin{aligned}
\neg y \wedge \neg x &= [y^+ \wedge (y \vee y^*)] \rightarrow [x^+ \wedge (x \vee x^*)] \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \\
&\quad \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]^{*+}\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \\
&\quad \vee [y^+ \wedge (y \vee y^*)]^* \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]^{*+}\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \\
&\quad \vee [x^{+*+} \wedge (x^{*+} \vee x^{**+})]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \\
&\quad \vee [y^+ \wedge (y \vee y^*)]^* \vee [x^{+*+} \wedge (x^{*+} \vee x^{**+})]\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \\
&\quad \vee [x^+ \wedge (x^{*+} \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \vee [y^+ \wedge (y \vee y^*)]^* \\
&\quad \vee [x^+ \wedge (x^{*+} \vee x^*)]\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee x^+\} \\
&\quad \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \vee [y^+ \wedge (y \vee y^*)]^* \vee x^+\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee x^+\} \\
&\quad \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \vee [y^{+*} \vee (y^* \wedge y^{**})] \vee x^+\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee x^+\} \\
&\quad \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)] \vee y^{+*} \vee x^+\} \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee x^+\} \\
&\quad \wedge [(y^+ \vee y^{+*} \vee x^+) \wedge (y \vee y^* \vee y^{+*} \vee x^+)] \\
&= \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee [x^+ \wedge (x \vee x^*)]\} \\
&\quad \wedge \{[y^+ \wedge (y \vee y^*)]^+ \vee x^+\} \wedge [(y^+ \vee y^{++} \vee x^+) \wedge (y \vee y^{++} \vee y^* \vee x^+)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\{[y^+\wedge(y\vee y^*)]^+\vee[x^+\wedge(x\vee x^*)]\}\\
&\quad\wedge\{[y^+\wedge(y\vee y^*)]^+\vee x^+\}\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=\{[y^+\wedge(y\vee y^*)]^+\vee[x^+\wedge(x\vee x^*)]\}\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=\{[y^{++}\vee(y^+\wedge y^{*+})]\vee[x^+\wedge(x\vee x^*)]\}\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=\{[(y^{++}\vee y^+)\wedge(y^{++}\vee y^{*+})]\vee[x^+\wedge(x\vee x^*)]\}\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=\{y^{**}\vee[x^+\wedge(x\vee x^*)]\}\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=(y^{**}\vee x^+)\wedge(y^{**}\vee x\vee x^*)\wedge(y\vee y^*\vee x^+)\\
&=(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\wedge[(y^{**}\vee x^+)\wedge(y\vee y^*\vee x^+)]
\end{aligned}
$$

(注意：根据 $\wedge$ 的幂等性, 这里多添加了一项 $x^+\vee y^{**}$)

$$
\begin{aligned}
&=(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\wedge\{[y^{**}\wedge(y\vee y^*)]\vee x^+\}\\
&=(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\wedge\{[(y^{**}\wedge y)\vee(y^{**}\wedge y^*)]\vee x^+\}\\
&=(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\wedge\{[(y^{**}\wedge y)\vee(y^{**}\wedge y^*)]\vee x^+\}\\
&=(x^+\vee y^{**})\wedge(x\vee x^*\vee y^{**})\wedge(y\vee x^+)\\
&=(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})\wedge(x^+\vee y)\\
&=(x^+\vee y)\wedge(x^+\vee y^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee y^{*+})\\
&=x\to y.
\end{aligned}
$$

引理 5.2.1　设 $(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$ 是正则双 Stone 代数, 运算 $\neg$ 如定义 5.2.6, 则以下结论成立 $(\forall x\in L)$:

(1) $(\neg x)^*=x^{+*}$;

(2) $\neg(x^+)=x^{++}$;

(3) $\neg(x^*)=x^{*+}$;

(4) $(\neg x)^+=x^{**}$.

证明　由 $\neg x$ 的定义及命题 5.2.1 得

(1) $(\neg x)^*=[x^+\wedge(x\vee x^*)]^*=x^{+*}\vee(x^*\wedge x^{**})=x^{+*}\vee 0=x^{+*}$.

(2) $\neg(x^+)=x^{++}\wedge(x^+\vee x^{++})=x^{++}\wedge(x^+\vee x^{++})=x^{++}\wedge 1=x^{++}$.

(3) $\neg(x^*)=x^{*+}\wedge(x^*\vee x^{**})=x^{*+}\wedge 1=x^{*+}$.

(4) $(\neg x)^+=[x^+\wedge(x\vee x^*)]^+=x^{++}\vee(x^+\wedge x^{*+})=(x^{++}\vee x^+)\wedge(x^{++}\vee x^{*+})=1\wedge x^{**}=x^{**}$.

定理 5.2.10　设 $(L;\vee,\wedge,^*,^+,0,1)$ 是正则双 Stone 代数, 运算 $\neg,\to$ 与 $\otimes$ 如定义 5.2.6, 则成立 $(\forall x,y,z\in L)$:

(1) $x\leqslant y\Leftrightarrow x\to y=1$;

(2) $x\leqslant y\Rightarrow\neg y\leqslant\neg x$;

(3) $\neg(x\vee y)=\neg x\wedge\neg y$, $\neg(x\wedge y)=\neg x\vee\neg y$;

(4) $x \to (y \to z) = x \otimes y \to z$;

(5) $x \leqslant y \to z \Leftrightarrow x \otimes y \leqslant z$;

(6) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$;

(7) $(x \to y) \vee (y \to x)$=1.

证明 (1) 由定理 5.2.8 有 $x \to y$=$(x^+ \vee y) \wedge (\neg x \vee y^{*+})$, 故 $x \to y$=1$\Leftrightarrow x^+ \vee y$=1 且 $\neg x \vee y^{*+}$=1. 从而,

$$x \to y = 1 \Leftrightarrow x^+ \geqslant y^+ \text{ 且 } (\neg x)^+ \leqslant y^{*+}.$$

由引理 5.2.1 及命题 5.2.1(10) 得, $x \to y$=1$\Leftrightarrow x^+ \geqslant y^+$ 且 $x^{**} \leqslant y^{**}$.

设 $x \leqslant y$, 则由命题 5.2.1(7) 得 $x^+ \geqslant y^+$ 及 $x^{**} \leqslant y^{**}$, 故由上述结果得 $x \to y$=1. 反之, 设 $x \to y$=1, 则 $x^+ \geqslant y^+$ 且 $x^{**} \leqslant y^{**}$. 这样, $(x \wedge y)^* = x^* \vee y^* = x^{***} \vee y^{***} = x^{***} = x^*$, $(x \wedge y)^+ = x^+ \vee y^+ = x^+$. 于是 $x \wedge y = x$, 即 $x \leqslant y$.

(2) 由定理 5.2.9(2) 及刚证明的 (1) 易得, $x \leqslant y \Rightarrow \neg y \leqslant \neg x$.

(3) 由定理 5.2.8 及命题 5.2.1 可得

$$\begin{aligned}
\neg x \wedge \neg y &= [x^+ \wedge (x \vee x^*)] \wedge [y^+ \wedge (y \vee y^*)] \\
&= (x^+ \wedge y^+) \wedge [(x \vee x^*)] \wedge (y \vee y^*)] \\
&= (x \vee y)^+ \wedge \{[(x \vee x^*) \wedge y] \vee [(x \vee x^*) \wedge y^*]\} \\
&= (x \vee y)^+ \wedge \{[(x \wedge y) \vee (x^* \wedge y)] \vee [(x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y^*)]\} \\
&= (x \vee y)^+ \wedge \{[(x \wedge y) \vee (x^* \wedge y)] \vee [(x \wedge y^*) \vee (x \vee y)^*]\} \\
&= (x \vee y)^+ \wedge \{[(x \wedge y) \vee (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y)] \vee (x \vee y)^*\} \\
&= (x \vee y)^+ \wedge \{[x \wedge (y \vee y^*)] \vee (x^* \wedge y) \vee (x \vee y)^*\} \\
&\leqslant (x \vee y)^+ \wedge [(x \vee y) \vee (x \vee y)^*] \\
&= \neg(x \vee y).
\end{aligned}$$

另一方面, 由 (2) 及 $x \leqslant x \vee y$ 可得 $\neg(x \vee y) \leqslant \neg x$, 同理有 $\neg(x \vee y) \leqslant \neg y$, 所以 $\neg(x \vee y) \leqslant \neg x \wedge \neg y$. 从而, $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

由结论 $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$, 并应用定理 5.2.9 (1) 可得 $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.

(4) 由定理 5.2.8、引理 5.2.1 及 (3) 可得

$$\begin{aligned}
x \to (y \to z) &= x \to [(y^+ \vee z) \wedge (\neg y \vee z^{*+})] \\
&= \{x^+ \vee [(y^+ \vee z) \wedge (\neg y \vee z^{*+})]\} \wedge \{\neg x \vee [(y^+ \vee z) \wedge (\neg y \vee z^{*+})]^{*+}\} \\
&= [(x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+})] \\
&\quad \wedge \{\neg x \vee \{(y^{+*+} \vee z^{*+}) \wedge [(\neg y)^{*+} \vee z^{*+*+}]\}\} \\
&= [(x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+})] \\
&\quad \wedge \{\neg x \vee [(y^{+*+} \vee z^{*+}) \wedge (y^{+*+} \vee z^{*+*+})]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+})] \\
&\quad \wedge \{\neg x \vee [(y^+ \vee z^{*+}) \wedge (y^+ \vee z^{*+})]\} \\
&= (x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+}) \wedge (\neg x \vee y^+ \vee z^{*+}).
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
x \otimes y \to z &= \neg(x \to \neg y) \to z \\
&= \neg\{(x^+ \vee \neg y) \wedge [\neg x \vee (\neg y)^{*+}]\} \to z \\
&= \{\neg(x^+) \wedge \neg\neg y) \vee [\neg\neg x \wedge \neg(\neg y)^{*+}]\} \to z \\
&= (x^{++} \wedge y) \vee (x \wedge y^{++}) \to z \\
&= \{[(x^{++} \wedge y) \vee (x \wedge y^{++})]^+ \vee z\} \wedge \{\neg[(x^{++} \wedge y) \vee (x \wedge y^{++})] \vee z^{*+}\} \\
&= \{[(x^{+++} \vee y^+) \wedge (x^+ \vee y^{+++})] \vee z\} \\
&\quad \wedge \{\{[\neg(x^{++}) \vee \neg y] \wedge [\neg x \vee \neg(y^{++})]\} \vee z^{*+}\} \\
&= (x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge \{[(x^+ \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y^+)] \vee z^{*+}\} \\
&= (x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+}) \wedge (\neg x \vee y^+ \vee z^{*+}).
\end{aligned}
$$

比较上述结果即得 $x \to (y \to z) = x \otimes y \to z = (x^+ \vee y^+ \vee z) \wedge (x^+ \vee \neg y \vee z^{*+}) \wedge (\neg x \vee y^+ \vee z^{*+})$.

(5) 由 (2) 及 (1) 易得, $x \leqslant y \to z \Leftrightarrow x \otimes y \leqslant z$.

(6) 对任意 $u \in L$, 应用 (4) 可得

$$
\begin{aligned}
(x \otimes y) \otimes z \to u &= (x \otimes y) \to (z \to u) \\
&= x \to [y \to (z \to u)] \\
&= x \to [(y \otimes z) \to u] \\
&= x \otimes (y \otimes z) \to u.
\end{aligned}
$$

由 u 的任意性即得 $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$.

(7) 由定理 5.2.8、引理 5.2.1 及 (3) 得

$$
\begin{aligned}
(x \to y) \vee (y \to x) &= [(x^+ \vee y) \wedge (\neg x \vee y^{*+})] \vee [(y^+ \vee x) \wedge (\neg y \vee x^{*+})] \\
&= [(x^+ \vee y) \vee (y^+ \vee x)] \wedge [(\neg x \vee y^{*+}) \vee (y^+ \vee x)] \\
&\quad \wedge [(x^+ \vee y) \vee (\neg y \vee x^{*+})] \wedge [(\neg x \vee y^{*+}) \vee (\neg y \vee x^{*+})] \\
&= [(x^+ \vee x) \vee (y^+ \vee y)] \wedge [(y \wedge y^*)^+ \vee (\neg x \vee x)] \\
&\quad \wedge [(x \wedge x^*)^+ \vee (\neg y \vee y)] \wedge [(\neg x \vee x^{*+}) \vee (\neg y \vee y^{*+})] \\
&= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge [(\neg x \vee x^{*+}) \vee (\neg y \vee y^{*+})] \\
&= \{[x^+ \wedge (x \vee x^*)] \vee x^{*+}\} \vee (\neg y \vee y^{*+})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=[(x^+\vee x^{*+})\wedge(x\vee x^*\vee x^{*+})]\vee(\neg y\vee y^{*+})\\
&=[(x\wedge x^*)^+\wedge(x\vee 1)]\vee(\neg y\vee y^{*+})\\
&=(1\wedge 1)\vee(\neg y\vee y^{*+})\\
&=1.
\end{aligned}
$$

根据定理 5.2.8 (4)、定理 5.2.9 (1)、定理 5.2.10 (5)~(7) 及定义 4.1.9 可得如下结论:

定理 5.2.11[90] 设 $(L;\vee,\wedge,{}^*,{}^+,0,1)$ 是正则双 Stone 代数, 运算 $\to$ 与 $\otimes$ 如定义 5.2.6, 则 $(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$ 是一个 *IMTL*–代数.

根据以上结论, 引入如下定义:

定义 5.2.7[90] 代数结构 $(L;\vee,\wedge,{}^*,{}^+,\otimes,\to,0,1)$ 称为 *RSL*–代数, 如果 $(L;\vee,\wedge,{}^*,{}^+,0,1)$ 是正则双 Stone 代数, $(L;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$ 是 *IMTL*–代数, 且运算 $\to$ 与 $\otimes$ 由定义 5.2.6 确定. 设 (U,R) 为近似空间, 由定理 5.2.2 及定理 5.2.7 知 $(Sb_r(U,R);\vee,\wedge,{}^*,{}^+,\otimes_{ND},\to_{ND},\theta,I)$ 是一个 *RSL*–代数, 称它为标准 *RSL*–代数.

5.2.4 逻辑系统 RSL 及其完备性

自 Pawlak 创立 Rough 集理论一来, Rough 逻辑的研究一直受到包括 Pawlak 本人在内的大批学者的广泛关注 [203,219,220]; 然而, 涉及 Rough 蕴涵的研究却很有限. 另一方面, Rough 集与模糊集理论作为处理不确定性现象的两种数学方法, 其结合研究同样是活跃的研究方向 [206~210]; 然而, 把 Ruogh 逻辑与近年模糊逻辑最新进展直接进行结合的逻辑学研究却未曾见到. 本节在前述构建的新 Rough 蕴涵算子的基础上, 建立基于 Rough 蕴涵的逻辑形式系统 **RSL**, 证明它的标准完备性, 并阐明它是著名模糊逻辑系统 **IMTL** 的扩张, 从而从一个特殊的视角揭示了 Rough 集与模糊逻辑的密切关系, 对上述两个方面的不足给出一种全新的解决方案.

需要说明的是文献 [221] 中虽然也给出一个基于 Rough 双 Stone 代数的逻辑演算系统, 但没有给出 Rough 蕴涵的具体定义且没有证明标准完备性定理.

定义 5.2.8 [90] 设原子命题集 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$,$F(S)$ 是 S 生成的 $({}^*,{}^+,\wedge,\to)$ 型自由代数, $\perp$ 是命题常元. 形式系统 **RSL** 中的公理由以下形式的公式组成:

(Ax1) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$;

(Ax2) $\varphi\wedge\psi\to\varphi$;

(Ax3) $\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi$;

(Ax4) $\varphi\to((\varphi\to\psi)\to\varphi\wedge\psi)$;

(Ax5) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$;

(Ax6) $(\neg\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\varphi)$;

(Ax7) $\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*\to\varphi\wedge\psi^*$, $\varphi\wedge\psi^*\to\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*$;

(Ax8) $\varphi\vee(\varphi\vee\psi)^+\to\varphi\vee\psi^+$, $\varphi\vee\psi^+\to\varphi\vee(\varphi\vee\psi)^+$;

(Ax9) $\varphi\to\bot^*$, $\top^+\to\varphi$;

(Ax10) $\bot^{**}\to\bot$, $\top\to\top^{++}$;

(Ax11) $\top\to\varphi^*\vee\varphi^{**}$, $\varphi^+\wedge\varphi^{++}\to\bot$;

(Ax12) $\varphi\wedge\varphi^+\to\psi\vee\psi^*$;

(Ax13) $(\varphi\to\psi)\to(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\varphi^+\vee\psi^{*+})\wedge(\varphi\vee\varphi^*\vee\psi^{*+})$,

$(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\varphi^+\vee\psi^{*+})\wedge(\varphi\vee\varphi^*\vee\psi^{*+})\to(\varphi\to\psi)$.

RSL 中的推理规则为 MP 规则 (即由 φ 及 $\varphi\to\psi$ 推出 ψ). 这里, $\varphi\vee\psi$ 是 $\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ 的简写, $\neg\varphi$ 是 $\varphi\to\bot$ 的简写, $\top$ 是 $\bot\to\bot$ 的简写. 此外, 用 $\varphi\&\psi$ 表示 $\neg(\varphi\to\neg\psi)$.

由上述定义容易看出, **RSL** 中的公理 (Ax1)~(Ax6) 正好是 **IMTL** 的全部公理 (见定义 4.1.7 及定理 4.1.3), 因此 **IMTL** 的定理均是 **RSL** 的定理. 由第 4 章中的相关结果, 有下述定理:

定理 5.2.12　以下公式是形式系统 **RSL** 中的定理:

(T1) $\varphi\to\varphi$;

(T2) $(\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\neg\varphi)$;

(T3) $(\varphi\to\neg\psi)\to(\psi\to\neg\varphi)$, $(\neg\varphi\to\psi)\to(\neg\psi\to\varphi)$;

(T4) $\varphi\to\neg\neg\varphi$, $\neg\neg\varphi\to\varphi$;

(T5) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$;

(T6) $\top$;

(T7) $\varphi\to\top$;

(T8) $\bot\to\varphi$;

(T9) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$;

(T10) $\neg\varphi\to(\varphi\to\psi)$, $\varphi\to(\neg\varphi\to\psi)$;

(T11) $(\psi\to\chi)\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))$;

(T12) $\varphi\&\psi\to\varphi$;

(T13) $\varphi\&\psi\to\psi\&\varphi$;

(T14) $(\varphi\&\psi)\&\chi\to\varphi\&(\psi\&\chi)$, $\varphi\&(\psi\&\chi)\to(\varphi\&\psi)\&\chi$;

(T15) $\varphi\&\psi\to\varphi\wedge\psi$;

(T16) $(\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\varphi\&\psi\to\chi)$, $(\varphi\&\psi\to\chi)\to(\varphi\to(\psi\to\chi))$;

(T17) $\varphi\to(\psi\to\varphi\&\psi)$;

(T18) $\varphi\to\varphi\vee\psi$;

(T19) $\varphi\vee\psi\to\psi\vee\varphi$;

(T20) $(\varphi\to\psi)\to(\varphi\&\chi\to\psi\&\chi)$;

(T21) $((\varphi\to\psi)\wedge(\varphi\to\chi))\to(\varphi\to(\psi\wedge\chi))$;

(T22) $((\varphi\to\chi)\wedge(\psi\to\chi))\to((\varphi\vee\psi)\to\chi)$;

(T23) $(\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi)$;

(T24) $(\varphi\wedge\psi)\wedge\chi\to\varphi\wedge(\psi\wedge\chi)$, $\varphi\wedge(\psi\wedge\chi)\to(\varphi\wedge\psi)\wedge\chi$;

(T25) $(\varphi\vee\psi)\vee\chi\to\varphi\vee(\psi\vee\chi)$, $\varphi\vee(\psi\vee\chi)\to(\varphi\vee\psi)\vee\chi$;

(T26) $\varphi\to\varphi\wedge(\varphi\vee\psi)$, $\varphi\vee(\varphi\wedge\psi)\to\varphi$;

(T27) $\varphi\wedge(\psi\vee\chi)\to(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)$, $(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)\to\varphi\wedge(\psi\vee\chi)$;

(T28) $\varphi\vee(\psi\wedge\chi)\to(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi)$, $(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\chi)\to\varphi\vee(\psi\wedge\chi)$;

(T29) $(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\to\neg(\varphi\vee\psi)$, $\neg(\varphi\vee\psi)\to(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$;

(T30) $(\neg\varphi\vee\neg\psi)\to\neg(\varphi\wedge\psi)$, $\neg(\varphi\wedge\psi)\to(\neg\varphi\vee\neg\psi)$.

定理 5.2.13 以下推理规则在系统 RSL 中成立:

(1) $\{\varphi\to\psi,\ \psi\to\chi\}\vdash\varphi\to\chi$;

(2) $\{\varphi,\ \psi\}\vdash\varphi\wedge\psi$;

(3) $\{\varphi\to(\psi\to\chi),\ \chi\to\xi\}\vdash\varphi\to(\psi\to\xi)$;

(4) $\{\varphi\to\psi,\ \chi\to\xi\}\vdash\varphi\wedge\chi\to\psi\wedge\xi$;

(5) $\{\varphi\to\psi,\ \chi\to\xi\}\vdash\varphi\vee\chi\to\psi\vee\xi$;

(6) $\{\varphi\to\psi,\ \chi\to\xi\}\vdash\varphi\&\chi\to\psi\&\xi$.

定义 5.2.9 设 $\varphi,\psi\in F(S)$, 如果 $\varphi\to\psi$ 与 $\psi\to\varphi$ 都是定理, 则称 φ 与 ψ 可证等价, 记作 $\varphi\equiv\psi$.

定理 5.2.14 以下结论在系统 RSL 中成立:

(1) $\bot^*\equiv\top$, $\top^+\equiv\bot$;

(2) $\bot^{**}\equiv\bot$, $\top^{++}\equiv\top$;

(3) $\varphi\wedge\top\equiv\varphi$, $\varphi\vee\bot\equiv\varphi$;

(4) $\varphi\wedge\varphi^*\equiv\bot$, $\varphi\vee\varphi^+\equiv\top$;

(5) $\{\varphi\wedge\psi\equiv\bot\}\vdash\psi\to\varphi^*$, $\{\top\equiv\varphi\vee\psi\}\vdash\psi^+\to\varphi$;

(6) $\{\varphi\to\psi\}\vdash\psi^*\to\varphi^*$, $\{\varphi\to\psi\}\vdash\psi^+\to\varphi^+$;

(7) $\varphi\to\varphi^{**}$, $\varphi^{++}\to\varphi$, $\varphi^{***}\equiv\varphi^*$, $\varphi^{+++}\equiv\varphi^+$;

(8) $(\varphi\wedge\psi)^{**}\equiv\varphi^{**}\wedge\psi^{**}$, $(\varphi\vee\psi)^{++}\equiv\varphi^{++}\vee\psi^{++}$;

(9) $\{\psi\to\varphi^*\}\vdash\varphi\wedge\psi\equiv\bot$, $\{\psi^+\to\varphi\}\vdash\top\equiv\varphi\vee\psi$;

(10) $(\varphi\vee\psi)^*\equiv\varphi^*\wedge\psi^*$, $(\varphi\wedge\psi)^+\equiv\varphi^+\vee\psi^+$;

(11) $\varphi^*\vee\varphi^{**}\equiv\top$, $\varphi^+\wedge\varphi^{++}\equiv\bot$;

(12) $\bot^+\equiv\top$, $\top^*\equiv\bot$;

(13) $\varphi^{*+}\equiv\varphi^{**}$, $\varphi^{+*}\equiv\varphi^{++}$;

(14) $\neg\varphi\equiv\varphi^+\wedge(\varphi\vee\varphi^*)$;

(15) $\varphi\to\psi\equiv(\varphi^+\vee\psi)\wedge(\neg\varphi\vee\psi^{*+})$.

证明 (1) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax9) 得 $\top\to\bot^*$, 而由定理 5.2.12 (T7) 有 $\bot^*\to\top$, 所以 $\bot^*\equiv\top$. 同理可得 $\top^+\equiv\bot$.

(2) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax10) 得 $\bot^{**}\rightarrow\bot$, 而由定理 5.2.12 (T8) 有 $\bot\rightarrow\bot^{**}$, 所以 $\bot^{**}\equiv\bot$. 同理可得 $\top^{++}\equiv\top$.

(3) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax4) 得 $\varphi\rightarrow((\varphi\rightarrow\top)\rightarrow\varphi\wedge\top)$, 由此并应用定理 5.2.12 (T5) 及 MP 规则得 $(\varphi\rightarrow\top)\rightarrow(\varphi\rightarrow\varphi\wedge\top)$, 再应用定理 5.2.12 (T7) 及 MP 规则得 $\varphi\rightarrow\varphi\wedge\top$. 而据公理 (Ax2) 有 $\varphi\wedge\top\rightarrow\varphi$, 所以 $\varphi\wedge\top\equiv\varphi$. 应用定理 5.2.12 (T22), (T8), (T18) 及定理 5.2.13 (2) 可证 $\varphi\vee\bot\equiv\varphi$.

(4) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax7) 得 $\varphi\wedge(\varphi\wedge\bot^*)^*\rightarrow\varphi\wedge\bot^{**}$. 又, 据定义 5.2.8 中的公理 (Ax2) 得 $\varphi\wedge\bot^{**}\rightarrow\bot^{**}$, 而由 (2) 有 $\bot^{**}\equiv\bot$, 故 $\varphi\wedge\bot^{**}\rightarrow\bot$. 从而, 应用定理 5.2.13 (1) 得 $\varphi\wedge(\varphi\wedge\bot^*)^*\rightarrow\bot$. 再应用 (1) 和 (3) 有 $\varphi\wedge\bot^*\equiv\varphi$. 于是 $\varphi\wedge\varphi^*\rightarrow\bot$. 据定理 5.2.12 (T8) 有 $\bot\rightarrow\varphi\wedge\varphi^*$, 这说明 $\varphi\wedge\varphi^*\equiv\bot$. 类似地, $\varphi\vee\varphi^+\equiv\top$.

(5) 设 $\varphi\wedge\psi\equiv\bot$, 则由定义 5.2.8 中的公理 (Ax3) 得 $\psi\wedge\varphi\equiv\bot$. 而由定义 5.2.8 中的公理 (Ax7) 得 $\psi\wedge\varphi^*\equiv\psi\wedge(\psi\wedge\varphi)^*$, 据 $\psi\wedge\varphi\equiv\bot$ 并应用 (1) 及 (3) 得 $\psi\wedge(\psi\wedge\varphi)^*\equiv\psi\wedge\bot^*\equiv\psi\wedge\top\equiv\psi$, 所以 $\psi\wedge\varphi^*\equiv\psi$. 进而由定义 5.2.8 中的公理 (Ax2) 及 MP 规则得 $\psi\rightarrow\varphi^*$. 类似地, 从定义 5.2.8 中的公理 (Ax8) 出发可证明$\{\top\equiv\varphi\vee\psi\}\vdash\psi^+\rightarrow\varphi$.

(6) 设 $\varphi\rightarrow\psi$, 则由定理 5.2.12 (T1) 及定理 5.2.13 (4) 得 $\varphi\wedge\psi^*\rightarrow\psi\wedge\psi^*$, 而由 (4) 得 $\psi\wedge\psi^*\equiv\bot$, 所以 $\varphi\wedge\psi^*\rightarrow\bot$. 据定理 5.2.12 (T8) 有 $\bot\rightarrow\varphi\wedge\psi^*$, 于是 $\varphi\wedge\psi^*\equiv\bot$. 应用 (5) 即得 $\psi^*\rightarrow\varphi^*$. 同理可证$\{\varphi\rightarrow\psi\}\vdash\psi^+\rightarrow\varphi^+$.

(7) 由 (4) 中 $\varphi\wedge\varphi^*\equiv\bot$, 应用由定义 5.2.8 中的公理 (Ax3) 得 $\varphi^*\wedge\varphi\equiv\bot$, 再应用 (5) 得 $\varphi\rightarrow\varphi^{**}$. 由 φ 的任意性可知, $\varphi^*\rightarrow\varphi^{***}$. 而从 $\varphi\rightarrow\varphi^{**}$ 出发, 应用 (6) 可得 $\varphi^{***}\rightarrow\varphi^*$. 所以 $\varphi^{***}\equiv\varphi^*$. 同理可证 $\varphi^{+++}\equiv\varphi^+$.

由上述证明过程知, 以下结论成立：$\varphi\rightarrow\varphi^{**}$. 同理 $\varphi^{++}\rightarrow\varphi$.

(8) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax2) 及 (Ax3) 得 $\varphi\wedge\psi\rightarrow\varphi$, $\varphi\wedge\psi\rightarrow\psi$. 应用 (6) 得 $(\varphi\wedge\psi)^{**}\rightarrow\varphi^{**}$, $(\varphi\wedge\psi)^{**}\rightarrow\psi^{**}$, 进而应用定理 5.2.13 (4) 得 $(\varphi\wedge\psi)^{**}\rightarrow\varphi^{**}\wedge\psi^{**}$.

另一方面, 由 (4) 有 $(\varphi\wedge\psi)\wedge(\varphi\wedge\psi)^*\equiv\bot$, 进而 $\psi\wedge(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\equiv\bot$, 应用 (5) 可得 $(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\rightarrow\psi^*$. 再据 (7) $\psi^*\equiv\psi^{***}$, 所以 $(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\rightarrow\psi^{***}$. 应用定理 5.2.13 (4) 得 $(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\wedge\psi^{**}\rightarrow(\psi^{**})^*\wedge\psi^{**}$, 而据 (4) $(\psi^{**})^*\wedge\psi^{**}\equiv\bot$, 于是 $(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\wedge\psi^{**}\rightarrow\bot$, 进而 $(\varphi\wedge(\varphi\wedge\psi)^*)\wedge\psi^{**}\equiv\bot$, 即 $\varphi\wedge((\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**})\equiv\bot$. 应用 (5) 可得 $(\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**}\rightarrow\varphi^*$. 而据 (7) $\varphi^*\equiv\varphi^{***}$, 所以 $(\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**}\rightarrow\varphi^{***}$. 应用定理 5.2.13 (4) 得 $((\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**})\wedge\varphi^{**}\rightarrow(\varphi^{**})^*\wedge\varphi^{**}$, 而据 (4) $(\varphi^{**})^*\wedge\varphi^{**}\equiv\bot$, 于是 $((\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**})\wedge\varphi^{**}\rightarrow\bot$, 进而 $((\varphi\wedge\psi)^*\wedge\psi^{**})\wedge\varphi^{**}\equiv\bot$, 即 $(\varphi\wedge\psi)^*\wedge(\varphi^{**}\wedge\psi^{**})\equiv\bot$. 再应用 (5) 即得 $(\varphi^{**}\wedge\psi^{**})\rightarrow(\varphi\wedge\psi)^{**}$. 从而, $(\varphi\wedge\psi)^{**}\equiv\varphi^{**}\wedge\psi^{**}$. 同理可证 $(\varphi\vee\psi)^{++}\equiv\varphi^{++}\vee\psi^{++}$.

(9) 设 $\psi\rightarrow\varphi^*$, 则由定理 5.2.13 (4) 得 $\varphi\wedge\psi\rightarrow\varphi\wedge\varphi^*$, 而据 (4) $\varphi\wedge\varphi^*\equiv\bot$, 所以 $\varphi\wedge\psi\rightarrow\bot$, 进而有 $\varphi\wedge\psi\equiv\bot$(应用定理 5.2.12 (T8)). 同理可证$\{\psi^+\rightarrow\varphi\}\vdash\top\equiv\varphi\vee\psi$.

(10) 由定理 5.2.12 (T18) 及 (T19) 有 $\varphi\rightarrow\varphi\vee\psi$ 及 $\psi\rightarrow\varphi\vee\psi$, 应用 (6) 可得

$(\varphi\vee\psi)^* \to \varphi^*$, $(\varphi\vee\psi)^* \to\psi^*$. 再据定理 5.2.13 (4) 得 $(\varphi\vee\psi)^* \to\varphi^*\wedge\psi^*$.

另一方面, 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax2) 得 $\varphi^*\wedge\psi^* \to\varphi^*$, 应用 (6) 有 $\varphi^{**} \to (\varphi^*\wedge\psi^*)^*$, 再应用 (7) 中 $\varphi\to\varphi^{**}$ 及定理 4.3 (1) 可得 $\varphi\to(\varphi^*\wedge\psi^*)^*$. 同理, $\psi\to(\varphi^*\wedge\psi^*)^*$. 从而应用定理 5.2.13 (5) 得 $\varphi\vee\psi\to(\varphi^*\wedge\psi^*)^*$. 再据 (6) 有 $(\varphi^*\wedge\psi^*)^{**} \to(\varphi\vee\psi)^*$, 而由 (8) 及 (7) 得 $(\varphi^*\wedge\psi^*)^{**} \equiv\varphi^*\wedge\psi^*$, 于是 $\varphi^*\wedge\psi^* \to(\varphi\vee\psi)^*$. 所以 $(\varphi\vee\psi)^* \equiv\varphi^*\wedge\psi^*$.

同理可证, $(\varphi\wedge\psi)^+ \equiv\varphi^+\vee\psi^+$.

(11) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax11) 及定理 5.2.12(T7), (T8) 即可推得.

(12) 由 (1), (2), (6) 即可推得.

(13) 首先, 由 (11) 有 $\varphi^*\vee\varphi^{**} \equiv \top$, 即 $\top \equiv\varphi^{**}\vee\varphi^*$. 应用 (5) 得 $\varphi^{*+} \to\varphi^{**}$.

其次, 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax7) 有 $\varphi^{*+}\wedge\varphi^{*++*} \equiv\varphi^{*+}\wedge(\varphi^{*+}\wedge\varphi^{*++})^*$. 而由 (11) 及 (12) 有 $(\varphi^{*+}\wedge\varphi^{*++})^* \equiv \bot^* \equiv \top$, 故 $\varphi^{*+}\vee\varphi^{*++*} \equiv\varphi^{*+} \wedge \top$, 又由 (3) 有 $\varphi^{*+} \wedge \top \equiv\varphi^{*+}$, 于是 $\varphi^{*+}\vee\varphi^{*++*} \equiv\varphi^{*+}$, 从而 $\varphi^{*++*} \to\varphi^{*+}$(应用定理 5.2.12(T18)). 同时, 由 (7) 有 $\varphi^{*++} \to\varphi^*$, 应用 (6) 得 $\varphi^{**} \to\varphi^{*++*}$. 所以, 应用定理 5.2.13 (1) 即得 $\varphi^{**} \to\varphi^{*+}$. 综合前述结果, $\varphi^{**} \equiv\varphi^{*+}$.

类似地, 可以证明 $\varphi^{+*} \equiv\varphi^{++}$.

(14) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax13) 及本定理 (1), (3) 得 (注意 $\neg\varphi$ 就是 $\varphi\to \bot$)

$$\begin{aligned}\neg\varphi &\equiv (\varphi^+ \vee \bot) \wedge (\varphi^+ \vee \bot^{*+}) \wedge (\varphi \vee \varphi^* \vee \bot^{*+})\\ &\equiv \varphi^+ \wedge \varphi^+ \wedge \varphi \vee \varphi^*) \equiv \varphi^+ \wedge \varphi \vee \varphi^*).\end{aligned}$$

这里应用了 $\varphi^+ \equiv\varphi^+\wedge\varphi^+$ 结论, 实际上它可由定理 5.2.12 (T21) 及定理 5.2.13 (2) 推出.

(15) 由定义 5.2.8 中的公理 (Ax13)$\varphi \to \psi \equiv (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\varphi^+ \vee \psi^{*+}) \wedge (\varphi \vee \varphi^* \vee \psi^{*+})$, 应用 (14) 及定理 5.2.12 (T28) 即得 $\varphi \to \psi \equiv (\varphi^+ \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi^{*+})$.

由定理 5.2.13 及定理 5.2.14 可知, 可证等价 $\equiv$ 是 $F(S)$ 上的同余关系. 综合上述结果可得:

定理 5.2.15 设 [F] 是 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\equiv$ 的商代数, 则 ([F]; $\vee, \wedge, {}^*, {}^+, \otimes, \to$, [$\bot$], [$\top$]) 构成一个 *RSL*-代数, 这里, [F] 中序 $\leqslant$ 的定义为 $\forall\varphi, \psi\in F(S)$, $[\varphi]\leqslant[\psi]$ 当且仅当 $\vdash\varphi\to\psi$, 而 [F] 上的运算为典型运算, [$\top$] 表示系统 **RSL** 中定理所在的等价类.

对于形式系统 **RSL**, 给出如下语义解释.

定义 5.2.10 设 (L; $\vee, \wedge, {}^*, {}^+, \otimes, \to$, 0, 1) 是一个 *RSL*-代数, 函数 v: $F(S) \to L$ 叫做一个 L-赋值, 如果 v 是 ($\vee, \wedge, {}^*, {}^+, \otimes, \to$) 型同态. 如果公式 $\varphi\in F(S)$ 对任意 L-赋值 v 均有 $v(\varphi)$=1, 则称 φ 是 L-重言式, 记为 $\models_L\varphi$.

定义 5.2.11 设 $F(S)$ 是形式系统 **RSL** 中的所有公式之集, (U, R) 是一个近

似空间. 映射

$$v : S \to Sb_r(U, R); \forall p \in S, v(p) = \langle X_d, X_u \rangle, \text{ 这里 } X \subseteq U.$$

如果上述映射 v 保持运算 ($\vee$, $\wedge$, *,$^+$, $\otimes$, $\to$), 则称 v 为 (U, R) 上的一个赋值, $v(p) = \langle X_d, X_u \rangle$ 解释为原子命题 p 在所有 X_d 的情形下成立, 而在任何 X_u 之外的情形下不成立. 上述赋值函数 v 可自然扩展到所有公式之集 $F(S)$, 仍称其为赋值. 如果公式 $\varphi \in F(S)$ 对任意赋值 v 均有 $v(\varphi)=I=(U, U)$, 则称 φ 是重言式, 记为 $\models \varphi$.

显然, (U, R) 上的一个赋值实际上是标准 RSL–代数 ($Sb_r(U, R)$; $\vee$, $\wedge$, *,$^+$, θ,I) 上的赋值.

定理 5.2.16(形式系统 **RSL** 的标准完备性定理)　形式系统 **RSL** 关于标准 RSL–代数是完备的, 即对任意公式 $\varphi \in F(S)$, 以下条件彼此等价:

(1) φ 是系统 **RSL** 中的定理, 即 $\vdash \varphi$.

(2) φ 对任意 RSL–代数 L 来说是 L–重言式, 即 $\models_L \varphi$.

(3) φ 对任意标准 RSL–代数 (即由某近似空间确定的) 来说是重言式, 即 $\models \varphi$.

证明　由系统 **RSL** 及定理 5.2.12 ~ 定理 5.2.14, 易于验证: 对任意 RSL–代数 L, **RSL** 中的每一公理都是 L–重言式; 同时, MP 规则保持重言式. 所以由公理、MP 规则推出的所有定理均是 L–重言式, $\vdash \varphi \Rightarrow \models_L \varphi$, 即 (1) $\Rightarrow$ (2).

另一方面, 如果 φ 对任意 RSL–代数 L 来说是 L–重言式, 则由定理 5.2.15 知 φ 对 RSL–代数 W=([F]; $\vee$, $\wedge$, *,$^+$, $\otimes$, $\to$, [$\perp$], [$\top$]) 来说也是重言式, 即对任意 W–赋值 v 有 $v(\varphi)$=[φ]=[$\top$], 这说明 φ 是系统 **RSL** 中的定理, 即 $\vdash \varphi$. 所以 (2) $\Leftrightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的, 下证 (3) $\Rightarrow$ (2).

只需证明: 若有公式 φ 对某个 RSL–代数 L 来说不是 L–重言式, 则公式 φ 对某个标准 RSL–代数来说也不是重言式. 若 φ 对某个 RSL–代数 L 来说不是 L–重言式, 则存在一个赋值 v: $F(S) \to L$, $v(\varphi) \neq 1$. 根据定理 5.2.3, 必存在一个近似空间 (U, R) 使得 L 与标准 RSL–代数 ($Sb_r(U, R)$; $\vee$, $\wedge$, *,$^+$, θ,I) 同构. 设 f 是 L 与 ($Sb_r(U$, R) 之间的同构映射, 则 v 与 f 的合成 $f \circ v$ 是 (U, R) 上的赋值, 从而 $(f \circ v)(\varphi) \neq I$, 即 φ 对于标准 RSL–代数 ($Sb_r(U, R)$; $\vee$, $\wedge$, *,$^+$, θ,I) 来说不是重言式.

注 5.2.5　(1) 5.2 节研究了标准 Rough 集模型的蕴涵算子问题, 从偶序对 〈下近似, 上近似〉 角度, 引入一种新的 Rough 蕴涵 ——ND 型蕴涵算子, 证明了它的良好性质, 比如对应的非运算具有对合性、可诱导一个剩余 t–模 (即 ND 型模算子)、可构成 $IMTL$–代数等. 同时, 将这样的 ND 型蕴涵算子拓广到一般正则双 Stone 代数中, 得到类似结果. 在此基础上, 建立了基于 Rough 集的逻辑形式系统 **RSL**, 证明它的标准完备性定理 (即相对于由近似空间确定的标准 RSL–代数来说

是完备的), 说明了 **RSL** 是著名模糊逻辑系统 **IMTL** 的扩张, 使近年十分活跃的两个不同的非经典逻辑研究方向紧密地结合起来了. 需要指出的是关于源于模糊逻辑的代数结构与源于 Rough 集的代数结构之间的联系, 是一个值得进一步研究的课题 (文献 [222] 给出一些初步的结果).

(2) 系统 **RSL** 不仅有上述理论上的重要意义, 而且有一定应用价值. 在此之前, Rough 蕴涵用来描述决策表中的决策规则, 而 *ND* 型 Rough 蕴涵是从 Rough 集的偶序对 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 表示出发的, 而 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 可以表示基于知识库的概念 (包括模糊概念), 从而 *ND* 型 Rough 蕴涵可以表达概念之间的关系, 因此形式系统 **RSL** 可以作为近似推理的逻辑基础, 根据已有概念间的联系导出潜在的知识及其联系. 此外, 本文构造蕴涵算子的方法对区间值模糊逻辑和直觉模糊逻辑也有一定参考价值. 当然, 如何发掘系统 **RSL** 的应用价值并具体应用到知识处理领域, 是值得进一步深入研究的问题.

5.3 关于广义 Rough 集模型

Rough 集理论的一个重要研究方向是对 Pawlak 标准 Rough 集模型进行推广, 以便应用于更一般的情形. 目前, 已在各种不同框架下建立起多种广义 Rough 集模型 [223~225], 而从代数角度出发进行推广研究的主要思路是将作为标准 Rough 上、下近似算子的承载结构 —— 幂集代数 $(2^U, \cup, \cap, \sim, \varnothing, U)$ 推广到更一般的代数结构上, 建立基于这些代数结构的广义 Rough 集模型以拓宽 Rough 集的应用范围. 例如, 文献 [226]~[230] 中分别建立了基于分子格、Boole 代数、完备的完全分配格、De Morgan 代数等的广义 Rough 集模型. 本节主要介绍基于 Boole 代数、De Morgan 代数的 Rough 近似的基本概念和性质.

5.3.1 Boole 代数上的广义 Rough 集模型

定义 5.3.1 [227] 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数.L 的非空子集 L_0 称为 L 的一个划分 (partition), 如果:

(1) $\vee\{x|x \in L_0\}=1$.

(2) $\forall x, y \in L_0, x \wedge y=0$.

定义 5.3.2 [227] 设 $(L;\vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, L_0 是 L 的一个划分. 定义算子 $R_-:L \to L$ 和 $R^-:L \to L$ 如下:

$$\forall x \in L, R_-(x) = \vee\{s \in L_0|s \leqslant x\}, R^-(x) = \vee\{s \in L_0|s \wedge x \neq 0\}.$$

分别称为 L 上的 (广义)Rough 下、上近似. 称 $R(x) = \langle R_-(x), R^-(x)\rangle$ 为 x 在近似空间 (L, L_0) 上的 Rough 集.

定义 5.3.3 [227] 设 $(L;\vee,\wedge,',0,1)$ 是 Boole 代数, L_0 是 L 的一个划分, $S=(L,L_0)$ 为近似空间, 定义 $W=\{R(x)|x\in L\}$为 L 上所有粗糙集构成的集合. 当 $R_-(x)=R^-(x)$ 时称 x 为可定义的; 当 $R_-(x)\neq R^-(x)$ 时称 x 是不可定义的. 对于任意 $x,y\in L$, 若 $R_-(x)\leqslant R_-(y)$, $R^-(x)\leqslant R^-(y)$, 则称 x 粗小于等于 y, 记作 $R(x)\leqslant R(y)$. 若 $R_-(x)=R_-(y)$, $R^-(x)=R^-(y)$, 则称 x 粗等于 y, 记为 $R(x)=R(y)$.

定理 5.3.1[227,204] 设 $(L;\vee,\wedge,',0,1)$ 是 Boole 代数, L_0 是 L 的一个划分, R_- 和 R^- 为 L 上的 Rough 下、上近似算子, 则 $(\forall x,y\in L)$

(1) $R_-(0)=0=R^-(0)$, $R_-(1)=1=R^-(1)$;

(2) $R_-(x)\leqslant x\leqslant R^-(x)$;

(3) $R_-(R_-(x))=R_-(x)=R^-(R_-(x))$, $R_-(R^-(x))=R^-(x)=R^-(R^-(x))$;

(4) $R_-(x\wedge y)=R_-(x)\wedge R_-(y)$, $R^-(x)\vee R^-(y)=R^-(x\vee y)$;

(5) $R_-(x)=(R^-(x'))'$, $R^-(x)=(R_-(x'))'$;

(6) $x\leqslant y\Rightarrow R_-(x)\leqslant R_-(y)$, $x\leqslant y\Rightarrow R^-(x)\leqslant R^-(y)$;

(7) $R^-(x\wedge y)\leqslant R^-(x)\wedge R^-(y)$;

(8) $R_-(x\vee y)\geqslant R_-(x)\vee R_-(y)$.

注意 (7), (8) 两个不等式, 一个自然的问题是如何将它们转变成为等式? 或者说, 能否找到 $z,w\in L$, 满足:

$$R^-(z)=R^-(x)\vee R^-(y),\ R_-(z)=R_-(x)\vee R_-(y);$$
$$R_-(w)=R_-(x)\wedge R_-(y),\ R^-(w)=R^-(x)\wedge R^-(y).$$

下面的定理可以给出一个满意的回答.

定理 5.3.2 设 $(L;\vee,\wedge,',0,1)$ 是完备的完全分配 Boole 代数, L_0 是 L 的一个划分. 对于任意 $x,y\in L-\{0\}$, 若取 $z=(\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,y)=0\})\vee y$, $w=[x\vee r_2(x,y)]\wedge y$, 这里 $r_1(x,y)=\vee\{s\in L_0|s\leqslant x\vee y,\ s\nleqslant x,\ s\nleqslant y\}$, $r_2(x,y)=\vee\{s\in L_0|s\wedge(x\wedge y)=0,\ s\wedge x\neq 0,\ s\wedge y\neq 0\}$, 则

(1) $R_-(z)=R_-(x)\vee R_-(y)$;

(2) $R^-(z)=R^-(x)\vee R^-(y)$;

(3) $R_-(w)=R_-(x)\wedge R_-(y)$;

(4) $R^-(w)=R^-(x)\wedge R^-(y)$.

证明 (1) 只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\leqslant z\}=R_-(x)\vee R_-(y)$, 即 $R_-(x)\vee R_-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant z\}$的上确界.

首先证明 $R_-(x)\vee R_-(y)$ 是$\{s\in L_0|s\leqslant z\}$的上界. 设 $s\in L_0$, $s\leqslant z$. 分以下情况讨论:

(i) 如果 $s\leqslant x$ 或者 $s\leqslant y$, 则 $s\leqslant R_-(x)$ 或者 $s\leqslant R_-(y)$, 于是 $s\leqslant R_-(x)\vee R_-(y)$.

(ii) 如果 $s\nleqslant x$ 且 $s\nleqslant y$, 因 $s\leqslant z\leqslant x\vee y$(由 z 的定义可知 $z\leqslant x\vee y$), 故 $s\leqslant r_1(x,y)$. 又

$$\begin{aligned}s&=s\wedge z\\&=s\wedge[(\vee\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\})\vee y]\\&=[s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\})]\vee(s\wedge y).\end{aligned}$$

由于 L 为完备格且满足无限分配律, 所以

$$\begin{aligned}&s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\})\\=&\vee\{s\wedge t|t\in L,t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\}\\\leqslant&\vee\{s\wedge t|t\in L,t\leqslant x,s\wedge t\wedge r_1(x,y)=0\}\\=&\vee\{s\wedge t|t\in L,t\leqslant x,s\wedge t=0\}\qquad(\text{因为}\ s\leqslant r_1(x,y))\\=&0.\end{aligned}$$

所以 s=$(s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\}))\vee(s\wedge y)=s\wedge y$, 即 $s\leqslant y$, 这与假设 $s\nleqslant y$ 矛盾. 这说明 $s\nleqslant x$ 与 $s\nleqslant y$ 不能同时成立, 即此情况根本不存在.

以上结果说明, $R_-(x)\vee R_-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant z\}$的上界, 从而 $R_-(z)\leqslant R_-(x)\vee R_-(y)$.

其次, 证明 $R_-(x)\vee R_-(y)\leqslant R_-(z)$ 成立. 由于 $R_-(x)\vee R_-(y)=\vee\{s\in L_0|s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y\}$, 故只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y\}\leqslant R_-(z)$, 这就是要证明 $R_-(z)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y\}$的一个上界. 假设 $s\in L_0$, $s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y$, 下面分两种情况证明 $s\leqslant R_-(z)$:

(i) 当 $s\leqslant y$ 时, 有 $s\leqslant y\leqslant z$(由 z 的定义可知 $y\leqslant z$), 故 $s\leqslant R_-(z)$.

(ii) 当 $s\nleqslant y$ 时, 由假设 ($s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y$) 知此时必有 $s\leqslant x$. 从集合 $r_1(x,y)$=$\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,\ s_1\nleqslant x,\ s_1\nleqslant y\}$中任取一个元素 s_1, 则 $s\wedge s_1$=0(根据划分的定义). 于是

$$\begin{aligned}s\wedge r_1(x,y)&=s\wedge(\vee\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=\vee\{s\wedge s_1|s_1\in L_0,s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=0.\end{aligned}$$

从而 $s\in\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\}$, 进而 $s\leqslant\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\}$, 于是 $s\leqslant z$. 由下近似的定义得 $s\leqslant R_-(z)$.

综上, 对任意 $s\in L_0$, 若 $s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y$, 则 $s\leqslant R_-(z)$. 这说明 $\vee\{s\in L_0|s\leqslant x$ 或 $s\leqslant y\}\leqslant R_-(z)$, 即 $R_-(x)\vee R_-(y)\leqslant R_-(z)$ 成立. 所以 (1) 为真.

(2) 只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\wedge z\neq 0\}=R^-(x)\vee R^-(y)$, 即 $R^-(x)\vee R^-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge z\neq 0\}$的上确界.

先证明 $R^-(x)\vee R^-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge z\neq 0\}$的上界. 设 $s\in L_0$, $s\wedge z\neq 0$. 由于

$$\begin{aligned}s\wedge z&=s\wedge[(\vee\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\})\vee y]\\&=[s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,y)=0\})]\vee(s\wedge y)\\&\neq 0,\end{aligned}$$

所以 $s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\})\neq 0$ 或者 $s\wedge y\neq 0$. 当 $s\wedge y\neq 0$ 时, 有 $s\leqslant R^-(y)\leqslant R^-(x)\vee R^-(y)$. 当 $s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\})\neq 0$ 时, 有 $s\wedge x\geqslant s\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\})\neq 0$, 从而 $s\leqslant R^-(x)\leqslant R^-(x)\vee R^-(y)$. 这说明 $R^-(x)\vee R^-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge z\neq 0\}$的上界, 即 $\vee\{s\in L_0|s\wedge z\neq 0\}\leqslant R^-(x)\vee R^-(y)$, 亦即 $R^-(z)\leqslant R^-(x)\vee R^-(y)$.

接下来证明 $R^-(x)\vee R^-(y)\leqslant R^-(z)$ 成立. 容易验证 $R^-(x)\vee R^-(y)=\vee\{s\in L_0|s\wedge x\neq 0$ 或 $s\wedge y\neq 0\}$, 故只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\wedge x\neq 0$ 或 $s\wedge y\neq 0\}\leqslant R^-(z)$. 这只需证明 $R^-(z)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge x\neq 0$ 或 $s\wedge y\neq 0\}$的一个上界. 假设 $s\in L_0$, $s\wedge x\neq 0$ 或 $s\wedge y\neq 0$, 下面分两种情况证明 $s\leqslant R^-(z)$:

(i) 当 $s\wedge y=0$ 时, 必有 $s\wedge x\neq 0$. 此时再分如下两种情况讨论:

若 $s\leqslant x$, 任取集合$\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,\ s_1\nleqslant x,\ s_1\nleqslant y\}$中的一个元素 s_1 有 $s\wedge s_1=0$(由划分 L_0 的定义), 于是

$$\begin{aligned}s\wedge r_1(x,y)&=s\wedge(\vee\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=\vee\{s\wedge s_1|s_1\in L_0,s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=0.\end{aligned}$$

从而 $s\in\{t\in L|t\leqslant x,t\wedge r_1(x,\ y)=0\}$, 故 $s\leqslant\vee\{t\in L|t\leqslant x,\ t\wedge r_1(x,\ y)=0\}\leqslant z$, 进而 $s\leqslant R^-(z)$.

若 $s\nleqslant x$, 则容易得到 $s\nleqslant x\vee y$. 任取集合$\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,\ s_1\nleqslant x,\ s_1\nleqslant y\}$中的一个元素 s_1 有 $s\wedge s_1=0$(由划分 L_0 的定义), 于是

$$\begin{aligned}s\wedge r_1(x,y)&=s\wedge(\vee\{s_1\in L_0|s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=\vee\{s\wedge s_1|s_1\in L_0,s_1\leqslant x\vee y,s_1\nleqslant x,s_1\nleqslant y\})\\&=0.\end{aligned}$$

令 $t_1 = s\wedge x \neq 0$(根据假设 $x,y \in L-\{0\}$), 则 $t_1 \wedge r_1(x, y) \leqslant s\wedge r_1(x, y)=0$, 从而

$$\begin{aligned} t_1 &\leqslant \vee\{t \in L|t \leqslant x, t\wedge r_1(x,y)=0\},\\ s\wedge z &= s\wedge[(\vee\{t\in L|t\leqslant x, t\wedge r_1(x,y)=0\})\vee y]\\ &\geqslant t_1\wedge(\vee\{t\in L|t\leqslant x, t\wedge r_1(x,y)=0\})\\ &= t_1\neq 0,\end{aligned}$$

从而 $s\leqslant R^-(z)$.

(ii) 当 $s\wedge y\neq 0$ 时, 有 $s\wedge z\geqslant s\wedge y\neq 0$, 所以 $s\leqslant R^-(z)$.

(3) 只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\leqslant w\}=R_-(x)\wedge R_-(y)$, 即 $R_-(x)\wedge R_-(y)$ 是$\{s\in L_0|s\leqslant w\}$的上确界.

先证明 $R_-(x)\wedge R_-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant w\}$的上界. 设 $s\in L_0$, $s\leqslant w$. 由于 $w=[x\vee r_2(x, y)]\wedge y$, 所以 $s\leqslant y$ 且 $s\leqslant x\vee r_2(x, y)$. 进而 $s\leqslant R_-(y)$. 可以断定 $s\notin r_2(x, y)$, 分两种情况说明: 若 $s\wedge(x\wedge y)=0$, 则 $s\wedge(x\wedge y) = s\wedge x=0$(因为 $s\leqslant y$), 从而 $s\notin r_2(x, y) = \vee\{s_1\in L_0|s_1\wedge(x\wedge y)=0,\ s_1\wedge x\neq 0,\ s_1\wedge y\neq 0\}$. 若 $s\wedge(x\wedge y)\neq 0$, 则显然有 $s\notin r_2(x, y) = \vee\{s_1\in L_0|s_1\wedge(x\wedge y)=0,\ s_1\wedge x\neq 0,\ s_1\wedge y\neq 0\}$. 于是,

$$\begin{aligned} s\wedge r_2(x,y) &= s\wedge(\vee\{s_1\in L_0|s_1\wedge(x\wedge y)=0, s_1\wedge x\neq 0, s_1\wedge y\neq 0\})\\ &= \vee\{s\wedge s_1|s_1\in L_0, s_1\wedge(x\wedge y)=0, s_1\wedge x\neq 0, s_1\wedge y\neq 0\})\\ &= 0. \qquad (\text{因 } s \text{ 不等于任何 } s_1)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} s &= s\wedge(x\vee r_2(x,y)) \qquad (\text{由 } s\leqslant x\vee r_2(x,y))\\ &= (s\wedge x)\vee(s\wedge r_2(x,y))\\ &= (s\wedge x),\end{aligned}$$

于是 $s\leqslant x$, $s\leqslant R_-(x)$. 再由前述已证 $s\leqslant R_-(y)$ 可得 $s\leqslant R_-(x)\wedge R_-(y)$ 恒成立, 这说明 $R_-(x)\wedge R_-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant w\}$的上界, 即 $R_-(w)\leqslant R_-(x)\wedge R_-(y)$.

下证 $R_-(x)\wedge R_-(y)\leqslant R_-(w)$ 成立. 容易验证 $R_-(x)\wedge R_-(y) = \vee\{s\in L_0|s\leqslant x$ 且 $s\leqslant y\}$. 故只需要证明 $\vee\{s\in L_0|s\leqslant x$ 且 $s\leqslant y\}\leqslant R_-(w)$. 这只需证明 $R_-(w)$ 是集合$\{s\in L_0|s\leqslant x$ 且 $s\leqslant y\}$的一个上界. 假设 $s\in L_0$, $s\leqslant x$ 且 $s\leqslant y$, 则 $s\leqslant x\wedge y\leqslant[x\vee r_2(x, y)]\wedge y = w$, 所以 $s\leqslant R_-(w)$.

(4) 只需证明 $\vee\{s\in L_0|s\wedge w\neq 0\}=R^-(x)\wedge R^-(y)$, 即 $R^-(x)\wedge R^-(y)$ 是$\{s\in L_0|s\wedge w\neq 0\}$的上确界.

先证明 $R^-(x)\wedge R^-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge w\neq 0\}$的上界. 设 $s\in L_0$, $s\wedge w\neq 0$, 则 $s\wedge y\geqslant s\wedge w\neq 0$ (根据 w 的定义), 故 $s\leqslant R^-(y)$. 又由于 $s\wedge[x\vee r_2(x, y)]\geqslant s\wedge w\neq 0$,

从而 $(s\wedge x)\vee(s\wedge r_2(x,\ y))\neq 0$, 所以 $s\wedge x\neq 0$ 或者 $s\wedge r_2(x,\ y)\neq 0$. 分两种情况讨论:

当 $s\wedge x\neq 0$ 时, $s\leqslant R^-(x)$. 再由前述已证 $s\leqslant R^-(y)$ 可得 $s\leqslant R^-(x)\wedge R^-(y)$.

当 $s\wedge r_2(x,\ y)\neq 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} s\wedge r_2(x,y) &= s\wedge(\vee\{s_1\in L_0|s_1\wedge(x\wedge y)=0,s_1\wedge x\neq 0,s_1\wedge y\neq 0\}) \\ &= \vee\{s\wedge s_1|s_1\in L_0,s_1\wedge(x\wedge y)=0,s_1\wedge x\neq 0,s_1\wedge y\neq 0\}) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

所以存在集合$\{s_1\in L_0|s_1\wedge(x\wedge y)=0,\ s_1\wedge x\neq 0,\ s_1\wedge y\neq 0\}$中的元素 s_1 使得 $s\wedge s_1\neq 0$, 此时必有 $s=s_1$, 故 $s\wedge x\neq 0$, 所以 $s\leqslant R^-(x)$ 成立. 于是 $s\leqslant R^-(x)\wedge R^-(y)$. 这说明 $R^-(x)\wedge R^-(y)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge w\neq 0\}$的上界, 即 $\vee\{s\in L_0|s\wedge w\neq 0\}\leqslant R^-(x)\wedge R^-(y)$, 亦即 $R^-(w)\leqslant R^-(x)\wedge R^-(y)$.

下证 $R^-(x)\wedge R^-(y)\leqslant R^-(w)$ 成立. 容易验证 $R^-(x)\wedge R^-(y)=\vee\{s\in L_0|s\wedge x\neq 0$ 且 $s\wedge y\neq 0\}$. 故只需要证明 $\vee\{s\in L_0|\ s\wedge x\neq 0$ 且 $s\wedge y\neq 0\}\leqslant R^-(w)$. 这只需要证明 $R^-(w)$ 是集合$\{s\in L_0|s\wedge x\neq 0$ 且 $s\wedge y\neq 0\}$的一个上界. 假设 $s\in L_0$, $s\wedge x\neq 0$ 且 $s\wedge y\neq 0$, 分两种情况证明 $s\leqslant R^-(w)$:

(i) 当 $s\wedge(x\wedge y)=0$ 时, 有 $s\leqslant r_2(x,\ y)$, 所以

$$\begin{aligned} s\wedge w &= s\wedge[(x\vee r_2(x,y))\wedge y] \\ &= s\wedge[(x\wedge y)\vee(r_2(x,y)\wedge y)] \\ &= s\wedge r_2(x,y)\wedge y \\ &= s\wedge y\neq 0. \end{aligned}$$

所以 $s\leqslant R^-(w)$.

(ii) 当 $s\wedge(x\wedge y)\neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s\wedge w &= s\wedge[(x\vee r_2(x,y))\wedge y] \\ &= [s\wedge(x\wedge y)]\vee[s\wedge r_2(x,y)\wedge y] \\ &\geqslant s\wedge(x\wedge y)\neq 0. \end{aligned}$$

所以 $s\leqslant R^-(w)$.

综上所述, $R^-(w)=R^-(x)\wedge R^-(y)$.

注 5.3.1　上述定理中假设 $x,\ y\in L-\{0\}$, 主要是为了 $z,\ w$ 的构造表达式可以统一书写. 实际上, 当 x 或 y 为 0 时, 定理的结论也成立. 比如, 若 $y=0$, 则取 $z=x$ 即可得到 $R_-(z)=R_-(x)\vee R_-(y)$, $R^-(z)=R^-(x)\vee R^-(y)$.

5.3.2 Boole 代数上广义 Rough 集模型中的蕴涵算子

对于标准 Rough 集模型来说, 构建 Rough 蕴涵算子的方法大致有两种: 其一是从 Rough 集的偶序对 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 表示出发, 定义这种偶序对之间的蕴涵运算. 如 5.2 节的 ND 型蕴涵 $\to_{ND}$. 其二是从 Rough 集的无交 (disjoint) 偶序对 ⟨ 下近似, 上近似的补 ⟩ 表示出发 (这样的序对又称为 "必然–不可能对"necessity-impossibility pair, 或 "内–外算子对"interior-exterior), 定义其上的蕴涵运算. 比如 Cattaneo 和 Ciucci 在文献 [231], [232] 中定义的蕴涵算子 $\to_L$, $\to_G$; 文献 [233] 中讨论的蕴涵算子 "⇒" 也属于这一类. 本节将 ND 型蕴涵 $\to_{ND}$ 及蕴涵算子 $\to_L$, $\to_G$ 推广到 Boole 代数上广义 Rough 集模型中, 这是作者在文献 [218], [222] 中的基本结果.

定义 5.3.4 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, 令

$$SA(L) = \{\langle x, y\rangle \in L \times L | x \leqslant y\}, \quad \theta = \langle 0, 0\rangle, I = \langle 1, 1\rangle.$$

且对任意 $\langle x, y\rangle$, $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle \in SA(L)$ 定义

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, y_1\rangle \subseteq \langle x_2, y_2\rangle \text{ 当且仅当 } x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2,\\
&\langle x_1, y_1\rangle \cup \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2\rangle,\\
&\langle x_1, y_1\rangle \cap \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2\rangle,\\
&\langle x, y\rangle^* = \langle y', y'\rangle,
\end{aligned}$$

则称 $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数. 若在广义粗 Stone 代数中再定义如下一元运算:

$$\langle x, y\rangle^+ = \langle x', x'\rangle, \quad \forall \langle x, y\rangle \in SA(L),$$

则称 $(SA(L); \cup, \cap, ^*, ^+, \theta, I)$ 为 L 上的广义双粗 Stone 代数.

注 5.3.2 上述定义表面上看与 Boole 代数上的 Rough 集没有关系, 但其实质是 Boole 代数上由 Rough 近似组成的偶序对 ⟨ 下近似, 上近似 ⟩ 的抽象, 之所以没有直接写成形式 $\langle R_-(x), R^-(x)\rangle$, 其目的是为了保证运算的封闭性.

定义 5.3.5 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, 令

$$NA(L) = \{\langle x, y\rangle | x, y \in L, x \wedge y = 0\}, \quad \phi = \langle 0, 1\rangle, \quad i = \langle 1, 0\rangle.$$

且对任意 $\langle x, y\rangle$, $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle \in NA(L)$ 定义

$$\begin{aligned}
&\langle x_1, y_1\rangle \cup \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 \vee x_2, y_1 \wedge y_2\rangle,\\
&\langle x_1, y_1\rangle \cap \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 \wedge x_2, y_1 \vee y_2\rangle,\\
&\neg\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\\
&\sim \langle x, y\rangle = \langle x', x\rangle,
\end{aligned}$$

则称 $(NA(L); \cup, \cap, \neg, \sim, \phi, i)$ 为 L 上的广义粗 Nelson 代数.

注 5.3.3　上述定义中, $NA(L)$ 的元素没有使用序对 $\langle R_-(x), (R^-(x))'\rangle$ 表示方式, 其目的是为了保证封闭性.

定义 5.3.6 [231,232]　一个代数系统 $(A; \to_L, \to_G, 0)$ 称为是一个 Heyting Wajsberg (HW) 代数, 如果 A 是非空集, $0 \in A$, $\to_L$ 及 $\to_G$ 是 A 上的二元运算且满足:

(HW1) $a \to_G a = 1$;

(HW2) $(a \to_G b) \cap b = b$;

(HW3) $a \to_G (b \cap c) = (a \to_G b) \cap (a \to_G c)$;

(HW4) $a \cap (a \to_G b) = a \cap b$;

(HW5) $(a \cup b) \to_G c = (a \to_G c) \cap (b \to_G c)$;

(HW6) $1 \to_L a = a$;

(HW7) $a \to_L (b \to_L c) = \neg(a \to_L c) \to_L \neg b$;

(HW8) $(a \to_G b) \cup (b \to_G a) = 1$;

(HW9) $(a \to_G b) \to_L (a \to_L b) = 1$.

这里, 定义 $\neg a = a \to_L 0$, $1 = \neg 0$, $a \cap b = \neg((\neg a \to_L \neg b) \to_L \neg b$, $a \cup b = (a \to_L b) \to_L b$.

定义 5.3.7　设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数. 定义 $SA(L)$ 上的算子 $\to_{ND}$ 如下: $\forall \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in SA(L)$,

$$\langle x_1, y_1\rangle \to_{ND} \langle x_2, y_2\rangle = \langle y_1' \vee x_2 \vee (y_2 \wedge x_1'), x_1' \vee y_2\rangle.$$

称为 $SA(L)$ 上的 ND 型蕴涵算子.

容易证明如下结果.

定理 5.3.3　定义 5.3.7 中蕴涵算子 $\to_{ND}$ 的表达式与下述等式等价 ($\forall \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in SA(L)$):

$$\langle x_1, y_1\rangle \to_{ND} \langle x_2, y_2\rangle = \langle (x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2), x_1' \vee y_2\rangle.$$

定理 5.3.4　设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数, $\to_{ND}$ 是 $SA(L)$ 上的 ND 型蕴涵算子, 则对任意 $a, b \in SA(L)$ 成立:

(1) $a \to_{ND} (a \cup b) = I$;

(2) $(a \to_{ND} b) \cup (b \to_{ND} a) = I$;

(3) $(a \to_{ND} \theta) \to_{ND} \theta = a$.

证明　等式 (3) 很易验证, 以下仅证 (1), (2). 设 $a, b \in SA(L)$, 令 $a = \langle x_1, y_1\rangle$,

$b = \langle x_2, y_2 \rangle$, 则

$$\begin{aligned} a \rightarrow_{ND} (a \cup b) &= \langle x_1, y_1 \rangle \rightarrow_{ND} \langle x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2 \rangle \\ &= \langle y_1' \vee (x_1 \vee x_2) \vee [(y_1 \vee y_2) \wedge x_1')], x_1' \vee (y_1 \vee y_2) \rangle. \end{aligned}$$

由分配律可将上式右端的第一个分量化为

$$\begin{aligned} & y_1' \vee (x_1 \vee x_2) \vee [(y_1 \vee y_2) \wedge x_1')] \\ =& [y_1' \vee (x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2)] \wedge [y_1' \vee (x_1 \vee x_2) \vee x_1'] \\ =& [(y_1' \vee y_1) \vee (x_1 \vee x_2) \vee y_2] \wedge [(x_1' \vee x_2) \vee y_1' \vee x_1] \\ =& [1 \vee (x_1 \vee x_2) \vee y_2] \wedge [1 \vee y_1' \vee x_1] \\ =& 1 \wedge 1 = 1. \end{aligned}$$

而由 $x_1 \leqslant y_1$ 可得 $y_1' \leqslant x_1'$, 进而有 $1=y_1' \vee y_1 \leqslant x_1' \vee y_1$, 即 $x_1' \vee y_1=1$. 故前述等式右端的第二个分量为 $x_1' \vee (y_1 \vee y_2)=(x_1' \vee y_1) \vee y_2=1 \vee y_2=1$. 所以 $a.\rightarrow_D (a \cup b) = \langle 1, 1\rangle=I$, (1) 得证.

下证等式 (2) 成立 (应用定理 5.3.3 中的等价定义, 并应用已证等式 $x_1' \vee y_1=1$, $x_2' \vee y_2=1$):

$$\begin{aligned} & (a \rightarrow_{ND} b) \cup (b \rightarrow_{ND} a) \\ =& (\langle x_1, y_1 \rangle \rightarrow_{ND} \langle x_2, y_2 \rangle) \cup (\langle x_2, y_2 \rangle \rightarrow_{ND} \langle x_1, y_1 \rangle) \\ =& \langle (x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2), x_1' \vee y_2 \rangle \vee \langle (x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1), x_2' \vee y_1 \rangle \\ =& \langle [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee [(x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1)], (x_1' \vee y_2) \vee (x_2' \vee y_1) \rangle \\ =& \langle [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee [(x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1)], (x_1' \vee y_1) \vee (x_2' \vee y_2) \rangle \\ =& \langle [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee [(x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1)], 1 \vee 1 \rangle \\ =& \langle [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee [(x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1)], 1 \rangle. \end{aligned}$$

由分配律可将上式右端的第一个分量化为

$$\begin{aligned} & [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee [(x_2' \vee x_1) \wedge (y_2' \vee y_1)] \\ =& \{[(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee (x_2' \vee x_1)\} \wedge \{[(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee (y_2' \vee y_1)\} \\ =& \{[(x_1' \vee x_2) \vee (x_2' \vee x_1)] \wedge [(y_1' \vee y_2) \vee (x_2' \vee x_1)]\} \\ & \wedge \{[(x_1' \vee x_2) \vee (y_2' \vee y_1)] \wedge [(y_1' \vee y_2) \vee (y_2' \vee y_1)]\} \\ =& \{[(x_1' \vee x_1) \vee (x_2' \vee x_2)] \wedge [(x_2' \vee y_2) \vee (y_1' \vee x_1)]\} \\ & \wedge \{[(x_1' \vee y_1) \vee (y_2' \vee x_2)] \wedge [(y_1' \vee y_1) \vee (y_2' \vee y_2)]\} \\ =& \{(1 \vee 1) \wedge [1 \vee (y_1' \vee x_1)]\} \wedge \{[1 \vee (y_2' \vee x_2)] \wedge (1 \vee 1)\} \\ =& 1. \end{aligned}$$

从而 $(a \rightarrow_{ND} b) \cup (b \rightarrow_{ND} a) = \langle 1, 1\rangle=I$, 即 (2) 为真.

定义 5.3.8 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数. 定义 $SA(L)$ 上的算子 $\otimes_{ND}$ 如下: $\forall \langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle \in SA(L)$,

$$\langle x_1, y_1\rangle \otimes_{ND} \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \wedge (x_1 \vee x_2)\rangle.$$

称为 $SA(L)$ 上的 ND 型模算子.

定理 5.3.5 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数, $\otimes_{ND}$ 是 $SA(L)$ 上的 ND 型模算子, 则 $(SA(L); \otimes_{ND}, I)$ 是以 I 为单位的交换半群.

直接验证即可, 证明略去. 进一步可以得到如下结论:

定理 5.3.6 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(SA(L); \cup, \cap, ^*, \theta, I)$ 为 L 上的广义粗 Stone 代数, $\rightarrow_{ND}$, $\otimes_{ND}$ 分别是 $SA(L)$ 上的 ND 型蕴涵算子及 ND 型模算子, 则 $(SA(L); \cup, \cap, \otimes_{ND}, \rightarrow_{ND}, \theta, I)$ 构成一个 $IMTL$–代数.

证明 简单性质直接检验即可, 这里仅证明以下等式成立 (其中 (2) 用于证明伴随性): $\forall a, b, c \in SA(L)$,

(1) $(a \otimes_{ND} b) \rightarrow_{ND} c = a \rightarrow_{ND} (b \rightarrow_{ND} c)$.

(2) $(a \otimes_{ND} (a \rightarrow_{ND} b)) \cup b = b$.

不妨设 $a = \langle x_1, y_1\rangle$, $b = \langle x_2, y_2\rangle$, $c = \langle x_3, y_3\rangle$, 则

$$\begin{aligned}
&(a \otimes_{ND} b) \rightarrow_{ND} c = \langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \wedge (x_1 \vee x_2)\rangle \rightarrow_{ND} \langle x_3, y_3\rangle \\
&= \langle [y_1 \wedge y_2 \wedge (x_1 \vee x_2)]' \vee x_3 \vee [y_3 \wedge (x_1 \wedge x_2)'], (x_1 \wedge x_2)' \vee y_3\rangle \\
&= \langle [y_1' \vee y_2' \vee (x_1' \wedge x_2')] \vee x_3 \vee [y_3 \wedge (x_1' \vee x_2')], (x_1' \vee x_2') \vee y_3\rangle \\
&= \langle [y_1' \vee y_2' \vee (x_1' \wedge x_2')] \vee x_3 \vee [(y_3 \wedge x_1') \vee (y_3 \wedge x_2')], x_1' \vee (x_2' \vee y_3)\rangle \\
&= \langle y_1' \vee [y_2' \vee x_3 \vee (y_3 \wedge x_2')] \vee [(x_1' \wedge x_2') \vee (y_3 \wedge x_1')], x_1' \vee (x_2' \vee y_3)\rangle \\
&= \langle y_1' \vee [y_2' \vee x_3 \vee (y_3 \wedge x_2')] \vee [x_1' \wedge (x_2' \vee y_3)], x_1' \vee (x_2' \vee y_3)\rangle \\
&= a \rightarrow_{ND} \langle y_2' \vee x_3 \vee (y_3 \wedge x_2'), x_2' \vee y_3\rangle \\
&= a \rightarrow_{ND} (b \rightarrow_{ND} c).
\end{aligned}$$

下证 (2) 成立:

$$\begin{aligned}
&(a \otimes_{ND} (a \rightarrow_{ND} b)) \cup b \\
&= b \vee (a \otimes_{ND} \langle (x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2), x_1' \vee y_2\rangle) \\
&= b \vee \langle x_1 \wedge (x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2), y_1 \wedge (x_1' \vee y_2) \\
&\quad \wedge \{x_1 \vee [(x_1' \vee x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)]\}\rangle \\
&= b \vee \langle [(x_1 \wedge x_1') \vee (x_1 \wedge x_2)] \wedge (y_1' \vee y_2), y_1 \wedge (x_1' \vee y_2) \\
&\quad \wedge \{(x_1 \vee x_1' \vee x_2) \wedge [x_1 \vee (y_1' \vee y_2)]\}\rangle \\
&= b \vee \langle [0 \vee (x_1 \wedge x_2)] \wedge (y_1' \vee y_2), y_1 \wedge (x_1' \vee y_2) \\
&\quad \wedge \{(1 \vee x_2) \wedge [x_1 \vee (y_1' \vee y_2)]\}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle x_2, y_2\rangle \vee \langle (x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1' \vee y_2), y_1 \wedge (x_1' \vee y_2) \wedge [x_1 \vee (y_1' \vee y_2)]\rangle \\
&= \langle x_2 \vee [(x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1' \vee y_2)], y_2 \vee \{y_1 \wedge (x_1' \vee y_2) \wedge [x_1 \vee (y_1' \vee y_2)]\}\rangle \\
&= \langle [x_2 \vee (x_1 \wedge x_2)] \wedge [x_2 \vee (y_1' \vee y_2)], (y_2 \vee y_1) \\
&\quad \wedge [y_2 \vee (x_1' \vee y_2)] \wedge [y_2 \vee x_1 \vee (y_1' \vee y_2)]\rangle \\
&= \langle x_2 \wedge [x_2 \vee (y_1' \vee y_2)], (y_2 \vee y_1) \wedge (x_1' \vee y_2) \wedge (x_1 \vee y_1' \vee y_2)\rangle \\
&= \langle x_2, [y_2 \vee (y_1 \wedge x_1')] \wedge [y_2 \vee (x_1 \vee y_1')]\rangle \\
&= \langle x_2, y_2 \vee [(y_1 \wedge x_1') \wedge (x_1 \vee y_1')]\rangle \\
&= \langle x_2, y_2 \vee \{x_1' \wedge [(y_1 \wedge x_1) \vee (y_1 \wedge y_1')]\}\rangle \\
&= \langle x_2, y_2 \vee [x_1' \wedge (x_1 \vee 0)]\rangle \\
&= \langle x_2, y_2 \vee (x_1' \wedge x_1)\rangle \\
&= \langle x_2, y_2 \vee 0\rangle \\
&= \langle x_2, y_2\rangle \\
&= b.
\end{aligned}
$$

下例表明, 一般情况下 $(SA(L); \cup, \cap, \otimes_{ND}, \to_{ND}, \theta, I)$ 不能构成 BL-代数.

例 5.3.1 设 $L=\{0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, 1\}$, L 上的序关系如图 5.3 所示. L 上的补运算 $'$ 定义为: $0'=1$, $1'=0$, $e_1' = e_6$, $e_6' = e_1$, $e_2'= e_5$, $e_5' = e_2$, $e_3' = e_4$, $e_4'= e_3$, 则 L 是一个 Boole 代数. 考虑 $SA(L)$ 的下述两个元素: $a = \langle e_1, e_3\rangle$, $b = \langle e_2, e_4\rangle$. 易得

$$
\begin{aligned}
a \cap b &= \langle e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4\rangle = \langle 0, 0\rangle, \\
a \otimes (a \to b) &= a \otimes \langle e_3' \vee e_2 \vee (e_4 \wedge e_1'), e_1' \vee e_4\rangle \\
&= \langle e_1, e_3\rangle \otimes \langle e_4, 1\rangle \\
&= \langle e_1, 0\rangle.
\end{aligned}
$$

所以 $a \cap b \neq a \otimes (a \to b)$, 即 $(SA(L); \cup, \cap, \otimes_D, \to_D, \theta, I)$ 不是一个 BL-代数.

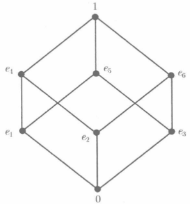


图 5.3 Boole 代数示例

定义 5.3.9　设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(NA(L); \cup, \cap, \neg, \sim, \phi, i)$ 为 L 上的广义粗 Nelson 代数. 定义 $NA(L)$ 上的算子 $\to_L$, $\to_G$ 如下: $\forall\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle \in NA(L)$,

$$\langle x_1, y_1\rangle \to_L \langle x_2, y_2\rangle = \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), x_1 \wedge y_2\rangle,$$
$$\langle x_1, y_1\rangle \to_G \langle x_2, y_2\rangle = \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), y_1' \wedge y_2\rangle$$

分别称为 $NA(L)$ 上的 L 型和 G 型蕴涵算子.

定理 5.3.7　设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(NA(L); \cup, \cap, \neg, \sim, \phi, i)$ 为 L 上的广义粗 Nelson 代数, $\to_L$, $\to_G$ 为 $NA(L)$ 上的 L 型和 G 型蕴涵算子, 则 $(NA(L); \to_L, \to_G, \phi)$ 构成一个 HW 代数.

证明　根据定义 5.3.6, 需证明 (HW1)~(HW9) 成立. 首先验证 HW 代数中对 $\neg$, $\cup$, $\cap$ 的定义与广义粗 Nelson 代数中的意义一致:

$\forall a, b \in NA(L)$, 取 $a = \langle x_1, y_1\rangle$, $b = \langle x_2, y_2\rangle$, 则

$$a \to_L \phi = \langle x_1, y_1\rangle \to_L \langle 0, 1\rangle = \langle y_1, x_1\rangle = \neg a;$$
$$\neg\langle 0, 1\rangle = \langle 1, 0\rangle = I;$$
$$\begin{aligned}&(a \to_L b) \to_L b\\ =\,& \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), x_1 \wedge y_2\rangle \to_L \langle x_2, y_2\rangle\\ =\,& \langle \{[(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)]' \wedge y_2'\} \vee [(x_1 \wedge y_2) \vee x_2], [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)] \wedge y_2\rangle\\ =\,& \langle [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2) \vee y_2]' \vee [(x_1 \wedge y_2) \vee x_2], [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)] \wedge y_2\rangle.\end{aligned}$$

上式右端第二分量可化为

$$\begin{aligned}&[(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)] \wedge y_2\\ =\,& (x_1' \wedge y_2' \wedge y_2) \vee [(y_1 \vee x_2) \wedge y_2]\\ =\,& 0 \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee (x_2 \wedge y_2)]\\ =\,& (y_1 \wedge y_2) \vee 0\\ =\,& y_1 \wedge y_2,\end{aligned}$$

注意, 这里应用了 $y_2' \wedge y_2=0$, $x_2 \wedge y_2=0$. 而前述等式右端第一分量可化为

$$\begin{aligned}&[(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2) \vee y_2]' \vee [(x_1 \wedge y_2) \vee x_2]\\ =\,& \{[(x_1' \vee y_2) \wedge (y_2' \vee y_2)] \vee (y_1 \vee x_2)\}' \vee (x_1 \wedge y_2) \vee x_2\\ =\,& \{[(x_1' \vee y_2) \wedge 1] \vee (y_1 \vee x_2)\}' \vee (x_1 \wedge y_2) \vee x_2\\ =\,& [(x_1' \vee y_2) \vee (y_1 \vee x_2)]' \vee [(x_1 \wedge y_2)']' \vee x_2\\ =\,& [(x_1' \vee y_2 \vee y_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge y_2)']' \vee x_2\\ =\,& [(x_1' \vee y_2 \vee y_1 \vee x_2) \wedge (x_1' \vee y_2')]' \vee x_2\\ =\,& \{x_1' \vee [(y_2 \vee y_1 \vee x_2) \wedge y_2']\}' \vee x_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x_1' \vee [(y_1 \vee x_2) \wedge y_2']\}' \vee x_2 \\
&= [(x_1' \vee y_1 \vee x_2) \wedge (x_1' \vee y_2')]' \vee x_2 \\
&= (x_1' \vee y_1 \vee x_2)' \vee (x_1' \vee y_2')' \vee x_2 \\
&= [(x_1' \vee y_1)' \wedge x_2'] \vee x_2 \vee (x_1' \vee y_2')' \\
&= \{[(x_1' \vee y_1)' \vee x_2] \wedge (x_2' \vee x_2)\} \vee (x_1' \vee y_2')' \\
&= (x_1' \vee y_1)' \vee x_2 \vee (x_1' \vee y_2')' \\
&= [(x_1' \vee y_1) \wedge (x_1' \vee y_2')]' \vee x_2 \\
&= [x_1' \vee (y_1 \wedge y_2')]' \vee x_2 \\
&= [x_1 \wedge (y_1' \vee y_2)] \vee x_2 \\
&= [(x_1 \wedge y_1') \vee (x_1 \wedge y_2)] \vee x_2 \\
&= [x_1 \vee (x_1 \wedge y_2)] \vee x_2 \\
&= x_1 \vee x_2.
\end{aligned}
$$

注意, 最后两个等号分别应用了 $x_1 \wedge y_1' = x_1$ 及 $x_1 \vee (x_1 \wedge y_2) = x_1$. 后者应用了吸收律, 前者是因为: $x_1 = x_1 \wedge 1 = x_1 \wedge (y_1 \vee y_1') = (x_1 \wedge y_1) \vee (x_1 \wedge y_1') = 0 \vee (x_1 \wedge y_1') = x_1 \wedge y_1'$. 从而得

$$
\begin{aligned}
(a \to_L b) \to_L b &= \langle x_1 \vee x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle = a \cup b. \\
\neg((\neg a \to_L \neg b) \to_L \neg b &= \neg(\neg a \cup \neg b) = \neg(\langle y_1, x_1 \rangle \vee \langle y_2, x_2 \rangle) \\
&= \langle x_1 \wedge x_2, y_1 \vee y_2 \rangle = a \cap b.
\end{aligned}
$$

以上结果表明 HW 代数中对 ¬, ∪, ∩ 的定义与广义粗 Nelson 代数中的意义一致. 接下来需要证明 (HW1)~(HW9) 成立, 这里仅以 (HW3), (HW5) , (HW9) 为例.

(HW3)

$$
\begin{aligned}
&(a \to_G b) \cap (a \to_G c) \\
&= \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), y_1' \wedge y_2 \rangle \cap \langle (x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3), y_1' \wedge y_3 \rangle \\
&= \langle [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)] \wedge [(x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3)], (y_1' \wedge y_2) \vee (y_1' \wedge y_3) \rangle \\
&= \langle \{[(x_1' \wedge y_2') \vee x_2] \wedge [(x_1' \wedge y_3') \vee x_3]\} \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \\
&= \langle \{[(x_1' \wedge y_2') \vee x_2] \wedge (x_1' \wedge y_3')\} \vee \{[(x_1' \wedge y_2') \vee x_2] \wedge x_3\} \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \\
&= \langle [x_1' \wedge (y_2' \wedge y_3')] \vee (x_2 \wedge x_1' \wedge y_3') \vee (x_1' \wedge y_2' \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \\
&= \langle [(x_1' \wedge y_3') \wedge (y_2' \vee x_2)] \vee (x_1' \wedge y_2' \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \\
&= \langle [(x_1' \wedge y_3') \wedge y_2'] \vee (x_1' \wedge y_2' \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \qquad (5.3.1) \\
&= \langle [(x_1' \wedge y_2') \wedge (y_3' \vee x_3)] \vee (x_2 \wedge x_3) \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \\
&= \langle (x_1' \wedge y_2' \wedge y_3') \vee (x_2 \wedge x_3) \vee y_1, y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle \qquad (5.3.2)
\end{aligned}
$$

$$= \langle [x_1' \wedge (y_2 \vee y_3)'] \vee [y_1 \vee (x_2 \wedge x_3)], y_1' \wedge (y_2 \vee y_3) \rangle$$
$$= a \to_G \langle x_2 \wedge x_3, y_2 \vee y_3 \rangle$$
$$= a \to_G (b \cap c).$$

注意, (5.3.1), (5.3.2) 两步分别应用了 $y_2' \vee x_2 = y_2'$, $y_3' \vee x_3 = y_3'$. 这是因为: $y_2' = y_2' \vee 0 = y_2' \vee (x_2' \wedge x_2) = (y_2' \vee x_2') \wedge (y_2' \vee x_2) = (y_2 \wedge x_2)' \wedge (y_2' \vee x_2) = 0' \wedge (y_2' \vee x_2) = y_2' \vee x_2$. 同理可证 $y_3' \vee x_3 = y_3'$.

(HW5)

$$\begin{aligned}
&(a \to_G c) \cap (b \to_G c)\\
&= \langle (x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3), y_1' \wedge y_3 \rangle \cap \langle (x_2' \wedge y_3') \vee (y_2 \vee x_3), y_2' \wedge y_3 \rangle\\
&= \langle [(x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3)] \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee (y_2 \vee x_3)], (y_1' \wedge y_3) \vee (y_2' \wedge y_3) \rangle\\
&= \langle [(x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3)] \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee (y_2 \vee x_3)], (y_1 \wedge y_2)' \wedge y_3 \rangle.
\end{aligned}$$

上式右端第一个分量可化为

$$\begin{aligned}
&[(x_1' \wedge y_3') \vee (y_1 \vee x_3)] \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee (y_2 \vee x_3)]\\
&= \{[(x_1' \wedge y_3') \vee y_1] \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee y_2]\} \vee x_3\\
&= \{(x_1' \wedge y_3') \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee y_2]\} \vee \{y_1 \wedge [(x_2' \wedge y_3') \vee y_2]\} \vee x_3\\
&= [(x_1' \wedge x_2' \wedge y_3') \vee (x_1' \wedge y_3' \wedge y_2)] \vee [(y_1 \wedge x_2' \wedge y_3') \vee (y_1 \wedge y_2)] \vee x_3\\
&= [(x_1' \wedge x_2' \wedge y_3') \vee (x_1' \wedge y_3' \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge x_2' \wedge y_3')] \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3]\\
&= [(x_1' \vee y_1) \wedge (x_2' \wedge y_3')] \vee (x_1' \wedge y_3' \wedge y_2) \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3]\\
&= (x_1' \wedge x_2' \wedge y_3') \vee (x_1' \wedge y_3' \wedge y_2) \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3] \qquad (5.3.3)\\
&= [(x_1' \wedge y_3') \wedge (x_2' \vee y_2)] \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3]\\
&= [(x_1' \wedge y_3') \wedge x_2'] \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3]\\
&= [(x_1 \vee x_2)' \wedge y_3'] \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3].
\end{aligned}$$

注意, 式 (5.3.3) 应用了 $x_1' \vee y_1 = x_1'$(可类似前述式 (5.3.1) 说明的方法证明). 于是

$$\begin{aligned}
&(a \to_G c) \cap (b \to_G c)\\
&= \langle [(x_1 \vee x_2)' \wedge y_3'] \vee [(y_1 \wedge y_2) \vee x_3], (y_1 \wedge y_2)' \wedge y_3 \rangle\\
&= \langle x_1 \vee x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle \to_G \langle x_3, y_3 \rangle\\
&= (a \cup b) \to_G c.
\end{aligned}$$

(HW9)

$$(a \to_G b) \to_L (a \to_L b)$$

$$= \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), y_1' \wedge y_2 \rangle \to_L \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), x_1 \wedge y_2 \rangle$$
$$= \langle \{[(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)]' \wedge (x_1 \wedge y_2)'\} \vee (y_1' \wedge y_2) \vee [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)],$$
$$[(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)] \wedge (x_1 \wedge y_2) \rangle$$
$$= \langle [(x_1' \wedge y_2')' \wedge (y_1 \vee x_2)' \wedge (x_1 \wedge y_2)'] \vee (y_1' \wedge y_2)$$
$$\vee [(x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2)], (y_1 \vee x_2) \wedge x_1 \wedge y_2 \rangle$$
$$= \langle [(x_1' \wedge y_2')' \wedge (y_1 \vee x_2)' \wedge (x_1 \wedge y_2)'] \vee (x_2 \vee y_1) \vee (x_1' \vee y_2), (y_1 \wedge y_2) \wedge x_1 \rangle$$
$$= \langle [(x_1' \wedge y_2')' \wedge (x_1 \wedge y_2)'] \vee (x_1' \vee y_2), 0 \rangle$$
$$= \langle [(x_1 \vee y_2) \wedge (x_1' \vee y_2')] \vee (x_1' \vee y_2), 0 \rangle$$
$$= \langle [(x_1 \vee y_2) \vee (x_1' \vee y_2)] \wedge [(x_1' \vee y_2') \vee (x_1' \vee y_2)], 0 \rangle$$
$$= \langle 1 \wedge 1, 0 \rangle$$
$$= \langle 1, 0 \rangle$$
$$= i.$$

综上所述, $(NA(L); \to_L, \to_G, \phi)$ 构成一个 HW 代数.

注 5.3.4 有了上述定理, 即可应用文献 [231], [232] 中关于 HW 代数的性质得: $NA(L)$ 关于以下定义的序构成分配 BZ^{dM} 格 [232], 上面定义的 $\cup, \cap$ 恰是它的上、下确界, ϕ, i 分别是最小元和最大元:

$$\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in NA(L), \langle x_1, y_1 \rangle \leqslant \langle x_2, y_2 \rangle \text{ 当且仅当 } (x_1 \leqslant x_2, y_2 \leqslant y_1).$$

定理 5.3.8 设 $(L; \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是 Boole 代数, $(NA(L); \cup, \cap, \neg, \sim, \phi, i)$ 为 L 上的广义粗 Nelson 代数, 则 $NA(L)$ 上的算子 $\to_L$ 可等价定义如下:

$$\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in NA(L), \langle x_1, y_1 \rangle \to_L \langle x_2, y_2 \rangle = \langle (x_1' \vee x_2) \wedge (y_2' \vee y_1), x_1 \wedge y_2 \rangle.$$

证明 对任意 $\langle x_1, y_1 \rangle$, $\langle x_2, y_2 \rangle \in NA(L)$ 有

$$(x_1' \vee x_2) \wedge (y_2' \vee y_1) = [(x_1' \vee x_2) \wedge y_2'] \vee [(x_1' \vee x_2) \wedge y_1]$$
$$= [(x_1' \wedge y_2') \vee (x_2 \wedge y_2')] \vee [(x_1' \wedge y_1) \vee (x_2 \wedge y_1)]$$
$$= [(x_1' \wedge y_2') \vee x_2] \vee [y_1 \vee (x_2 \wedge y_1)]$$
$$= [(x_1' \wedge y_2') \vee x_2] \vee y_1$$
$$= (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2).$$

这里应用了 $x_2 \wedge y_2' = x_2$, $x_1' \wedge y_1 = y_1$(其真实性见定理 5.3.7 的证明过程). 所以

$$\langle x_1, y_1 \rangle \to_L \langle x_2, y_2 \rangle = \langle (x_1' \wedge y_2') \vee (y_1 \vee x_2), x_1 \wedge y_2 \rangle = \langle (x_1' \vee x_2) \wedge (y_2' \vee y_1), x_1 \wedge y_2 \rangle.$$

注 5.3.5 以上结论表明, 文献 [233] 中定义的蕴涵算子 "$\Rightarrow$" 即是 "$\to_L$".

5.3.3 De Morgan 代数上的广义 Rough 集模型

本节简单介绍 De Morgan 代数上的两类广义 Rough 集模型.

定义 5.3.10[229]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $o(L)$ 是 L 的子集, 如果满足:

(1) $0\in o(L)$, $1\in o(L)$;

(2) $\forall D\subseteq o(L)$, $\vee D\in o(L)$;

(3) $\forall x, y\in o(L)$, $x\wedge y\in o(L)$,

则 $o(L)$ 称为 L 的类拓扑开子系统 (similar topological open subsystem).

注 5.3.6　上述定义是分子格上类拓扑开子系统概念 [234] 在 De Morgan 代数上的推广.

定义 5.3.11[229]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $c(L)$ 是 L 的子集, 如果满足:

(1) $0\in c(L)$, $1\in c(L)$;

(2) $\forall D\subseteq c(L)$, $\wedge D\in c(L)$;

(3) $\forall x, y\in c(L)$, $x\vee y\in c(L)$,

则 $c(L)$ 称为 L 的类拓扑闭子系统 (similar topological close subsystem).

定理 5.3.9[229]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $o(L)$ 是 L 的类拓扑开子系统, 那么$\{x'|x\in o(L)\}$是 L 的类拓扑闭子系统.

证明　记 $S=\{x'|x\in o(L)\}$, 由 $0'=1$, $1'=0$, 故据定义 5.3.10 (1) 可得 $0, 1\in S$.

设 $D\subseteq S=\{x'|x\in o(L)\}$, 记 $D'=\{x'|x\in D\}$. 容易证明 $D'\subseteq o(L)$, $\wedge D=(\vee(D'))'$. 由定义 5.3.10 (2) 可得 $\vee(D')\in o(L)$. 所以 $\wedge D=(\vee(D'))'\in S=\{x'|x\in o(L)\}$.

若 $a, b\in S=\{x'|x\in o(L)\}$, 则 $a', b'\in o(L)$, 由定义 5.3.10 (3) 可得 $a'\wedge b'\in o(L)$. 因此 $a\vee b=(a'\wedge b')'\in S=\{x'|x\in o(L)\}$.

从而, 由定义 5.3.11 知 $S=\{x'|x\in o(L)\}$是 L 的类拓扑闭子系统.

类似地, 可得以下结论:

定理 5.3.10　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $c(L)$ 是 L 的类拓扑闭子系统, 那么$\{x'|x\in c(L)\}$是 L 的类拓扑开子系统.

定义 5.3.12　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $o(L)$ 是 L 的类拓扑开子系统, 对于任意 $x\in L$, 定义如下算子:

$$C_-(x)=\vee\{c|c\in o(L), c\leqslant x\},\quad C^-(x)=(C_-(x'))',$$

它们分别称为 L 的下近似和上近似. 如果 $C_-(x)=C^-(x)$, 则称 x 在 $(L, o(L))$ 上是可定义的; 如果 $C_-(x)\neq C^-(x)$, 则称 x 在 $(L, o(L))$ 上是不可定义的. 序对 $\langle C_-(x), C^-(x)\rangle$ 称为 x 在 $(L, o(L))$ 上的 Rough 集.

定理 5.3.11[229] 设 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $o(L)$ 是 L 的类拓扑开子系统, 则有

(1) $C_-(0)=0$, $C^-(0)=0$, $C^-(1)=1$, $C_-(1)=1$;

(2) $\forall x\in L$, $C_-(x)\leqslant x\leqslant C^-(x)$;

(3) $\forall x,y\in L$, $x\leqslant y\Rightarrow C_-(x)\leqslant C_-(y)$ 且 $C^-(x)\leqslant C^-(y)$;

(4) $\forall x\in L$, $C_-(C_-(x))=C_-(x)$, $C^-(C^-(x))=C^-(x)$;

(5) $\forall x,y\in L$, $C_-(x\wedge y)=C_-(x)\wedge C_-(y)$;

(6) $\forall x,y\in L$, $C^-(x\vee y)=C^-(x)\vee C^-(y)$;

(7) $\forall x\in o(L)$, $C_-(x)=x$;

(8) $\forall x\in L$, $C_-(x)=(C^-(x'))'$.

以下定理给出了 De Morgan 代数上、下近似的另外一种表达方式.

定理 5.3.12 设 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是一个完备 De Morgan 代数, $o(L)$ 是 L 的类拓扑开子系统, 记 $c(L)=\{c'|c\in o(L)\}$, 那么

$$C^-(x)=\wedge\{d|d\in c(L),x\leqslant d\},\quad C_-(x)=(C^-(x'))'.$$

证明 由定义 5.3.12 可得 $C^-(x)=(C_-(x'))'=(\vee\{c|c\in o(L),\ c\leqslant x'\})'$. 记 $t=\vee\{c|c\in o(L),\ c\leqslant x'\}$, 以下证明 $t'=\wedge\{d|d\in c(L),\ x\leqslant d\}$.

事实上, 由 t 的定义可得 $t\leqslant x'$, 进而 $x\leqslant t'$, 由定义 5.3.10 (2) 可得 $t=\vee\{c|c\in o(L),\ c\leqslant x'\}\in o(L)$, 所以 $t'\in c(L)$, 因此 $t'\in\{d|d\in c(L),\ x\leqslant d\}$. 另一方面, 对任意 $d\in\{d|d\in c(L),\ x\leqslant d\}$, $d'\in o(L)$ 且 $d'\leqslant x'$, 再由 t 的定义 $d'\leqslant t$, 即 $t'\leqslant d$, 这就是说 t' 是集合$\{d|d\in c(L),\ x\leqslant d\}$中的最小元, 即 $t'=\wedge\{d|d\in c(L),\ x\leqslant d\}$.

由定理 5.3.11 可得 $C_-(x)=(C^-(x'))'$.

例 5.3.2 设 $X=\{1,2,\cdots,10\}$, $L=F(X)$ 是 X 上的所有模糊集构成的经典集合, 那么 $(L;\wedge,\vee,',\theta,I)$ 是一个完备 De Morgan 代数, 其中 $\wedge,\vee,'$ 定义为

$$(f\vee g)(x)=f(x)\vee g(x),\quad \forall x\in X,$$
$$(f\wedge g)(x)=f(x)\wedge g(x),\quad \forall x\in X,$$
$$f'(x)=1-f(x),\quad \forall x\in X.$$

对 $\forall n\in N$, 定义以下模糊集:

$$f_n(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{k^n}, & k\neq 10,\\ 0, & k=10.\end{cases}$$

模糊集 θ 和 I 是指:

$$\theta:X\to[0,1];\theta(x)=0,\forall x\in X;$$
$$I:X\to[0,1];I(x)=1,\forall x\in X.$$

那么, 容易证明 $o(L)=\{f_n|n=1, 2, \cdots\}\cup\{\theta , I\}$是一个类拓扑开子系统, 现定义模糊集 f, g 如下:

$$
\begin{aligned}
&f(1)=1, \quad f(2)=\frac{1}{4}, \quad f(3)=\frac{1}{3}, \quad f(4)=\frac{1}{16}, \quad f(5)=\frac{1}{5},\\
&f(6)=\frac{1}{36}, \quad f(7)=\frac{1}{7}, \quad f(8)=\frac{1}{64}, \quad f(9)=\frac{1}{9}, \quad f(10)=0;\\
&g(1)=1, \quad g(2)=\frac{1}{2}, \quad g(3)=\frac{1}{27}, \quad g(4)=\frac{1}{4}, \quad g(5)=\frac{1}{125},\\
&g(6)=\frac{1}{6}, \quad g(7)=\frac{1}{343}, \quad g(8)=\frac{1}{8}, \quad g(9)=\frac{1}{729}, \quad g(10)=0.
\end{aligned}
$$

经计算得: $C^-(f)=f_1, C_-(f)=f_2; C^-(g)=f_1, C_-(g)=f_3$.

下面基于覆盖的概念给出 De Morgan 代数上另一种广义 Rough 集模型.

定义 5.3.13[229,230]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是完备 De Morgan 代数, L 的非空子集 C 称为是一个覆盖, 如果满足: $\vee\{c|c\in C\}=1$.

定义 5.3.14[229,230]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是完备 De Morgan 代数, C 是 L 的一个覆盖, 对于任意 $x\in L$, 定义如下算子:

$$C_-(x)=\vee\{c\in C|c\leqslant x\}, \quad C^-(x)=(C_-(x'))'.$$

分别称为 De Morgan 代数 L 上的覆盖型 Rough 下、上近似.

容易看出, 前述的类拓扑开子系统和类拓扑闭子系统都是覆盖, 因此上述定义是定义 5.3.12 的推广.

定理 5.3.13[229,230]　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是完备 De Morgan 代数, C 是 L 的一个覆盖, 则

(1) $C_-(1)=1, C^-(0)=0$;

(2) $\forall x\in L, C_-(x)\leqslant x\leqslant C^-(x)$;

(3) $\forall x\in C, C_-(x)=x$.

(4) $\forall x, y\in L, x\leqslant y\Rightarrow C_-(x)\leqslant C_-(y), C^-(x)\leqslant C^-(y)$;

(5) $\forall x\in L, C^-(C_-(x))\leqslant C^-(x)$, $C_-(x)\leqslant C_-(C^-(x))$;

(6) $\forall x, y\in L, C^-(x)\vee C^-(y)\leqslant C^-(x\vee y)$;

(7) $\forall x, y\in L, C_-(x\wedge y)\leqslant C_-(x)\wedge C_-(y)$;

(8) $\forall x\in L, C_-(x)=(C^-(x'))'$.

众所周知, 论域 U 上的所有模糊集构成的经典集合 $F(U)$, 关于模糊集的并、交、补运算构成 De Morgan 代数, 即 $(F(U); \cup, \cap, ', \varnothing, U)$. 这就自然引发一个问题: 定义 5.1.8 给出的粗糙模糊集与定义 5.3.14 给出的广义 Rough 集有何内在联系？下面的结论表明, 粗糙模糊集实际上是 De Morgan 代数上覆盖型广义 Rough 集的特例.

定理 5.3.14 设 U 是一个非空论域, R 是 U 上的等价关系. 那么必存在 U 上的一个覆盖 C, 使得对于任意 $A \in F(U)$, A 关于 (U, R) 的粗糙模糊下近似 $R_-(A)$ 和粗糙模糊上近似 $R^-(A)$ 正好是 A 基于覆盖 C 的广义 Rough 下、上近似 (按定义 5.3.14), 即 $R_-(A) = C_-(A)$, $R^-(A) = C^-(A)$.

证明 由定理 5.1.6 可知 $R_-(A)(x) = \vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}$, $R^-(A)(x) = \vee\{\alpha \mid [x]_R \cap A_\alpha \neq \varnothing\}$, 由于定义 5.1.8 与定义 5.3.14 所定义的近似算子都是对偶近似算子, 故只需证明 $R_-(A) = C_-(A)$ 即可.

取 $C=\{\alpha_{[u]}|u \in U, \alpha\in(0, 1]\}$, 其中, $\alpha_{[u]}$ 表示 U 上的如下模糊集:

$$\alpha_{[u]} : U \to [0,1];\ 当\ x \in [u]_R\ 时\ \alpha_{[u]}(x) = \alpha,\quad 否则\ \alpha_{[u]}(x) = 0.$$

显然 $\cup\{X|X \in C\}=U$, C 是 $F(U)$ 上的一个覆盖. $\forall A \in F(U)$, 由定义 5.3.14 可得 $C_-(A) = \cup\{X \in F(U)|X \subseteq A, X \in C\}$. 于是, $\forall x \in U$ 有

$$\begin{aligned}C_-(A)(x) &= \vee\{X(x)|X \subseteq A, X \in C\}\\ &= \vee\{t \in (0,1]|\exists X \subseteq A, X \in C, t = X(x)\}.\end{aligned}$$

记 $T=\{t \in(0, 1]|\exists X \subseteq A, X \in C, t = X(x)\}$. 对任意 $t \in T$, $t = X(x)$, 这里 $X \subseteq A$, $X \in C$. 由 C 的定义可知 $X = t_{[x]}$, 根据 $X \subseteq A$ 可得 $\forall y \in[x]_R$, $t \leqslant A(y)$, 所以 $[x]_R \subseteq A_t$, 从而 $t \in\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}$, 即 $T \subseteq\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}$. 所以 $\vee T \leqslant \vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}$, 即 $C_-(A)(x) = \vee T \leqslant \vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}=R_-(A)(x)$, 从而 $C_-(A) \subseteq R_-(A)$.

下证 $R_-(A) \subseteq C_-(A)$, 即 $(\forall x \in U)R_-(A)(x) \leqslant C_-(A)(x)$. 由于

$$R_-(A)(x) = \vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\},$$

$\forall t \in\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}$, 存在 $x \in U$ 使得 $[x]_R \subseteq A_t$, 所以 $\forall y \in[x]_R$, 有 $A(y) \geqslant t$. 由 C 的定义可得 $t_{[x]} \in C$ 且 $t_{[x]} \subseteq A$, 故 $t_{[x]} \in\{X \in F(U)|X \subseteq A, X \in C\}$, 所以 $t \in T=\{t \in(0, 1]|\exists X \subseteq A, X \in C, t = X(x)\}$, 即

$$\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\} \subseteq \{t \in (0,1]|\exists X \subseteq A,\ X \in C, t = X(x)\}.$$

从而 $\vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\}\leqslant \vee\{t \in(0, 1]|\exists X \subseteq A, X \in C, t = X(x)\}$, 即 $R_-(A)(x) = \vee\{\alpha|[x]_R \subseteq A_\alpha\} \leqslant C_-(A)(x)$, 因此 $R_-(A) \subseteq C_-(A)$.

综上所述, $R_-(A) = C_-(A)$.

习 题 5

1. 给出定理 5.1.1、定理 5.1.3 及定理 5.1.6 的证明.

2. 对于 Pawlak 标准 Rough 集模型, 可由下、上近似算子生成粗双 Stone 代数. 试研究在粗糙模糊集模型下, 序对〈下近似, 上近似〉之间的运算及其性质; 并在此基础上讨论与双 Stone 代数的联系.

3. 了解粗 Nelson 代数的已有研究成果, 试推广这些成果到各种广义 Rough 集模型中.

4. 查阅国内外最新文献, 综述各种模糊 Rough 集模型及其关系, 并探讨模糊 Rough 集的实际应用 (如在不确定决策中的应用).

5. 研究 $(\mathcal{I}, \mathcal{T})$–模糊 Rough 近似的代数性质, 特别是当 $\mathcal{T}, \mathcal{I}$ 分别取为 t–模及其剩余蕴涵时模糊 Rough 近似算子的特性. 同时, 可将 $\mathcal{T}, \mathcal{I}$ 分别具体化为 Łukasiewicz t–模、R_0 t–模及其剩余蕴涵, 讨论这此模糊 Rough 集的性质及其实际应用.

6. 定理 5.3.2 能否推广到模糊 Rough 集或 De Morgan 代数上的广义 Rough 集模型中 (证明或举反例)?

7. 系统研究与 Rough 集相关的代数结构之间的内在联系, 比如粗双 Stone 代数与粗 Nelson 代数、HW 代数与分配 BZ^{dM} 格等, 以及这些代数结构与模糊逻辑代数结构之间的联系.

第 6 章　基于伪t–模的非可换模糊逻辑系统

6.1　非可换模糊逻辑系统PL

本节介绍文献 [75] 中建立的逻辑系统 **PL**, 它是 Łukasiewicz 命题逻辑的非交换推广; 与 **PL** 配套的代数结构是伪 MV–代数 (也称为 $psMV$–代数), 它是 MV–代数的非可换推广, 它最早出现在文献 [235], [236] 中 (文献 [237] 直接使用非可换 MV–代数的名称). 需要说明的是, 由定理 2.3.3 知 "真伪 t–模一定不连续", 因此在 [0, 1] 区间上找不到与 Łukasiewicz t–模相对应的伪 t–模, 但在格序群中可以找到构成 $psMV$–代数的区间 $[0, u]$(参见后面的介绍), 这样的区间是实单位区间 [0, 1] 的推广, 而其上的乘法可以看成是格上的伪 t–模.

6.1.1　伪 MV–代数 ($psMV$–代数)

定义 6.1.1[235,236]　一个伪 MV–代数 (pseudo MV–代数, $psMV$–代数) 是指代数结构 $(A; \oplus, ^*, ^\sim, 0, 1)$, 其中, $\oplus$ 是二元运算, * 与 $^\sim$ 为一元运算, 0 与 1 为常元, 且以下公理成立 $(\forall x, y, z \in A)$:

(psMV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(psMV2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;

(psMV3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$;

(psMV4) $1^\sim = 0, 1^* = 0$;

(psMV5) $(x^* \oplus y^*)^\sim = (x^\sim \oplus y^\sim)^*$;

(psMV6) $x \oplus (x^\sim \odot y) = y \oplus (y^\sim \odot x) = (x \odot y^*) \oplus y = (y \odot x^*) \oplus x$;

(psMV7) $x \odot (x^* \oplus y) = (x \oplus y^\sim) \odot y$;

(psMV8) $(x^*)^\sim = x$,

其中, $x \odot y = (y^* \oplus x^*)^\sim$.

一个伪 MV–代数 A 是一个 MV–代数当且仅当 $(\forall x, y \in A) x \oplus y = y \oplus x$.

在任何 $psMV$–代数中, 可以用两个否定运算来定义相应的两个蕴涵运算:

$$x \to y = x^* \oplus y, x \rightsquigarrow y = y \oplus x^\sim, \quad \forall x, y \in A.$$

例 6.1.1[236]　设 $(G; +, -, 0)$ 是一个格群 (l-group), $u > 0$, $u \in G$. 如果定义对任意 $0 \leqslant x, y \leqslant u, x \oplus y = (x+y) \wedge u, x^* = u - x, x^\sim = -x + u$, 则 $[0, u]_G = ([0,$

$u]; \oplus, ^*, ^\sim, 0, u)$ 是一个 $psMV$–代数, 其序关系是 G 上序关系在 $[0,u]$ 上的限制.

容易验证以下结论成立.

定理 6.1.1 设 $(A; \oplus, ^*, ^\sim, 0, 1)$ 是 $psMV$–代数, 则 $(A; \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是剩余格.

根据上述结论, 可以按剩余格的对应概念定义 $psMV$–代数的滤子、正规滤子、素滤子等 (见第 2 章).

定义 6.1.2[75,236] 一个全序的 $psMV$–代数称为 $psMV$–链. 一个 $psMV$–代数称为是可表示的 (representable), 如果它是 $psMV$–链的子直积.

定理 6.1.2[75] 设 $(A; \oplus, ^*, ^\sim, 0, 1)$ 是 $psMV$–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是可表示的;

(2) A 的任何极小素滤子是正规的;

(3) $\forall x, y \in A$, $(x \oplus x) \wedge (y \oplus y)=(x \wedge y) \oplus (x \wedge y)$;

(4) $\forall x, y \in A$, $(y \to x) \vee (z \rightsquigarrow ((x \to y) \odot z))=1$, $(y \rightsquigarrow x) \vee (z \to (z \odot (x \rightsquigarrow y)))=1$;

(5) $\forall x, y \in A$, $(y \to x) \vee (z \rightsquigarrow (z \to (x \to y)^*)^\sim)=1$, $(y \rightsquigarrow x) \vee (z \to (z \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y)^\sim)^*)=1$.

注 6.1.1 文献 [75] 对上述 (4), (5) 的表述有误, 这里已作了修改.

文献 [238], [239] 引入伪 *Wajsberg*–代数的概念, 它是 *Wajsbers*–代数的非可换推广. 同 *Wajsberg*–代数与 MV–代数范畴等价类似, 伪 *Wajsberg*–代数与 $psMV$–代数范畴等价 (以后对 *psWajsberg*–代数与 $psMV$–代数不加区分).

定义 6.1.3[238,239] 一个伪 *Wajsberg*–代数 (pseudo Wajsberg–代数, *psWajsberg*–代数) 是一个代数结构 $(W; \to, \rightsquigarrow, ^*, ^\sim, 1)$, 其中, $\to$ 与 $\rightsquigarrow$ 是二元运算, * 与 $^\sim$ 是一元算子, 1 是一个常元, 且下面的等式成立 $(\forall x, y, z \in W)$:

(W1) $1 \to x = x$, $1 \rightsquigarrow x = x$;

(W2) $(x \to y) \to ((y \to z) \rightsquigarrow (x \to z))=1$, $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z))=1$;

(W3) $(x \to y) \rightsquigarrow y=(y \to x) \rightsquigarrow x=(x \rightsquigarrow y) \to y=(y \rightsquigarrow x) \to x$;

(W4) $(x^* \rightsquigarrow y^*) \to (y \to x)=1$, $(x^\sim \to y^\sim) \to (y \rightsquigarrow x)=1$;

(W5) $1^*=1^\sim$;

(W6) $(x \to y^*)^\sim=(y \rightsquigarrow x^\sim)^*$.

定理 6.1.3[238,239] (a) 设 $(A; \oplus, ^*, ^\sim, 0, 1)$ 是 $psMV$–代数, 则 $(A; \to, \rightsquigarrow, ^*, ^\sim, 1)$ 是一个 *psWajsberg*–代数, 其中, $\forall x, y \in A$, $x \to y = x^* \oplus y$, $x \rightsquigarrow y = y \oplus x^\sim$, 且 $1=0^*=0^\sim$.

(b) 设 $(W; \to, \rightsquigarrow, ^*, ^\sim, 1)$ 是 *psWajsberg*–代数, 则 $(W; \oplus, ^*, ^\sim, 0, 1)$ 是一个 $psMV$–代数, 其中, $\forall x, y \in W$, $x \oplus y = x^\sim \to y = y^* \rightsquigarrow x^\sim$, 且 $0=1^*=1^\sim$.

6.1.2 非可换 Łukasiewicz 逻辑 PL

定义 6.1.4[75] 命题演算 PL 的语言由以下成分构成:

可数多个命题变元 $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ (用 V_{ar} 表示所有命题变元构成的集合),

一元逻辑联结词 $\neg$ 和 $\sim$,

二元逻辑联结词 $\rightarrow$ 和 $\rightsquigarrow$,

圆括号 "(" 和 ")".

PL 的公式按通常的定义, 即由命题变元生成的 $(\neg, \sim, \rightarrow, \rightsquigarrow)$-型自由代数. 用 $Fm_{\mathbf{PL}}$ 表示 **PL** 的所有公式构成的集合.

定义 6.1.5[75] 对任意公式 $\varphi \in Fm_{\mathbf{PL}}$, 定义 $\varphi^{\bullet}$ 如下:

若 $\varphi \in V_{ar}$, 则 $\varphi^{\bullet}$ 是 φ;

若 φ 是 $\neg\psi$, 则 $\varphi^{\bullet}$ 是 $\sim(\psi^{\bullet})$;

若 φ 是 $\sim\psi$, 则 $\varphi^{\bullet}$ 是 $\neg(\psi^{\bullet})$;

若 φ 是 $\psi\rightarrow\chi$, 则 $\varphi^{\bullet}$ 是 $\psi^{\bullet} \rightsquigarrow \chi^{\bullet}$;

若 φ 是 $\psi\rightsquigarrow\chi$, 则 $\varphi^{\bullet}$ 是 $\psi^{\bullet} \rightarrow \chi^{\bullet}$.

容易验证, $\varphi^{\bullet\bullet}$ 与 φ 重合, 且从任何公式 φ 出发通过将 $\neg$ 和 $\sim$, $\rightarrow$ 和 $\rightsquigarrow$ 进行替换即可得到 $\varphi^{\bullet}$.

定义 6.1.6[75] **PL** 的公理定义如下:

(1) 具有下面形式的公式是一个公理 (其中, φ, ψ, χ 是任意公式):

(P1) $\varphi\rightarrow(\psi\rightsquigarrow\varphi)$;

(P2) $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow((\psi\rightarrow\chi)\rightsquigarrow(\varphi\rightarrow\chi))$;

(P3) $((\varphi\rightarrow\psi)\rightsquigarrow\psi)\rightarrow((\psi\rightarrow\varphi)\rightsquigarrow\varphi)$;

(P4) $(\neg\psi\rightsquigarrow \neg\varphi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\psi)$;

(P5) $\sim (\varphi\rightarrow \neg\psi)\rightarrow \neg(\psi\rightsquigarrow\sim\varphi)$.

(2) 如果 φ 是公理, 那么 $\varphi^{\bullet}$ 也是一个公理.

PL 的推理规则是: $(\mathrm{MP}_{\rightarrow})$ 由 φ 和 $\varphi\rightarrow\psi$ 推得 ψ, $(\mathrm{MP}_{\rightsquigarrow})$ 由 φ 和 $\varphi\rightsquigarrow\psi$ 推得 ψ.

由于逻辑推演可以看成代数滤子理论的镜像 (reflection), 因此下面引入正规公式集 (normal set of formulas) 作为正规滤子的逻辑镜像, 并且区分由空公式集出发的推演和从非空公式集出发的推演. 下面条件 (t4) 和 (t5) 可以看成是部分推理规则, 它们仅仅允许在定理的推演过程中使用.

定义 6.1.7[75] 一个公式 φ 是 **PL** 的定理, 如果存在一个自然数 $n \geqslant 1$ 和公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n=\varphi$, 使得对任何 $i \leqslant n$ 下面的条件之一成立:

(t1) φ_i 是一个公理;

(t2) 存在 $j, k < i$, 使得 φ_j 是 $\varphi_k \rightarrow\varphi_i$;

(t3) 存在 $j, k < i$, 使得 φ_j 是 $\varphi_k \rightsquigarrow\varphi_i$;

(t4) 存在 $k < i$ 和 $\psi, \chi \in Fm_{\mathbf{PL}}$, 使得 φ_k 是 $\psi \to \chi$ 而 φ_i 是 $\psi \rightsquigarrow \chi$;

(t5) 存在 $k < i$ 和 $\psi, \chi \in Fm_{\mathbf{PL}}$, 使得 φ_k 是 $\psi \rightsquigarrow \chi$ 而 φ_i 是 $\psi \to \chi$.

此时, 序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$ 称为 φ 的一个证明. 若一个公式 φ 是定理, 则记为 $\vdash_{\mathbf{PL}} \varphi$, 或简记为 $\vdash \varphi$. **PL** 的所有定理构成的集合记为 $Th_{\mathbf{PL}}$. 设 Θ 是 **PL** 的一些公式构成的集合, 一个公式 φ 称为 Θ-定理, 如果存在一个自然数 $n \geqslant 1$ 和公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$, 使得对任何 $i \leqslant n$ 下面的条件之一成立:

(θ1) $\varphi_i \in Th_{\mathbf{PL}} \cup \Theta$;

(θ2) 存在 $j, k < i$, 使得 φ_j 是 $\varphi_k \to \varphi_i$;

(θ3) 存在 $j, k < i$, 使得 φ_j 是 $\varphi_k \rightsquigarrow \varphi_i$.

此时, 序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$ 称为 φ 的一个 Θ–证明. 若一个公式 φ 是定理, 则记为 $\Theta \vdash_{\mathbf{PL}} \varphi$, 或简记为 $\Theta \vdash \varphi$. **PL** 的所有 Θ–定理构成的集合记为 $Th_{\mathbf{PL}}(\Theta)$.

一些公式构成的集合 Θ 称为是正规的, 如果下面条件成立:

(NS) $\forall \varphi, \psi \in Fm_{\mathbf{PL}}$, $\Theta \vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\Theta \vdash \varphi \rightsquigarrow \psi$.

显然, $\varnothing \vdash_{\mathbf{PL}} \varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{PL}} \varphi$, 而 $Th_{\mathbf{PL}}$ 与 $\varnothing$ 均是正规集.

定理 6.1.4[75]　对于 **PL** 的任何公式 φ, $\vdash \varphi$ 当且仅当 $\vdash \varphi^{\bullet}$.

定理 6.1.5[75]　在 **PL** 中, 下面的公式是定理:

(1) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$;

(2) $(\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$;

(3) $\varphi \to \varphi$;

(4) $(\psi \to \chi) \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;

(5) $(\sim\varphi \to \sim\psi) \to (\psi \rightsquigarrow \varphi)$;

(6) $\neg \sim\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \varphi)$;

(7) $\neg \sim\varphi \to \varphi$;

(8) $(\varphi \rightsquigarrow \neg\psi) \to (\psi \to \sim\varphi)$;

(9) $\varphi \to \sim \neg\varphi$;

(10) $(\neg\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\sim\psi \to \varphi)$;

(11) $(\varphi \rightsquigarrow \psi) \to (\sim\psi \to \sim\varphi)$;

(12) $\varphi \to (\sim\varphi \to \psi)$.

如果 $n \geqslant 1$ 是自然数 n, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n, \psi$ 是公式, 则用 $\varphi_1 \cdots \varphi_n \to \psi$ 表示公式 $\varphi_1 \to (\cdots (\varphi_n \to \psi) \cdots)$, 用 $\varphi_1 \cdots \varphi_n \rightsquigarrow \psi$ 表示公式 $\varphi_1 \rightsquigarrow (\cdots (\varphi_n \rightsquigarrow \psi) \cdots)$.

定理 6.1.6(PL 的演绎定理)[75]　设 Θ 是一个公式集, φ, ψ 是 **PL** 的任意公式, 则以下条件等价:

(a) $\Theta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$;

(b) 存在 $n \geqslant 1$ 及 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in Th_{\mathbf{PL}}(\Theta) \cup \{\varphi\}$ 使得 $\vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n \to \psi$;

(c) 存在 $n \geqslant 1$ 及 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in Th_{\mathbf{PL}}(\Theta) \cup \{\varphi\}$使得 $\vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow \psi$;

(d) 存在 $n \geqslant 1$ 及 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in Th_{\mathbf{PL}}(\Theta) \cup \{\varphi\}$使得 $\Theta \vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n \to \psi$;

(e) 存在 $n \geqslant 1$ 及 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in Th_{\mathbf{PL}}(\Theta) \cup \{\varphi\}$使得 $\Theta \vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n \rightsquigarrow \psi$.

6.1.3 PL 的完备性

定理 6.1.7[75] 设 Θ 是一个正规公式集, 定义关系 $\equiv_\Theta$ 如下:

$$\varphi \equiv_\Theta \psi \Leftrightarrow (\Theta \vdash \varphi \to \psi, \Theta \vdash \psi \to \varphi) \Leftrightarrow (\Theta \vdash \varphi \rightsquigarrow \psi, \Theta \vdash \psi \rightsquigarrow \varphi),$$

则 $\equiv_\Theta$ 是 $Fm_{\mathbf{PL}}$ 上的等价关系. 记 $[\varphi]_\Theta$ 是 φ 关于 $\equiv_\Theta$ 的等价类, $Fm_{\mathbf{PL}}/\equiv_\Theta$ 是 $Fm_{\mathbf{PL}}$ 关于 $\equiv_\Theta$ 的商集. 在 $Fm_{\mathbf{PL}}/\equiv_\Theta$ 上定义

$$\begin{aligned}
&[\varphi]_\Theta^* = [\neg\varphi]_\Theta,\\
&[\varphi]_\Theta^\sim = [\sim \varphi]_\Theta,\\
&[\varphi]_\Theta \to [\psi]_\Theta = [\varphi \to \psi]_\Theta,\\
&[\varphi]_\Theta \rightsquigarrow [\psi]_\Theta = [\varphi \rightsquigarrow \psi]_\Theta,
\end{aligned}$$

并用 1_Θ 表示 $Th_{\mathbf{PL}}(\Theta)$, 则 $(Fm_{\mathbf{PL}}/\equiv_\Theta; \to, \rightsquigarrow, {}^*, {}^\sim, 1_\Theta)$ 是 *psWajsberg*–代数.

推论 6.1.1[75] 设 Θ 是一个正规公式集, 则 $(Fm_{\mathbf{PL}}/\equiv_\Theta; \oplus, {}^*, {}^\sim, 0_\Theta, 1_\Theta)$ 是 *psMV*–代数, 其中, $[\varphi]_\Theta \oplus [\psi]_\Theta = [(\sim\varphi) \to \psi]_\Theta$, $0_\Theta^\sim = 1_\Theta^* = 1_\Theta^\sim$.

以下记 $PL(\Theta) = (Fm_{\mathbf{PL}}/\equiv_\Theta; \oplus, {}^*, {}^\sim, 0_\Theta)$, 并称为 Θ 的 Lindenbaum-Taski 代数. 特别地, 当 $\Theta = \varnothing$ 时, 简记 $\equiv_\varnothing$ 为 $\equiv$, 简记 $PL(\varnothing)$ 为 PL, 称为非可换Łukasiewicz 命题演算的 Lindenbaum-Taski 代数.

定义 6.1.8[75] 设 A 是一个 *psMV*–代数, 一个 A- 赋值是指映射 $e: V_{ar} \to A$, 它可以按自然的方式扩展成为所有公式到 A 的真值函数. 又设 Θ 是一个公式集, φ 是一个公式, 称 φ 为关于 A 的 Θ- 重言式, 如果对任意 A 赋值 $e: Fm_{\mathbf{PL}} \to A$ 均有

$$e(\Theta) = \{e(\psi) | \psi \in \Theta\} = \{1\} \text{蕴涵} e(\varphi) = 1.$$

此时记为 $\Theta \vDash_A \varphi$. 并用 $T_{aut}(A)$ 表示所有关于 A 的 Θ–重言式之集. 特别地, 当 $\Theta = \varnothing$ 时, 称 Θ- 重言式为重言式, $\Theta \vDash_A \varphi$ 简记为 $\vDash_A \varphi$.

定理 6.1.8(PL 的可靠性)[75] 设 Θ 是一个公式集, φ 是一个公式. 如果 $\Theta \vdash \varphi$, 则对任意*psMV*–代数 A 均有 $\Theta \vDash_A \varphi$. 特别地, $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash_A \varphi$(对任一 *psMV*–代数 A).

定理 6.1.9(PL 的完备性)[75] 设 Θ 是一个正规公式集, φ 是一个公式, 则以下条件等价:

(1) $\Theta \vdash_{\mathbf{PL}} \varphi$;

(2) 对任意 *psMV*–代数 A, $\Theta \vDash_A \varphi$;

(3) 在 $PL(\Theta)$ 中, $[\varphi]_\Theta = 1_\Theta$.

显然, $Th_{\mathbf{PL}} = \cap\{T_{aut}(A)|A$ 是 $psMV$–代数$\}$.

定义 6.1.9[75]　命题演算 $\mathbf{PL}_{\mathrm{r}}$ 是在 **PL** 的公理基础上添加如下公理之一得到的:

(R) $(\psi\to\varphi)\vee(\chi\rightsquigarrow\sim(\chi\to\neg(\varphi\to\psi)))$,

$(\psi\rightsquigarrow\varphi)\vee(\chi\to\neg(\chi\rightsquigarrow\sim(\varphi\rightsquigarrow\psi)))$,

其中, $\varphi\vee\psi$ 表示 $(\varphi\to\psi)\rightsquigarrow\psi$.

注 6.1.2　文献 [75] 上述 (R) 的两个公式的表述有误, 这里已作了修改.

由定理 6.1.2 知, 对于任意正规公式集 Θ, 相应的 Lindenbaum-Taski 代数 $PL_r(\Theta)$ 是一个可表示的 $psMV$–代数, 从而可得如下结果:

定理 6.1.10($\mathbf{PL}_{\mathrm{r}}$ 的完备性)[75]　设 Θ 是一个正规公式集, φ 是一个公式, 则以下条件等价:

(1) $\Theta\vdash_{\mathbf{PLr}}\varphi$;

(2) 对任意可表示的 $psMV$–代数 A, $\Theta\models_A\varphi$;

(3) 对任意 $psMV$–链 A, $\Theta\models_A\varphi$;

(4) 在 $PL_r(\Theta)$ 中, $[\varphi]_\Theta=1_\Theta$.

注 6.1.3　本书第 3 章介绍的Lukasiewicz 命题演算**Łuk**可看成 **PL** 的扩张, 即在 **PL** 公理基础上添加如下公理之一:

(L) $(\varphi\to\psi)\rightsquigarrow(\varphi\rightsquigarrow\psi)$;

$(\varphi\rightsquigarrow\psi)\to(\varphi\to\psi)$.

6.2　非可换模糊逻辑系统psBL/psBL^{r} 与psMTL/psMTL^{r}

2003 年, Hájek 在文献 [72], [73] 中相继提出非可换模糊逻辑系统**psBL**, **psMTL**, **psBL**^{r} 和**psMTL**^{r}. 同年, Jenei 及 Montagna 在文献 [74] 中证明了**psMTL**^{r} 系统的标准完备性, 本节将介绍这些研究成果. 因非可换模糊逻辑代数的研究先于非可换模糊逻辑形式系统的研究, 且是讨论形式系统的基础, 故先介绍相关代数结构的基本知识.

6.2.1　$psBL$–代数与 $psMTL$–代数

前面已经提到, 最早研究的非可换模糊逻辑代数是 $psMV$–代数[235,236], 由罗马尼亚学者 Georgescu 和 Iorgulescu 首次引入. 2000 年, Georgescu 和 Iorgulescu 又在文献 [240] 中引入伪 BL–代数 (简称为 $psBL$–代数), 作为 BL–代数的非可换推广, 更详细的研究成果总结在DiNola与Georgescu, Iorgulescu合作发表的系列论文[77,78]中 (此外, 文献 [241], [242] 也对 $psBL$–代数进行了研究); 2001 年文献 [83] 中引入

弱伪 *BL*–代数 (简称为 *WPBL*–代数. Hájek 在文献 [72] 中称之为伪 *MTL*–代数, 简称为 *psMTL*–代数), 作为著名的 *MTL*–代数的非可换推广, 而文献 [76] 中给出 *WPBL*–代数 (*psMTL*–代数) 的一些基本性质.

定义 6.2.1[72,73,77] 一个 *psBL*–代数是指满足以下条件的代数结构 $(A; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$:

(C1) $(A; \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界格;

(C2) $(A; \otimes, 1)$ 是独异点, 即 $\otimes$ 是结合的且 $x\otimes 1=1\otimes x = x$;

(C3) $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \to z$ 当且仅当 $y \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(C4) $x \wedge y=(x \to y) \otimes x = x \otimes (x \rightsquigarrow y)$;

(C5) $(x \to y) \vee (y \to x)=1=(x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x)$.

注 6.2.1 容易验证, *psWajsberg*–代数 (或 *psMTL*–代数) 必是 *psBL*–代数. 同时, 由定义 2.4.4 知, *psBL*–代数是满足条件 (C4), (C5) 的剩余格. 因此, 剩余格所有性质在 *psBL*–代数中均成立, 但为了引用方便, 下面仍罗列一些基本性质.

定理 6.2.1[77,78,241] 在 *psBL*–代数 $(A; \vee, \wedge, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 中成立:

(1) $(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)$;

(2) $(y \otimes x) \rightsquigarrow z = x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z)$;

(3) $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \to y=1$ 当且仅当 $x \rightsquigarrow y=1$;

(4) $x \leqslant y \Rightarrow x \otimes z \leqslant y \otimes z$ 且 $z \otimes x \leqslant z \otimes y$;

(5) $x \otimes y \leqslant x, y$;

(6) $x \otimes y \leqslant x \wedge y$;

(7) $x \to y = x \to x \wedge y$, $x \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow x \wedge y$;

(8) $x \vee y=((x \to y) \rightsquigarrow y)\wedge((y \to x) \rightsquigarrow x)$;

(9) $x \vee y=((x \rightsquigarrow y) \to y)\wedge((y \rightsquigarrow x) \to x)$;

(10) $x \otimes y=0$ 当且仅当 $x \leqslant y^-$ 当且仅当 $x \leqslant y^\sim$;

(11) $x\otimes 0=0\otimes x=0$;

(12) $x \otimes x^- = x^\sim \otimes x=0$;

(13) $1\to x=1\rightsquigarrow x = x$;

(14) $x^-=1$ 当且仅当 $x^\sim=1$ 当且仅当 $x=0$;

(15) $1^-=1^\sim=0$;

(16) $x \leqslant y \Rightarrow y^- \leqslant x^-$ 且 $y^\sim \leqslant x^\sim$;

(17) $x \leqslant x^{-\sim}$, $x \leqslant x^{\sim-}$;

(18) $x \to y \leqslant y^- \rightsquigarrow x^-$, $x \rightsquigarrow y \leqslant y^\sim \to x^\sim$;

(19) $x^- = x^{-\sim-}$, $x^\sim = x^{\sim-\sim}$;

(20) $(x \otimes y)^- = x \to y^-$, $(x \otimes y)^\sim = y \rightsquigarrow x^\sim$;

(21) $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$, $(x \vee y)^\sim = x^\sim \wedge y^\sim$;

(22) $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$, $(x \wedge y)^\sim = x^\sim \vee y^\sim$;

(23) $x \otimes (y \vee z)=(x \otimes y) \vee (x \otimes z)$;

(24) $(y \vee z) \otimes x=(y \otimes x) \vee (z \otimes x)$;

(25) $x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

定理 6.2.2[78]　对于 $psBL$–代数 A 的滤子 H, 以下条件等价:

(1) H 是正规的;

(2) $x \otimes H = H \otimes x, \forall x \in A$. 这里 $x \otimes H=\{x \otimes h|h \in H\}, H \otimes x=\{h \otimes x|h \in H\}$.

定义 6.2.2[72]　满足以下条件的 $psBL$–代数称为 $psBL^r$–代数:

$$(y \rightarrow x) \vee (z \rightsquigarrow ((x \rightarrow y) \otimes z)) = 1,$$
$$(y \rightsquigarrow x) \vee (z \rightarrow (z \otimes (x \rightsquigarrow y))) = 1.$$

定义 6.2.3[71,72,76]　一个 $psMTL$–代数(又称为弱伪 BL–代数, 即weak-pseudo-BL algebra, 简记 $WPBL$–代数)是指满足以下条件的代数结构 $(A; \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$:

(C1) $(A; \vee, \wedge, 0, 1)$ 是有界格;

(C2) $(A; \otimes, 1)$ 是独异点, 即 $\otimes$ 是结合的且 $x\otimes 1=1\otimes x = x$;

(C3) $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \rightarrow z$ 当且仅当 $y \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(C4′) $(x \rightarrow y) \otimes x \leqslant x \wedge y, x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x \wedge y$;

(C5) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)=1=(x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x)$.

注 6.2.2　由定义 2.4.4 知, $psMTL$–代数是满足条件 (C5) 的剩余格, 条件 (C4′) 可由 (C1)~(C3) 推出 (见定理 2.4.6(7)). 因此, 剩余格所有性质在 $psMTL$–代数中均成立, 但为了引用方便, 下面仍罗列一些基本性质, 并给出另一些性质的详细证明 (这些证明是在文献 [76] 已有性质的基础上进行的, 可参见文献 [153]).

定理 6.2.3[76]　在 $psMTL$–代数 $(A; \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 中成立:

(1) $(x \rightarrow y) \otimes x \leqslant y, x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant y$;

(2) $x \leqslant y \rightarrow (x \otimes y), x \leqslant y \rightsquigarrow (y \otimes x)$;

(3) $x \leqslant y$ 蕴涵 $x \otimes z \leqslant y \otimes z, z \otimes x \leqslant z \otimes y$;

(4) $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \rightarrow y=1$ 当且仅当 $x \rightsquigarrow y=1$;

(5) $x \rightarrow x = x \rightsquigarrow x =1$;

(6) $1\rightarrow x=1\rightsquigarrow x = x$;

(7) $y \leqslant (x \rightarrow y) \wedge (x \rightsquigarrow y)$;

(8) 若 $x \leqslant y$, 则 $z \rightarrow x \leqslant z \rightarrow y, z \rightsquigarrow x \leqslant z \rightsquigarrow y$;

(9) 若 $x \leqslant y$, 则 $y \rightarrow z \leqslant x \rightarrow z, y \rightsquigarrow z \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(10) 对于任意$\{x_i\}_{i\in I} \subseteq A$, 当所涉及的上确界存在时, 有 $x \otimes (\vee_{i\in I} x_i) = \vee_{i\in I}(x \otimes x_i), (\vee_{i\in I} x_i) \otimes x = \vee_{i\in I}(x_i \otimes x)$;

(11) $x\otimes 0=0\otimes x=0$;

(12) $1^-=1^\sim=0,\ 0^-=0^\sim=1$;

(13) $x^-\otimes x=0,\ x\otimes x^\sim=0$;

(14) $x\leqslant y^-$ 当且仅当 $x\otimes y=0$;

(15) $x\leqslant y^\sim$ 当且仅当 $y\otimes x=0$;

(16) $x\leqslant x^{-\sim},\ x\leqslant x^{\sim-}$;

(17) $x\to y^-=(x\otimes y)^-,\ x\rightsquigarrow y^\sim=(y\otimes x)^\sim$;

(18) $x\leqslant y^-$ 当且仅当 $y\leqslant x^\sim$,

其中, $x^-=x\to 0,\ x^\sim=x\rightsquigarrow 0$.

定理 6.2.4[153] 设 A 是一个 $psMTL(WPBL)$–代数, 则 $(\forall x,y,z\in A)$

(19) $x\leqslant y\Rightarrow y\to z\leqslant x\to(y\wedge z),\ y\rightsquigarrow z\leqslant x\rightsquigarrow(y\wedge z)$;

(20) $x\to(y\to z)=(x\otimes y)\to z,\ x\rightsquigarrow(y\rightsquigarrow z)=(y\otimes x)\rightsquigarrow z$;

(21) $(z\to x)\to(z\to y)\geqslant(z\wedge x)\to y,\ (z\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(z\rightsquigarrow y)\geqslant(z\wedge x)\rightsquigarrow y$;

(22) $x\to y\leqslant(z\to x)\to(z\to y),\ x\rightsquigarrow y\leqslant(z\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(z\rightsquigarrow y)$;

(23) $x\leqslant(x\to y)\rightsquigarrow y,\ x\leqslant(x\rightsquigarrow y)\to y$;

(24) $x\to(y\rightsquigarrow z)=y\rightsquigarrow(x\to z)$.

证明 (19) 从 $x\leqslant y$ 出发, 应用定理 6.2.3 (3) 得 $(y\to z)\otimes x\leqslant(y\to z)\otimes y$. 又由定义 6.2.3 (C4′) 有 $(y\to z)\otimes y\leqslant y\wedge z$. 所以, $(y\to z)\otimes x\leqslant y\wedge z$. 应用定义 6.2.3 (C3) 得, $y\to z\leqslant x\to(y\wedge z)$. 同理可证 $x\leqslant y\Rightarrow y\rightsquigarrow z\leqslant x\rightsquigarrow(y\wedge z)$.

(20) 据定义 6.2.3 (C4′) 有 $(x\to(y\to z))\otimes x\leqslant x\wedge(y\to z)$. 应用定理 6.2.3 (3) 得

$$((x\to(y\to z))\otimes x)\otimes y\leqslant(x\wedge(y\to z))\otimes y.$$

又由 $x\wedge(y\to z)\leqslant y\to z$, 应用定义 6.2.3 (C3) 得 $(x\wedge(y\to z))\otimes y\leqslant z$. 于是

$$(x\to(y\to z))\otimes(x\otimes y)=((x\to(y\to z))\otimes x)\otimes y\leqslant z.$$

再次应用定义 6.2.3 (C3) 得, $x\to(y\to z)\leqslant(x\otimes y)\to z$.

另一方面, 由 $(x\otimes y)\to z\leqslant(x\otimes y)\to z$, 应用定义 6.2.3 (C3) 得, $((x\otimes y)\to z)\otimes(x\otimes y)\leqslant z$. 据定义 6.2.3 (C2) 得

$$(((x\otimes y)\to z)\otimes x)\otimes y=((x\otimes y)\to z)\otimes(x\otimes y).$$

从而 $(((x\otimes y)\to z)\otimes x)\otimes y\leqslant z$. 应用定义 6.2.3 (C3) 得 $((x\otimes y)\to z)\otimes x\leqslant y\to z$, $(x\otimes y)\to z\leqslant x\to(y\to z)$. 所以, $x\to(y\to z)=(x\otimes y)\to z$.

同理可证 $x\rightsquigarrow(y\rightsquigarrow z)=(y\otimes x)\rightsquigarrow z$.

(21) 由 (20) 得, $(z\to x)\to(z\to y)=((z\to x)\otimes z)\to y$. 据定义 6.2.3 (C4′) 有, $(z\to x)\otimes z\leqslant z\wedge x$. 应用定理 6.2.3 (9) 得 $((z\to x)\otimes z)\to y\geqslant(z\wedge x)\to y$. 于是, $(z\to x)\to(z\to y)\geqslant(z\wedge x)\to y$. 同理可证 $(z\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(z\rightsquigarrow y)\geqslant(z\wedge x)\rightsquigarrow y$.

(22) 由 $z \wedge x \leqslant x$, 应用定理 6.2.3 (9) 得 $(z \wedge x) \to y \geqslant x \to y$. 应用 (21), $(z \to x) \to (z \to y) \geqslant (z \wedge x) \to y$. 于是, $(z \to x) \to (z \to y) \geqslant x \to y$. 同理可证 $(z \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow y) \geqslant x \rightsquigarrow y$.

(23) 从 $x \to y \leqslant x \to y$ 出发, 应用定义 6.2.3 (C3) 得 $x \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$. 从 $x \rightsquigarrow y \leqslant x \rightsquigarrow y$ 出发, 应用定义 6.2.3 (C3) 得 $x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$.

(24) 由 (22) 得 $(y \to z) \rightsquigarrow z \leqslant (x \rightsquigarrow (y \to z)) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$. 应用定义 6.2.3 (C3) 得 $x \rightsquigarrow (y \to z) \leqslant ((y \to z) \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z)$. 另一方面, 据 (23) 得 $y \leqslant (y \to z) \rightsquigarrow z$. 应用定理 6.2.3 (9) 得

$$((y \to z) \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z) \leqslant y \to (x \rightsquigarrow z).$$

于是, $x \rightsquigarrow (y \to z) \leqslant y \to (x \rightsquigarrow z)$. 同理, $y \to (x \rightsquigarrow z) \leqslant x \rightsquigarrow (y \to z)$. 从而

$$x \rightsquigarrow (y \to z) = y \to (x \rightsquigarrow z)$$

.

定理 6.2.5[153]　设 A 是一个 $psMTL(WPBL)$–代数, $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq A$, 且 $y \in A$, 则

(25) $(\vee_{i\in I} x_i) \to y = \wedge_{i\in I}(x_i \to y)$;

(26) $(\vee_{i\in I} x_i) \rightsquigarrow y = \wedge_{i\in I}(x_i \rightsquigarrow y)$;

(27) $y \to (\wedge_{i\in I} x_i) = \wedge_{i\in I}(y \to x_i)$;

(28) $y \rightsquigarrow (\wedge_{i\in I} x_i) = \wedge_{i\in I}(y \rightsquigarrow x_i)$.

这里假定所出现的上、下确界存在.

证明　(25) 对任意 $z \in A$, 有以下等价关系:

$$\begin{aligned} z \leqslant (\vee_{i\in I} x_i) \to y &\Leftrightarrow z \otimes (\vee_{i\in I} x_i) \leqslant y && (\text{由定义 6.2.3 (C3)})\\ &\Leftrightarrow \vee_{i\in I}\ (z \otimes x_i) \leqslant y && (\text{由定理 6.2.3 (10)})\\ &\Leftrightarrow z \otimes x_i \leqslant y,\ \forall i \in I\\ &\Leftrightarrow z \leqslant x_i \to y,\ \forall i \in I && (\text{由定义 6.2.3 (C3)})\\ &\Leftrightarrow z \leqslant \wedge_{i\in I}(x_i \to y). \end{aligned}$$

于是, (25) 成立. 同理可证 (26) 成立.

(27) 对任意 $z \in A$, 有以下等价关系:

$$\begin{aligned} z \leqslant y \to (\wedge_{i\in I} x_i) &\Leftrightarrow z \otimes y \leqslant \wedge_{i\in I} x_i && (\text{由定义 6.2.3 (C3)})\\ &\Leftrightarrow z \otimes y \leqslant x_i,\ \forall i \in I\\ &\Leftrightarrow z \leqslant y \to x_i,\ \forall i \in I && (\text{由定义 6.2.3 (C3)})\\ &\Leftrightarrow z \leqslant \wedge_{i\in I}(y \to x_i). \end{aligned}$$

于是, (27) 成立. 同理可证 (28) 成立.

定理 6.2.6[153]　设 A 是一个 $psMTL(WPBL)$–代数, 则 $(\forall x, y \in A)$

(29) $x \vee y = ((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)$,

(30) $x \vee y = ((x \to y) \rightsquigarrow y) \wedge ((y \to x) \rightsquigarrow x)$.

证明 仅证 (29) 成立, (30) 可类似证明. 由定理 6.2.4 (23) 得 $x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$. 又 $y \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$. 于是 $x \vee y \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$. 类似地有 $x \vee y \leqslant (y \rightsquigarrow x) \to x$. 从而, $x \vee y \leqslant ((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)$. 另一方面,

$$\begin{aligned}
&((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)\\
=&[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes 1\\
=&[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes [(x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x)] \qquad \text{(由定义 6.2.3 (C5))}\\
=&[[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes (x \rightsquigarrow y)] \vee [[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes (y \rightsquigarrow x)]\\
&\text{(由定理 6.2.3 (10))}
\end{aligned}$$

而由定理 6.2.3 (1) 有 $[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant ((x \rightsquigarrow y) \to y) \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant y$. 类似地, $[((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x)] \otimes (y \rightsquigarrow x) \leqslant x$. 从而, $((x \rightsquigarrow y) \to y) \wedge ((y \rightsquigarrow x) \to x) \leqslant y \vee x$. 这说明 (29) 成立.

定义 6.2.4[72] 满足以下条件的 *psMTL*-代数称为 *psMTL*^{r}-代数:

$$(y \to x) \vee (z \rightsquigarrow ((x \to y) \otimes z)) = 1,$$
$$(y \rightsquigarrow x) \vee (z \to (z \otimes (x \rightsquigarrow y))) = 1.$$

6.2.2 逻辑系统 psBL/psBL^r 与 psMTL/psMTL^r

定义 6.2.5[72,73] 具有逻辑联结词&, →, ⇝, ∧, ∨, 常元 $\bar{0}$ 及以下公理和推理规则的逻辑系统称为 **psBL**:

公理

($\underline{\text{A}}$1) $(\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$, $(\psi \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \rightsquigarrow (\varphi \rightsquigarrow \chi))$;

($\underline{\text{A}}$2) $(\varphi \,\&\, \psi) \to \varphi$;

($\underline{\text{A}}$3) $(\varphi \,\&\, \psi) \to \psi$;

($\underline{\text{A}}$4) $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \,\&\, \varphi) \leftrightarrow ((\psi \to \varphi) \,\&\, \psi)$,
$(\varphi \wedge \psi) \leftrightsquigarrow (\varphi \,\&\, (\varphi \rightsquigarrow \psi)) \leftrightsquigarrow (\psi \,\&\, (\psi \rightsquigarrow \varphi))$;

($\underline{\text{A}}$5) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow ((\varphi \,\&\, \psi) \to \chi)$, $(\varphi \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \chi)) \leftrightarrow ((\psi \,\&\, \varphi) \rightsquigarrow \chi)$;

($\underline{\text{A}}$6) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$, $((\varphi \rightsquigarrow \psi) \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow (((\psi \rightsquigarrow \varphi) \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow \chi)$;

($\underline{\text{A}}$7) $\bar{0} \to \varphi$;

($\underline{\text{A}}$8) $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \rightsquigarrow \varphi) \to \varphi)) \leftrightarrow (((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \rightsquigarrow \varphi))$.

推理规则

MP 规则: 从 $\varphi, \varphi \to \psi$ 推得 ψ; 从 $\varphi, \varphi \rightsquigarrow \psi$ 推得 ψ.

蕴涵规则 (Imp 规则): 从 $\varphi \to \psi$ 推得 $\varphi \rightsquigarrow \psi$; 从 $\varphi \rightsquigarrow \psi$ 推得 $\varphi \to \psi$.

其中, $\varphi \leftrightarrow \psi$ 是 $(\varphi \to \psi) \,\&\, (\psi \to \varphi)$ 的简写, $\varphi \leftrightsquigarrow \psi$ 是 $(\varphi \rightsquigarrow \psi) \,\&\, (\psi \rightsquigarrow \varphi)$ 的简写.

可按通常的方式定义 "证明"、"定理 (或可证)"、"赋值"、"重言式" 等概念, 比如对于一个 *psBL*-代数 A, 映射 $e{:}F(S) \to A$ 是一个 A-赋值 (这里 $F(S)$ 代表系统 **psBL** 中的全体公式之集), 如果 e 是 $(\wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow)$ 型同态, 即

$$e(\varphi \wedge \psi) = e(\varphi) \wedge e(\psi), e(\varphi \vee \psi) = e(\varphi) \vee e(\psi), e(\varphi \& \psi) = e(\varphi) \otimes e(\psi),$$
$$e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \to e(\psi), e(\varphi \rightsquigarrow \psi) = e(\varphi) \rightsquigarrow e(\psi).$$

定理 6.2.7[72,73] 在系统 **psBL** 中, 公式 φ 是可证的当且仅当对每一个 $psBL$–代数 A 来说 φ 是 A- 重言式 (即对任意 A–赋值 e 有 $e(\varphi)$=1).

定义 6.2.6[72] 在系统 **psBL** 中添加以下公理所得的逻辑系统称为 $\mathbf{psBL^r}$ 系统:

(R1) $(\psi\to\varphi)\vee(\chi\rightsquigarrow((\varphi \to\psi)\&\chi))$,

(R2) $(\psi\rightsquigarrow\varphi)\vee(\chi\to(\chi\&(\varphi\rightsquigarrow\psi)))$.

定理 6.2.8($\mathbf{psBL^r}$ **的完备性定理**)[72] 在系统 $\mathbf{psBL^r}$ 中, 公式 φ 是可证的当且仅当对每一个线性序 $psBL^r$–代数 ($psBL^r$–链)A 来说 φ 是 A–重言式 (即对任意 A–赋值 e 有 $e(\varphi)$=1).

定义 6.2.7[73] 在 **psBL** 中添加一元联结词逻辑 Δ, 以及下述公理和推理规则的逻辑系统称为 $\mathbf{psBL_\Delta}$:

(Δ1) $\Delta\varphi\vee(\Delta\varphi\to \bar{0})$;

(Δ2) $\Delta(\varphi\vee\psi)\to (\Delta\varphi\vee\Delta\psi)$;

(Δ3) $\Delta\varphi\to\varphi$;

(Δ4) $\Delta\varphi\to \Delta\Delta\varphi$;

(Δ5) $\Delta(\varphi\to\psi)\to (\Delta\varphi\to \Delta\psi)$;

(Δ6) $\Delta(\varphi\to\psi)\leftrightarrow \Delta(\varphi\rightsquigarrow\psi)$.

(Nec) 规则: 从 φ 推得 $\Delta\varphi$.

定义 6.2.8[73] 一个代数结构 (A; $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$, $\rightsquigarrow$, Δ, 0, 1) 称为 $psBL_\Delta$–代数, 如果 (A; $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$, $\rightsquigarrow$, 0, 1) 是 $psBL$–代数且使前述公式 (Δ1)~ (Δ6) 均为 A–重言式.

定理 6.2.9($\mathbf{psBL_\Delta}$**的完备性定理**)[73] 公式 φ 在系统 $\mathbf{psBL_\Delta}$ 中是可证的当且仅当对每一个线性序 $psBL_\Delta$–代数 A 来说 φ 是 A–重言式.

定义 6.2.9[72] 具有逻辑联结词&, $\to$, $\rightsquigarrow$, $\wedge$, $\vee$, 常元 $\bar{0}$ 及以下公理和推理规则的逻辑系统称为 **psMTL**:

公理

($\underline{A}$1) $(\psi \to\chi)\to((\varphi \to\psi) \to(\varphi \to\chi))$, $(\psi\rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow((\varphi\rightsquigarrow\psi)\rightsquigarrow(\varphi\rightsquigarrow\chi))$;

($\underline{A}$2) $(\varphi \&\psi)\to\varphi$;

($\underline{A}$3) $(\varphi \&\psi)\to\psi$;

($\underline{A}$4a) $((\varphi \to\psi)\&\varphi)\to(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\&(\varphi\rightsquigarrow\psi))\to(\varphi\wedge\psi)$;

($\underline{A}$4b) $(\varphi \wedge\psi)\to\varphi$;

($\underline{A}$4c) $(\varphi \wedge\psi)\to(\psi\wedge\varphi)$;

($\underline{A}$5) $(\varphi \to(\psi \to\chi))\leftrightarrow((\varphi \&\psi)\to\chi)$, $(\varphi\rightsquigarrow(\psi\rightsquigarrow\chi))\leftrightarrow((\psi\&\varphi)\rightsquigarrow\chi)$;

($\underline{A}6$) $((\varphi \to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\to\chi)$, $((\varphi\rightsquigarrow\psi)\rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow(((\psi\rightsquigarrow\varphi)\rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow\chi)$;
($\underline{A}7$) $\bar{0} \to\varphi$;
($\underline{A}8$) $(\varphi \vee\psi)\leftrightarrow(((\varphi\rightsquigarrow\psi)\to\psi)\wedge((\psi\rightsquigarrow\varphi)\to\varphi))\leftrightarrow(((\varphi\to\psi)\rightsquigarrow\psi)\wedge((\psi\to\varphi)\rightsquigarrow\varphi))$.

推理规则

MP 规则：从 $\varphi, \varphi \to\psi$ 推得 ψ；从 $\varphi, \varphi \rightsquigarrow\psi$ 推得 ψ.

蕴涵规则 (Imp 规则)：从 $\varphi \to\psi$ 推得 $\varphi \rightsquigarrow\psi$；从 $\varphi \rightsquigarrow\psi$ 推得 $\varphi \to\psi$.

其中, $\varphi \leftrightarrow\psi$ 是 $(\varphi\to\psi)\&(\psi \to\varphi)$ 的简写.

定义 6.2.10[72] 在系统 psMTL 中添加以下公理所得的系统称为 psMTL^{r}:

(R1) $(\psi\to\varphi)\vee(\chi\rightsquigarrow((\varphi \to\psi)\&\chi))$;

(R2) $(\psi\rightsquigarrow\varphi)\vee(\chi\to(\chi\&(\varphi\rightsquigarrow\psi)))$.

定理 6.2.10(psMTL^{r}的完备性定理)[72] 在 psMTL^{r} 系统中, 关于公式 φ 的下列条件等价:

(1) φ 在系统 psMTL^{r} 中是可证的;

(2) 对任意 $psMTL^{r}$–代数 A, φ 是 A–重言式;

(3) 对任意 $psMTL^{r}$–链 (即线性序 $psMTL^{r}$–代数)A, φ 是 A–重言式.

定理 6.2.11 (psMTL^{r}的标准完备性定理)[74] 系统 psMTL^{r} 关于标准 $psMTL^{r}$– 代数 (即 [0, 1] 上的 $psMTL^{r}$–代数) 类是完备的, 即对任意公式 φ, 如果 φ 在系统 psMTL^{r} 中不是可证的, 则存在左连续伪 t–模 $\otimes$ 及到 $([0, 1]; \otimes, \to, \rightsquigarrow, \leqslant, 0, 1)$ 上 (这里的 $\to, \rightsquigarrow$ 是与伪 t–模 $\otimes$ 相伴的 1 剩余和 2 剩余) 的赋值 e 使得 $e(\varphi)\neq1$.

前述非可换逻辑系统及相关代数结构之间的关系可用图 6.1 表示.

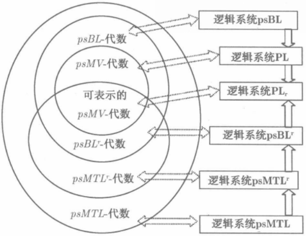


图 6.1 若干非可换模糊逻辑及其代数结构之间的关系

6.3 基于伪 $R_0\,t$–模的非可换模糊逻辑系统$\mathbf{PL}^*$

本节介绍作者在文献 [154] 中提出的非可换模糊逻辑系统 $\mathbf{PL}^*$, 它基于伪 $R_0\,t$–模且具有良好的应用背景和整齐的结构特性, 可看成命题演算系统 $\mathscr{L}^*$ 的非可换拓广. 本节第 1 部分在吸收文献 [43] 思想的基础上, 给出系统 $\mathbf{PL}^*$ 的定义, 并得到一个简洁的等价形式, 讨论了它与其他非可换模糊逻辑系统的关系; 第 2 部分证明了系统 $\mathbf{PL}^*$ 中可证等价关系是同余关系, 研究了其商代数结构, 并由此引入 PL^*–代数 (它是弱 R_0–代数、$IMTL$–代数的非可换推广) 的概念, 证明了 $\mathbf{PL}^*$ 的可靠性定理; 第 3 部分研究了 PL^*–代数的滤子理论, 证明了 PL^*–代数的正规素滤子定理 (其中起重要作用的是正规滤子的充要条件, 它不同于 $psBL$–代数正规滤子的相应结论), 由此证明了系统 $\mathbf{PL}^*$ 的完备性定理, 最后还说明了伪 R_0t–模的实际意义及逻辑系统 $\mathbf{PL}^*$ 可能的应用方向.

6.3.1 逻辑系统 PL* 及其等价形式

定义 6.3.1 设 S 是原子命题集, $\wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow$ 是四个命题联结词, θ 为真值常量, $F(S)$ 是由 S 和 $\wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow, \theta$ 生成的公式集. 由以下公理及推理规则组成的逻辑系统称为 $\mathbf{PL}^*$:

公理

(PL1) $(A \to B) \to((B \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$, $(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow((B \rightsquigarrow C) \to (A \rightsquigarrow C))$;

(PL2) $(A \wedge B) \to A$, $(A \wedge B) \rightsquigarrow A$;

(PL3) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$, $(A \wedge B) \rightsquigarrow (B \wedge A)$;

(PL4) $A \to((A \to B) \rightsquigarrow A \wedge B)$, $A \rightsquigarrow((A \rightsquigarrow B) \to A \wedge B)$;

(PL5) $((A \to B) \to C) \to(((B \to A) \to C) \to C)$,
$((A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow(((B \rightsquigarrow A) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow C)$;

(PL6) $((\sim A) \to (\sim B))\to (B \rightsquigarrow A)$, $((-A) \rightsquigarrow (-B))\rightsquigarrow (B \to A)$;

(PL7) $(A \vee B) \leftrightarrow(((A \to B) \rightsquigarrow B)\wedge((B \to A) \rightsquigarrow A))$,
$(A \vee B) \leftrightarrow(((A \rightsquigarrow B) \to B)\wedge((B \rightsquigarrow A) \to A))$;

(PL8) $A\&B \to (-(B \rightsquigarrow (\sim A)))$, $(-(A \rightsquigarrow (\sim B)))\rightsquigarrow B\&A$;

(PL9) $(A \to B) \vee (C \rightsquigarrow((B \to A)\&C))$, $(A \rightsquigarrow B) \vee (C \to (C\&(B \rightsquigarrow A)))$.

这里, $(-A)$ 是 $A \to\theta$ 的简写, $(\sim A)$ 是 $A \rightsquigarrow\theta$ 的简写, $A \leftrightarrow B$ 是 $(A \to B)\&(B \to A)$ 的简写, $A\&B$ 是 $\sim (A \to (-B))$ 的简写.

推理规则

MP 规则 (分离规则): 由 A 和 $A \to B$ 推得 B, 由 A 和 $A \rightsquigarrow B$ 推得 B.

Imp 规则 (蕴涵规则): 由 $A \to B$ 推得 $A \rightsquigarrow B$, 由 $A \rightsquigarrow B$ 推得 $A \to B$.

以下用符号 $\vdash A$ 表示 A 是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理, 用符号 $\Gamma\vdash A$ 表示公式 A 可从公式集 Γ 推出.

引理 6.3.1(HS 规则) 若 $\Gamma=\{A\to B, B\to C\}$, 则 $\Gamma\vdash (A\to C)$. 类似地, 若 $\Gamma=\{A\rightsquigarrow B, B\rightsquigarrow C\}$, 则 $\Gamma\vdash(A\rightsquigarrow C)$.

证明 只证前半部分 (以后类似, 将不再每次声明).

(1) $A\to B$ (已知)

(2) $(A\to B)\to((B\to C)\rightsquigarrow(A\to C))$ (由 (PL1))

(3) $(B\to C)\rightsquigarrow(A\to C)$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $(B\to C)\to(A\to C)$ (由 (3), Imp 规则)

(5) $B\to C$ (已知)

(6) $A\to C$ (由 (5), (4), MP 规则)

由公理 (PL1) 易证如下结论:

命题 6.3.1 以下公式是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理:

(T1) $(A\to B)\to((-B)\rightsquigarrow(-A))$, $(A\rightsquigarrow B)\rightsquigarrow((\sim B)\to(\sim A))$.

引理 6.3.2 若 $\Gamma=\{A\to(B\rightsquigarrow C), C\rightsquigarrow D\}$, 则 $\Gamma\vdash A\to(B\rightsquigarrow D)$. 类似地, 若 $\Gamma=\{A\rightsquigarrow(B\to C), C\to D\}$, 则 $\Gamma\vdash A\rightsquigarrow(B\to D)$.

证明 (1) $A\to(B\rightsquigarrow C)$ (已知)

(2) $(B\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((\sim C)\to(\sim B))$ (由 (T1))

(3) $C\rightsquigarrow D$ (已知)

(4) $(C\rightsquigarrow D)\rightsquigarrow((\sim D)\to(\sim C))$ (由 (T1))

(5) $(\sim D)\to(\sim C)$ (由 (3), (4), MP 规则)

(6) $((\sim D)\to(\sim C))\to(((\sim C)\to(\sim B))\rightsquigarrow((\sim D)\to(\sim B)))$

(由 (PL1))

(7) $((\sim C)\to(\sim B))\rightsquigarrow((\sim D)\to(\sim B))$ (由 (5), (6), MP 规则)

(8) $(B\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((\sim D)\to(\sim B))$ (由 (2), (7), HS 规则)

(9) $(B\rightsquigarrow C)\to((\sim D)\to(\sim B))$ (由 (8), Imp 规则)

(10) $((\sim D)\to(\sim B))\to(B\rightsquigarrow D)$ (由 PL6)

(11) $(B\rightsquigarrow C)\to(B\rightsquigarrow D)$ (由 (9), (10), HS 规则)

(12) $A\to(B\rightsquigarrow D)$ (由 (1), (11), HS 规则)

定理 6.3.1 以下公式是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理:

(T2) $A\to((A\to B)\rightsquigarrow A)$, $A\rightsquigarrow((A\rightsquigarrow B)\to A)$;

(T3) $A\to((A\to B)\rightsquigarrow B)$, $A\rightsquigarrow((A\rightsquigarrow B)\to B)$;

(T4) $(A\to(B\rightsquigarrow C))\to(B\rightsquigarrow(A\to C))$, $(A\rightsquigarrow(B\to C))\rightsquigarrow(B\to(A\rightsquigarrow C))$;

(T5) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$, $(B\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((A\rightsquigarrow B)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow C))$;

(T6) $A \to A$, $A \rightsquigarrow A$;

(T7) $A \to (\sim -A)$, $A \rightsquigarrow (- \sim A)$;

(T8) $(- \sim A) \rightsquigarrow A$, $(\sim -A) \to A$;

(T9) $(A \to (\sim B)) \to (B \rightsquigarrow (-A))$, $(A \rightsquigarrow (-B)) \rightsquigarrow (B \to (\sim A))$;

(T10) $((\sim A) \to B) \to ((-B) \rightsquigarrow A)$, $((-A) \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow ((\sim B) \to A)$;

(T11) I, 这里 I 是 $\theta \to \theta$ 的缩写

(T12) $(I \to A) \rightsquigarrow A$, $(I \rightsquigarrow A) \to A$;

(T13) $A \to (I \rightsquigarrow A)$, $A \rightsquigarrow (I \to A)$;

(T14) $A \to I$, $A \rightsquigarrow I$;

(T15) $\theta \to A$, $\theta \rightsquigarrow A$;

(T16) $(-A) \to (A \to B)$, $(\sim A) \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow B)$;

(T17) $A \to (B \to A)$, $A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow A)$.

证明 由 (PL4) 及 (PL2), 应用引理 6.3.2 即得 (T2); 由 (PL4), (PL3) 及 (PL2), 应用引理 6.3.2 即得 (T3).

(T4) 的证明如下:

(1) $(A \to (B \rightsquigarrow C)) \to (((B \rightsquigarrow C) \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (PL1))

(2) $B \rightsquigarrow ((B \rightsquigarrow C) \to C)$, (由 (T3))

(3) $(((B \rightsquigarrow C) \to C) \rightsquigarrow (A \to C)) \to (B \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (2), (PL1), MP 规则)

(4) $(A \to (B \rightsquigarrow C)) \to (B \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (1), (3), HS 规则)

(T5) 的证明如下:

(1) $(A \to B) \to ((B \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (PL1))

(2) $(B \to C) \rightsquigarrow ((A \to B) \to (A \to C))$ (由 (1), T4, MP 规则)

(3) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (由 (2), Imp 规则)

(T6) 的证明如下:

(1) $(A \to \theta) \to ((-\theta) \rightsquigarrow (-A))$ (由 (T1))

(2) $((-\theta) \rightsquigarrow (-A)) \rightsquigarrow (A \to \theta)$ (由 (PL6))

(3) $((-\theta) \rightsquigarrow (-A)) \to (A \to \theta)$ (由 (2), Imp 规则)

(4) $(A \to \theta) \to (A \to \theta)$ (由 (1), (3), HS 规则)

(5) $(-A) \to (-A)$ (公式 (4) 的简写)

(6) $(-A) \rightsquigarrow (-A)$ (由 (5), Imp 规则)

(7) $((-A) \rightsquigarrow (-A)) \rightsquigarrow (A \to A)$, (由 (PL6))

(8) $A \to A$ (由 (6), (7), MP 规则)

(T7) 的证明如下:

(1) $(A \to \theta) \rightsquigarrow (A \to \theta)$ (由 (T6))

(2) $A \to ((A \to \theta) \rightsquigarrow \theta)$　(由 (1), (T4), MP 规则)

(3) $A \to (\sim -A)$　(公式 (2) 的简写)

(T8) 的证明如下:

(1) $(\sim A) \to (\sim - \sim A)$　(由 (T7))

(2) $((\sim A) \to (\sim - \sim A)) \to ((- \sim A) \rightsquigarrow A)$　(由 (PL6))

(3) $(- \sim A) \rightsquigarrow A$　(由 (1), (3), MP 规则)

在 (T4) 中取 $C=\theta$ 即得 (T9).

(T10) 的证明如下:

(1) $B \to (\sim -B)$　(由 (T7))

(2) $((\sim A) \to B) \to ((\sim A) \to (\sim -B))$　(由 (1), (T5), MP 规则)

(3) $((\sim A) \to (\sim -B)) \to ((-B) \rightsquigarrow A)$　(由 (PL6))

(4) $((\sim A) \to B) \to ((-B) \rightsquigarrow A)$　(由 (2), (3), HS 规则)

由 (T6) 即得 (T11).

(T12) 的证明如下:

(1) $(I \to A) \rightsquigarrow (I \to A)$　(由 (T6))

(2) $I \to ((I \to A) \rightsquigarrow A)$　(由 (1), (T4), MP 规则)

(3) $(I \to A) \rightsquigarrow A$　(由 (T11), (2), MP 规则)

(T13) 的证明如下:

(1) $(\sim A \to \theta) \to ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (\sim A \to \theta))$　(由 (PL1))

(2) $A \rightsquigarrow (- \sim A)$　(由 (T7))

(3) $A \to (- \sim A)$　(由 (2), Imp 规则)

(4) $A \to (\sim A \to \theta)$　(公式 (3) 的另一写法)

(5) $A \to ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (\sim A \to \theta))$　(由 (4),(1), HS 规则)

(6) $(- \sim A) \rightsquigarrow A$　(由 (T8))

(7) $((- \sim A) \rightsquigarrow A) \rightsquigarrow (((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (- \sim A)) \rightsquigarrow ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow A))$

　(由 (T5))

(8) $((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (- \sim A)) \rightsquigarrow ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow A)$　(由 (6), (7), MP 规则)

(9) $((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (- \sim A)) \to ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow A)$　(由 (8), Imp 规则)

(10) $((\theta \to \theta) \rightsquigarrow (\sim A \to \theta)) \to ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow A)$　(公式 (9) 的另一写法)

(11) $A \to ((\theta \to \theta) \rightsquigarrow A)$　(由 (5),(10), HS 规则)

(12) $A \to (I \rightsquigarrow A)$　(公式 (11) 的简写)

(T14) 的证明如下:

(1) $I \rightsquigarrow ((I \rightsquigarrow A) \to I)$　(由 (T3))

(2) $A \to (I \rightsquigarrow A)$　(由 (T13))

(3) $((I \rightsquigarrow A) \to I) \rightsquigarrow (A \to I)$　(由 (2), (PL1), MP 规则)

(4) $I \rightsquigarrow (A \to I)$　　(由 (1), (3), HS 规则)
(5) $A \to I$　　(由 (4), (T11), MP 规则)

(T15) 的证明如下:
(1) $(-A) \rightsquigarrow I$　　(由 (T14))
(2) $(-A) \rightsquigarrow (\theta \to \theta)$　　(公式 (1) 的另一写法)
(3) $(-A) \rightsquigarrow (-\theta)$　　(公式 (2) 的另一写法)
(4) $((-A) \rightsquigarrow (-\theta)) \rightsquigarrow (\theta \to A)$　　(由 (PL6))
(5) $\theta \to A$　　(由 (3), (4), MP 规则)

(T16) 的证明如下:
(1) $\theta \to B$　　(由 (T15))
(2) $(\theta \to B) \to ((A \to \theta) \to (A \to B))$　　(由 (T5))
(3) $(A \to \theta) \to (A \to B)$　　(由 (1), (2), MP 规则)
(4) $(-A) \to (A \to B)$　　(公式 (3) 的简写)

(T17) 的证明如下:
(1) $(-A) \to (A \to (-B))$　　(由 (T16))
(2) $(-A) \rightsquigarrow (A \to (-B))$　　(由 (1), Imp 规则)
(3) $A \to ((-A) \rightsquigarrow (-B))$　　(由 (2), (T4), MP 规则)
(4) $((-A) \rightsquigarrow (-B)) \rightsquigarrow (B \to A)$　　(由 (PL6))
(5) $((-A) \rightsquigarrow (-B)) \to (B \to A)$　　(由 (4), Imp 规则)
(6) $A \to (B \to A)$　　(由 (3), (5), HS 规则)

定理 6.3.2　以下公式是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理:

(T18) $A\&B \to B$, $A\&B \rightsquigarrow B$;
(T19) $A\&B \to A$, $A\&B \rightsquigarrow A$;
(T20) $(A \to (B \to C)) \to (A\&B \to C)$, $(A \to (B \to C)) \rightsquigarrow (A\&B \to C)$;
(T21) $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \rightsquigarrow (B\&A \rightsquigarrow C)$, $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \to (B\&A \rightsquigarrow C)$;
(T22) $(A\&B \to C) \to (A \to (B \to C))$, $(A\&B \to C) \rightsquigarrow (A \to (B \to C))$;
(T23) $(B\&A \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C))$, $(B\&A \rightsquigarrow C) \to (A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C))$.

证明　由 Imp 规则, 只需证明 (T18)~(T23) 中每一个的前半部分.

(T18) 的证明如下:
(1) $(-B) \to (A \to (-B))$　　(由 (T17))
(2) $(-B) \rightsquigarrow (A \to (-B))$　　(由 (1), Imp 规则)
(3) $((-B) \rightsquigarrow (A \to (-B))) \rightsquigarrow (\sim (A \to (-B)) \to B)$　　(由 (T10))
(4) $\sim (A \to (-B)) \to B$　　(由 (2), (3), MP 规则)
(5) $A\&B \to B$　　(公式 (4) 的简写)

(T19) 的证明如下:
(1) $A \to (B \to A)$　　(由 (T17))

(2) $(B \to A) \to ((-A) \rightsquigarrow (-B))$ (由 (T1))

(3) $A \to ((-A) \rightsquigarrow (-B))$ (由 (1), (3), MP 规则)

(4) $(-A) \rightsquigarrow (A \to (-B))$ (由 (3), (T4), MP 规则)

(5) $((-A) \rightsquigarrow (A \to (-B))) \rightsquigarrow (\sim (A \to (-B)) \to A)$ (由 (T10))

(6) $\sim (A \to (-B)) \to A$ (由 (4), (5), MP 规则)

(7) $A\&B \to A$ (公式 (6) 的简写)

(T20) 的证明如下:

(1) $(B \to C) \to ((-C) \rightsquigarrow (-B))$ (由 (T1))

(2) $(A \to (B \to C)) \to (A \to ((-C) \rightsquigarrow (-B)))$ (由 (1), (T5), MP 规则)

(3) $(A \to ((-C) \rightsquigarrow (-B))) \to ((-C) \rightsquigarrow (A \to (-B)))$ (由 (T4))

(4) $(A \to (B \to C)) \to ((-C) \rightsquigarrow (A \to (-B)))$ (由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((-C) \rightsquigarrow (A \to (-B))) \rightsquigarrow (\sim (A \to (-B)) \to C)$ (由 (T10))

(6) $((-C) \rightsquigarrow (A \to (-B))) \to (\sim (A \to (-B)) \to C)$ (由 (5), Imp 规则)

(7) $(A \to (B \to C)) \to (\sim (A \to (-B)) \to C)$ (由 (4), (6), HS 规则)

(8) $(A \to (B \to C)) \to (A\&B \to C)$ (公式 (7) 的简写)

(T21) 的证明如下:

(1) $(B \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow ((\sim C) \to (\sim B))$ (由 (T1))

(2) $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow ((\sim C) \to (\sim B)))$ (由 (1), (T5), MP 规则)

(3) $(A \rightsquigarrow ((\sim C) \to (\sim B))) \rightsquigarrow ((\sim C) \to (A \rightsquigarrow (\sim B)))$ (由 (T4))

(4) $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \rightsquigarrow ((\sim C) \to (A \rightsquigarrow (\sim B)))$ (由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((\sim C) \to (A \rightsquigarrow (\sim B))) \to (-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C)$ (由 (T10))

(6) $((\sim C) \to (A \rightsquigarrow (\sim B))) \rightsquigarrow (-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C)$ (由 (5), Imp 规则)

(7) $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \rightsquigarrow (-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C)$ (由 (4), (6), HS 规则)

(8) $B\&A \to (-(A \rightsquigarrow (\sim B)))$ (由 (PL7))

(9) $B\&A \rightsquigarrow (-(A \rightsquigarrow (\sim B)))$ (由 (8), Imp 规则)

(10) $(B\&A \rightsquigarrow (-(A \rightsquigarrow (\sim B)))) \rightsquigarrow ((-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C) \to (B\&A \rightsquigarrow C))$

(由 (PL1))

(11) $(-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C) \to (B\&A \rightsquigarrow C)$ (由 (9), (10), MP 规则)

(12) $(-(A \rightsquigarrow (\sim B)) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow (B\&A \rightsquigarrow C)$ (由 (11), Imp 规则)

(13) $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \rightsquigarrow (B\&A \rightsquigarrow C)$ (由 (7), (12), HS 规则)

(T22) 的证明如下:

(1) $(\sim(A\to(-B))\to C)\to((-C)\rightsquigarrow(A\to(-B)))$　　(由 (T10))
(2) $((-C)\rightsquigarrow(A\to(-B)))\rightsquigarrow(A\to((-C)\rightsquigarrow(-B)))$　　(由 (T4))
(3) $((-C)\rightsquigarrow(A\to(-B)))\to(A\to((-C)\rightsquigarrow(-B)))$　　(由 (2), Imp 规则)
(4) $(\sim(A\to(-B))\to C)\to(A\to((-C)\rightsquigarrow(-B)))$　　(由 (1), (3), HS 规则)
(5) $((-C)\rightsquigarrow(-B))\rightsquigarrow(B\to C)$　　(由 (PL6))
(6) $((-C)\rightsquigarrow(-B))\to(B\to C)$　　(由 (5), Imp 规则)
(7) $(A\to((-C)\rightsquigarrow(-B)))\to(A\to(B\to C))$　　(由 (6), (T5), MP 规则)
(8) $(\sim(A\to(-B))\to C)\to(A\to(B\to C))$　　(由 (4), (7), HS 规则)
(9) $(A\&B\to C)\to(A\to(B\to C))$　　(公式 (8) 的简写)

(T23) 的证明如下:

(1) $(-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((\sim C)\to(A\rightsquigarrow(\sim B)))$　　(由 (T10))
(2) $((\sim C)\to(A\rightsquigarrow(\sim B)))\to(A\rightsquigarrow((\sim C)\to(\sim B)))$　　(由 (T4))
(3) $((\sim C)\to(A\rightsquigarrow(\sim B)))\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow((\sim C)\to(\sim B)))$　　(由 (2), Imp 规则)
(4) $(-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow((\sim C)\to(\sim B)))$　　(由 (1), (3), HS 规则)
(5) $((\sim C)\to(\sim B))\to(B\rightsquigarrow C)$　　(由 (PL6))
(6) $((\sim C)\to(\sim B))\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C)$　　(由 (5), Imp 规则)
(7) $(A\rightsquigarrow((\sim C)\to(\sim B)))\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C))$　　(由 (6), (T5), MP 规则)
(8) $(-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C))$　　(由 (4), (7), HS 规则)
(9) $(-(A\rightsquigarrow(\sim B)))\to B\&A$　　(由 (PL7))
(10) $(-(A\rightsquigarrow(\sim B)))\rightsquigarrow B\&A$　　(由 (9), Imp 规则)
(11) $(B\&A\rightsquigarrow C)\to(-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)$　　(由 (10), (PL1), MP 规则)
(12) $(B\&A\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)$　　(由 (11), Imp 规则)
(13) $((-(A\rightsquigarrow(\sim B))\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C)))\to((B\&A\rightsquigarrow C)$
$\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C)))$　　(由 (12), (PL1), MP 规则)
(14) $(B\&A\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\rightsquigarrow C))$　　(由 (8),(13),MP 规则)

定理 6.3.3　以下公式是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理:

(T24) $((A\to B)\&A)\to(A\wedge B)$;

(T25) $(A\&(A\rightsquigarrow B))\to(A\wedge B)$.

证明　(T24) 的证明如下:

(1) $A\to((A\to B)\rightsquigarrow A\wedge B)$　　(由 (PL4))
(2) $A\rightsquigarrow((A\to B)\rightsquigarrow A\wedge B)$　　(由 (1), Imp 规则)
(3) $((A\to B)\&A)\rightsquigarrow(A\wedge B)$　　(由 (2), (T21), MP 规则)
(4) $((A\to B)\&A)\to(A\wedge B)$　　(由 (3), Imp 规则)

(T25) 的证明如下:

(1) $A \rightsquigarrow ((A \rightsquigarrow B) \to A \wedge B)$ (由 (PL4))

(2) $A \to ((A \rightsquigarrow B) \to A \wedge B)$ (由 (1), Imp 规则)

(3) $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \to (A \wedge B)$ (由 (2), (T20), MP 规则)

应用以上结果, 容易证明以下结论成立, 它给出系统 $\mathbf{PL}^*$ 的一个等价形式:

定理 6.3.4 设 S 是原子命题集, &, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\rightsquigarrow$ 是五个命题联结词, θ 为真值常量, $F(S)$ 是由 S 和&, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\rightsquigarrow$, θ 生成的公式集. 由以下公理及推理规则组成的逻辑系统与系统 $\mathbf{PL}^*$ 等价:

公理

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, $(B \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow ((A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow C))$;

(2) $A\&B \to A$;

(3) $A\&B \to B$;

(4) $((A \to B)\&A) \to (A \wedge B)$, $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \to (A \wedge B)$;

(5) $(A \wedge B) \to A$;

(6) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$;

(7) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A\&B \to C)$, $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \leftrightarrow (B\&A \rightsquigarrow C)$;

(8) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$,

$((A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow (((B \rightsquigarrow A) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow C)$;

(9) $(A \vee B) \leftrightarrow (((A \to B) \rightsquigarrow B) \wedge ((B \to A) \rightsquigarrow A))$,

$(A \vee B) \leftrightarrow (((A \rightsquigarrow B) \to B) \wedge ((B \rightsquigarrow A) \to A))$;

(10) $(- \sim A) \leftrightarrow A$, $(\sim -A) \leftrightarrow A$;

(11) $(A \to B) \vee (C \rightsquigarrow ((B \to A)\&C))$, $(A \rightsquigarrow B) \vee (C \to (C\&(B \rightsquigarrow A)))$;

(12) $\theta \to A$,

其中, $(-A)$ 是 $A \to \theta$ 的简写, $(\sim A)$ 是 $A \rightsquigarrow \theta$ 的简写, $A \leftrightarrow B$ 是 $(A \to B)\&(B \to A)$ 的简写.

推理规则

MP 规则 (分离规则): 由 A 和 $A \to B$ 推得 B, 由 A 和 $A \rightsquigarrow B$ 推得 B.

Imp 规则 (蕴涵规则): 由 $A \to B$ 推得 $A \rightsquigarrow B$, 由 $A \rightsquigarrow B$ 推得 $A \to B$.

注 6.3.1 由定理 6.3.4, 结合文献 [72] 中的定义知, 系统 $\mathbf{PL}^*$ 是非可换逻辑系统 **psMTL** 的扩张, 即具有对合否定 (对于非可换模糊逻辑, "对合" 实际是指 "伪对合", 即 $A^{-\sim} \approx A^{\sim -} \approx A$) 的$\mathbf{psMTL}^r$系统.

6.3.2 可证等价关系及系统 $\mathbf{PL}^*$ 的可靠性

定义 6.3.2 设 $A, B \in F(S)$, 如果 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \approx B$.

容易证明, 可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系.

注 6.3.2　(1) 由于有 Imp 推理规则, 故$A \approx B$当且仅当$\vdash A \rightsquigarrow B$且$\vdash B \rightsquigarrow A$.

(2) 在定理 6.3.1 (T11) 中, 记 I 是 $\theta \to \theta$ 的缩写. 事实上, I 也可定义为 $\theta \rightsquigarrow \theta$, 因为 $\theta \to \theta \approx \theta \rightsquigarrow \theta$, 这可如下证明:

(i) $\theta \rightsquigarrow \theta$　(由 (T6))

(ii) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \to (I \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta))$　(由 (T13))

(iii) $I \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta)$　(由 (i), (ii), MP 规则)

(iv) $(\theta \to \theta) \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta)$　(公式 (iii) 的另一写法)

(v) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \rightsquigarrow I$　(由 (T14))

(vi) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \rightsquigarrow (\theta \to \theta)$　(公式 (v) 的另一写法)

(vii) $\theta \to \theta \approx \theta \rightsquigarrow \theta$　(由 (iv), (vi))

(3) $A\&B$ 可以用另一形式定义, 即 $-(B \rightsquigarrow (\sim A))$, 因为由 (PL8) 可得 $A\&B \approx (-(B \rightsquigarrow (\sim A)))$.

为了证明 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的同余关系, 需要以下结果.

定理 6.3.5　以下公式是系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理:

(T26) $((C \to A) \wedge (C \to B)) \to (C \to (A \wedge B))$,
$((C \rightsquigarrow A) \wedge (C \rightsquigarrow B)) \rightsquigarrow (C \rightsquigarrow (A \wedge B))$;

(T27) $((A \to B)\&A) \to B$, $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \rightsquigarrow B$;

(T28) $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$, $(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow ((C\&A) \rightsquigarrow (C\&B))$;

(T29) $A\&(B\&C) \to (A\&B)\&C$, $(A\&B)\&C \to A\&(B\&C)$;

(T30) $(A\&B) \to (A \wedge B)$;

(T31) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$,
$(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow ((A \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow (B \wedge C)))$;

(T32) $A \to (A \vee B)$, $B \to (A \vee B)$, $(A \vee B) \to (B \vee A)$;

(T33) $(A \to B) \vee (B \to A)$, $(A \rightsquigarrow B) \vee (B \rightsquigarrow A)$;

(T34) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,
$(A \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow ((B \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow ((A \vee B) \rightsquigarrow C))$.

证明　这里仅以每一个结论的前半部分为例给出证明过程.

(T26) 的证明如下:

(1) $((C \to A) \wedge (C \to B)) \to (C \to A)$　(由 (PL2))

(2) $(C \to A) \to ((A \to (A \wedge B)) \rightsquigarrow (C \to (A \wedge B)))$　(由 (PL1))

(3) $((C \to A) \wedge (C \to B)) \to ((A \to (A \wedge B)) \rightsquigarrow (C \to (A \wedge B)))$ (由 (1), (2), HS 规则)

(4) $(A \to (A \wedge B)) \rightsquigarrow (((C \to A) \wedge (C \to B)) \to (C \to (A \wedge B)))$ (由 (3), (T4), MP 规则)

(5) $(A \to (A \wedge B)) \to (((C \to A) \wedge (C \to B)) \to (C \to (A \wedge B)))$ (由 (4), Imp 规则)

(6) $A\to((A\to B)\rightsquigarrow(A\wedge B))$ (由 (PL4))

(7) $(A\to B)\rightsquigarrow(A\to(A\wedge B))$ (由 (6), (T4), MP 规则)

(8) $(A\to B)\to(A\to(A\wedge B))$ (由 (7), Imp 规则)

(9) $(A\to B)\to(((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B)))$ (由 (8), (5), HS 规则)

(10) $(B\to A)\to(((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B)))$ (类似 (9) 的证明)

(11) $((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$ (由 (9), (10), (PL5), MP)

(T27) 的证明如下：

(1) $((A\to B)\&A)\to A\wedge B$ (由 (T24))

(2) $(A\wedge B)\to(B\wedge A)$ (由 (PL3))

(3) $(B\wedge A)\to B$ (由 (PL2))

(4) $(A\wedge B)\to B$ (由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((A\to B)\&A)\to B$ (由 (1), (4), HS 规则)

(T28) 的证明如下：

(1) $B\&C\to B\&C$ (由 (T6))

(2) $(B\&C\to B\&C)\to(B\to(C\to(B\&C)))$ (由 (T22))

(3) $B\to(C\to(B\&C))$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $(B\to(C\to(B\&C)))\to((A\to B)\to(A\to(C\to(B\&C))))$ (由 (T5))

(5) $(A\to B)\to(A\to(C\to(B\&C)))$ (由 (3), (4), MP 规则)

(6) $(A\to(C\to(B\&C)))\to((A\&C)\to(B\&C))$ (由 (T20))

(7) $(A\to B)\to((A\&C)\to(B\&C))$ (由 (5), (6), HS 规则)

(T29) 的证明如下：

(1) $A\&(B\&C)\to A\&(B\&C)$ (由 (T6))

(2) $A\to(B\&C\to(A\&(B\&C)))$ (由 (1), (T22), MP 规则)

(3) $A\to(B\to(C\to(A\&(B\&C))))$ (由 (2), (T22), (T5), MP)

(4) $(A\&B)\to(C\to(A\&(B\&C)))$ (由 (3), (T20), MP 规则)

(5) $(A\&B)\&C\to(A\&(B\&C))$ (由 (4), (T20), MP 规则)

(T30) 的证明如下：

(1) $(A\&(A\rightsquigarrow B))\to(A\wedge B)$ (由 (T25))

(2) $B\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow B)$ (由 (T17))

(3) $(B\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow B))\rightsquigarrow((A\&B)\rightsquigarrow(A\&(A\rightsquigarrow B)))$ (由 (T28))

(4) $(A\&B)\rightsquigarrow(A\&(A\rightsquigarrow B))$ (由 (2), (3), MP 规则)

(5) $(A\&B)\to(A\&(A\rightsquigarrow B))$ (由 (4), Imp 规则)

(6) $(A\&B)\to(A\wedge B)$ (由 (5),(1), HS 规则)

(T31) 的证明如下：

(1) $((A\to B)\wedge(A\to C))\to(A\to(B\wedge C))$ (由 (T26))

(2) $((A\to B)\&(A\to C))\to((A\to B)\wedge(A\to C))$　(由 (T30))

(3) $((A\to B)\&(A\to C))\to(A\to(B\wedge C))$　(由 (2), (1), HS 规则)

(4) $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\wedge C)))$　(由 (3), (T22), MP 规则)

(T32) 的证明如下 (只证 $A\to(A\vee B)$):

(1) $(A\&(A\rightsquigarrow B))\rightsquigarrow B$　(由 (T27))

(2) $(A\&(A\rightsquigarrow B))\to B$　(由 (1), Imp 规则)

(3) $A\to((A\rightsquigarrow B)\to B)$　(由 (2), (T20), MP 规则)

(4) $A\to((B\rightsquigarrow A)\to A)$　(由 (T2), Imp 规则)

(5) $A\to(((A\rightsquigarrow B)\to B)\wedge((B\rightsquigarrow A)\to A))$　(由 (3), (4), (T31), MP)

(6) $A\to(A\vee B)$　(由 (5), (PL7), HS 规则)

(T33) 的证明如下:

(1) $(A\to B)\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (T32))

(2) $(B\to A)\to((B\to A)\vee(A\to B))$　(由 (T32))

(3) $((B\to A)\vee(A\to B))\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (T32))

(4) $(B\to A)\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((A\to B)\to((A\to B)\vee(B\to A)))\to(((B\to A)$
$\to((A\to B)\vee(B\to A)))\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (PL5))

(6) $(A\to B)\vee(B\to A)$　(由 (1), (4), (5), MP 规则)

(T34) 的证明如下:

(1) $(A\vee B)\to(((A\to B)\rightsquigarrow B)\wedge((B\to A)\rightsquigarrow A))$ (由 (PL7))

(2) $(((A\to B)\rightsquigarrow B)\wedge((B\to A)\rightsquigarrow A))\to((A\to B)\rightsquigarrow B)$ (由 (PL2))

(3) $(A\vee B)\to((A\to B)\rightsquigarrow B)$　(由 (1), (2), HS 规则)

(4) $(A\to B)\rightsquigarrow((A\vee B)\to B)$　(由 (3), (T4), MP 规则)

(5) $(A\to B)\to((A\vee B)\to B)$　(由 (4), Imp 规则)

(6) $((A\vee B)\to B)\to((B\to C)\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$ (由 (PL1))

(7) $(A\to B)\to((B\to C)\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$　(由 (5), (6), HS 规则)

(8) $(B\to C)\rightsquigarrow(((A\to B)\to(A\vee B)\to C))$　(由 (7), (T4), MP 规则)

(9) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow(B\to C)$　(由 (PL2))

(10) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\to B)\to((A\vee B)\to C))$ (由 (9), (8), HS 规则)

(11) $(A\to B)\to(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$(由 (10), (T4), MP 规则)

(12) $(A\to B)\rightsquigarrow(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$ (由 (11), Imp 规则)

(13) $(B\to A)\rightsquigarrow(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$ (类似于 (12) 的证明)

(14) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C)$　(由 (12), (13), (PL5), MP 规则)

(15) $((A\to C)\wedge(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$　(由 (14), Imp 规则)

(16) $((A\to C)\&(B\to C))\to((A\to C)\wedge(B\to C))$ (由 (T30))

(17) $((A\to C)\&(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$ (由 (16), (15), HS 规则)

(18) $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$ (由 (17),(T22),MP 规则)

定理 6.3.6 可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的 $(\&,\wedge,\vee,\to,\rightsquigarrow)$ 型同余关系, 即

(1) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\&C\approx B\&D$;

(2) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\wedge C\approx B\wedge D$;

(3) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\vee C\approx B\vee D$;

(4) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\to C\approx B\to D$, $A\rightsquigarrow C\approx B\rightsquigarrow D$.

证明 假设 $A\approx B$, $C\approx D$.

(1) 由 $A\to B$, 应用 (T28) 及 MP 规则可得 $A\&C\to B\&C$. 同理, 由 $C\rightsquigarrow D$ 可得 $B\&C\rightsquigarrow B\&D$, 进而得 $B\&C\to B\&D$(应用 Imp 规则). 于是, $A\&C\to B\&D$(应用 HS 规则). 类似地, 有 $B\&D\to A\&C$, 故 $A\&C\approx B\&D$.

(2) 由 $A\to B$(已知)、$A\wedge C\to A$ (应用 (PL2)) 及 MP 规则可得 $A\wedge C\to B$. 同理可得 $A\wedge C\to D$. 而由 (T31) 可得 $(A\wedge C\to B)\to((A\wedge C\to D)\to(A\wedge C\to B\wedge D))$, 应用 MP 规则即得 $A\wedge C\to B\wedge D$. 类似地, 有 $B\wedge D\to A\wedge C$, 故 $A\wedge C\approx B\wedge D$.

(3) 由 $A\to B$(已知)、$B\to B\vee D$ (应用 (T32)) 及 MP 规则可得 $A\to B\vee D$. 同理可得 $C\to B\vee D$. 而由 (T34) 可得 $(A\to(B\vee D))\to((C\to(B\vee D))\to(A\vee C\to B\vee D))$, 应用 MP 规则即得 $A\vee C\to B\vee D$. 类似地有 $B\vee D\to A\vee C$, 故 $A\vee C\approx B\vee D$.

(4) 由 $B\to A$(已知)、$(B\to A)\to((A\to C)\rightsquigarrow(B\to C))$ (应用 (PL1)) 及 MP 规则可得 $(A\to C)\rightsquigarrow(B\to C)$, 进而有 $(A\to C)\to(B\to C)$. 又由 $B\to A$(已知)、$(C\to D)\to((B\to C)\to(B\to D))$ (应用 (T5)) 及 MP 规则可得 $(B\to C)\to(B\to D)$. 于是, $(A\to C)\to(B\to D)$. 同理可证 $(B\to D)\to(A\to C)$, 故 $A\to C\approx B\to D$. 类似地有 $A\rightsquigarrow C\approx B\rightsquigarrow D$.

根据上述结论, $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成 $(\&,\wedge,\vee,\to,\rightsquigarrow)$ 型商代数 $F(S)/\approx$, 以下记为 [F]. 依据 [F] 的代数性质, 引入 PL^*–代数的概念.

定义 6.3.3 代数结构 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 称为是 PL^*–代数, 如果

(A1) $(L;\wedge,\vee,0,1)$ 是有界格 (相应的序为 $\leqslant$), 这里 0、1 分别是最小元、最大元;

(A2) $(L;\otimes,1)$ 是独异点, 即 $\otimes$ 满足结合律且对任意 $x\in L$ 有 $x\otimes 1=1\otimes x=x$;

(A3) $x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\to z$ 当且仅当 $y\leqslant x\rightsquigarrow z$;

(A4) $(x\to y)\vee(y\to x)=1=(x\rightsquigarrow y)\vee(y\rightsquigarrow x)$;

(A5) $x^{-\sim}=x^{\sim-}=x$;

(A6) $(x\to y)\vee(z\rightsquigarrow((y\to x)\otimes z))=1$, $(x\rightsquigarrow y)\vee(z\to(z\otimes(y\rightsquigarrow x)))=1$,

其中 $x^-=x\to 0$, $x^\sim=x\rightsquigarrow 0$.

注 6.3.3 容易证明 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的商代数 [F] 是一个 PL^*–代数. 由定义 6.2.3 知 PL^*–代数一定是 $psMTL$–代数 (注意, 文献 [88] 指出,

定义 6.2.3 中条件 (C4′) 可由其余条件推出, 即 (C4′) 在 PL^*–代数中也成立), 因此 $psMTL$–代数的所有性质在 PL^*–代数中都成立.

定义 6.3.4　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是 PL^*–代数, 从 $F(S)$ 到 L 的 $(\wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow)$ 型同态称为系统 PL^* 在 L 上的一个 PR 赋值.

由定理 2.3.5, 定理 2.3.6 知, 如下定义的 v: $F(S) \to[0,1]$ 是系统 $\mathbf{PL}^*$ 在 $[0, 1]$ 上的一个 PR 赋值

(i) $v(A\&B) = \begin{cases} v(A) \wedge v(B), & f_1(v(A)) + f_2(v(B)) > 1, \\ 0, & f_1(v(A)) + f_2(v(B)) \leqslant 1, \end{cases}$

其中, f_1 和 f_2 是 $[0,1]$ 上两个递增连续函数, 且 $f_1(1)=f_2(1)=1, f_1(0)=f_2(0)=0$.

(ii) $v(A \wedge B)=\min\{v(A),v(B)\}$.

(iii) $v(A \vee B)=\max\{v(A),v(B)\}$.

(iv) $v(A \to B) = \begin{cases} 1, & v(A) \leqslant v(B), \\ v(B) \vee f_1^{-1}(1 - f_2(v(A))), & v(A) > v(B). \end{cases}$

(v) $v(A \rightsquigarrow B) = \begin{cases} 1, & v(A) \leqslant v(B), \\ v(B) \vee f_2^{-1}(1 - f_1(v(A))), & v(A) > v(B). \end{cases}$

用 $\Omega(L)$ 表示 $F(S)$ 在 L 上的全体 PR 赋值之集.

定义 6.3.5　设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v \in \Omega(L)$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为 L–重言式 (永真式), 记为 $\vDash_L A$.

容易证明以下定理, 这表明系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的语构关于语义 $\Omega(L)$ 是可靠的.

定理 6.3.7(可靠性定理)　系统 $\mathbf{PL}^*$ 中的定理一定是 L–重言式, 即若 $A \in F(S)$ 且 $\vdash A$, 则 $\vDash_L A$. 这里 L 是任意确定的 PL^*–代数.

证明　只需证明 $\mathbf{PL}^*$ 中的公理 (PL1)~(PL9) 都是重言式, 并且 $\mathbf{PL}^*$ 中的 MP 推理规则、Imp 规则保持重言式.

由于PL^*–代数一定是 $psMTL$–代数, 故由定理 2.3.5, 定理 2.3.6, 定理 6.2.4~6.2.6 易知 (PL1)~(PL9) 都是重言式, 其中, (PL7) 是重言式可由定理 6.2.6 (29, 30) 得到. 下证推理规则保持重言式. 设 A, $A \to B$ 是重言式, 则 $v(A)=1$, $v(A \to B)=1$. 从而 $v(B) = v(A) \to v(B) = v(A \to B)=1$, 即 B 为重言式, 这说明 MP 推理规则保持重言式. 又设 $A \to B$ 是重言式, 则对任意赋值 v 均有 $v(A \to B)=1$, 从而 $v(A) \to v(B)=1$. 由定理 6.2.3 (4), $v(A) \rightsquigarrow v(B)=1$. 进而有 $v(A \rightsquigarrow B)=1$, 所以 $A \rightsquigarrow B$ 为重言式, 即 Imp 规则保持重言式.

6.3.3　PL^*–代数的正规素滤子定理

本节研究 PL^*–代数的滤子理论, 它是 $psBL$–代数滤子理论 (参见文献 [77], [78]) 的拓展; 同时, 本节的一些内容也是捷克学者 Kuhr 在文献 [242] 中所得结果的推广. 需要特别指出的是本节的结论表明 PL^*–代数的滤子与 $psBL$–代数的滤子有很

大的不同, 这集中表现在“正规滤子”方面, 因为我们给出了 PL^*–代数正规滤子的充要条件, 它不同于 $psBL$–代数的相关结论. 另外, 本节证明了 PL^*–代数的正规素滤子定理, 而对于 $psBL$–代数来说, 相应的命题不成立.

由于 PL^*–代数是特殊的剩余格, 故其滤子、正规滤子的概念仍沿用 2.4 节的定义. 同时, 容易证明以下结论.

命题 6.3.2　设 H 是 PL^*–代数 L 的正规滤子, 则

(1) $x^- \in H$ 当且仅当 $x^\sim \in H$;

(2) $x \in H$ 蕴涵 $x^{--} \in H$, $x^{\sim\sim} \in H$.

命题 6.3.3　设 H 是 PL^*–代数 L 的正规滤子, 则以下结论成立:

(NF1) 对任意 $y \in x \otimes H = \{x \otimes h | h \in H\}$, 存在 $z \in H \otimes x = \{h \otimes x | h \in H\}$使得 $y \geqslant z$;

(NF2) 对任意 $y \in H \otimes x = \{h \otimes x | h \in H\}$, 存在 $z \in x \otimes H = \{x \otimes h | h \in H\}$使得 $y \geqslant z$.

证明　仅证 (NF1) 成立. 对任意 $y \in x \otimes H$, 则有 $x \in L, h \in H$ 满足 $y = x \otimes h$. 由 $h \leqslant 1 = x \rightsquigarrow x$, 应用定义 6.3.3 (A3) 得 $x \leqslant h \to x$, $x \otimes h \leqslant x$, 即 $y \leqslant x$. 于是由定义 6.2.3 (C4′) 及注 6.3.3, $y = x \wedge y \geqslant (x \to y) \otimes x$. 记 $z = (x \to y) \otimes x$, 因为

$$
\begin{aligned}
h \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) &= (x \otimes h) \rightsquigarrow y \qquad \text{(由定理 6.2.4 (20))}\\
&= (x \otimes h) \rightsquigarrow (x \otimes h) = 1 \in H
\end{aligned}
$$

应用命题 2.4.1 (F4) 及 $h \in H$ 得 $x \rightsquigarrow y \in H$. 由 (NF) 即得 $x \to y \in H$. 这样, $y \geqslant z$, $z \in H \otimes x$, 说明 (NF1) 成立.

定理 6.3.8　PL^*–代数 L 的滤子 H 是正规的, 当且仅当 H 满足 (NF1) 及 (NF2).

证明　由命题 6.3.3, 仅需证明满足 (NF1) 及 (NF2) 的滤子 H 一定是正规的.

假设 $x \rightsquigarrow y \in H$, 则 $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \in x \otimes H$, 于是由 (NF1) 知, 存在 $h \in H$ 使得 $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \geqslant h \otimes x$. 又因 $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x \wedge y$(参见定义 6.2.3 (C4′) 及注 6.3.3), 故 $h \otimes x \leqslant x \wedge y$. 应用定义 6.3.3 (A3) 得 $h \leqslant x \to x \wedge y$. 另一方面, 由定理 6.2.5 (27), $x \to x \wedge y = (x \to x) \wedge (x \to y) = x \to y$. 于是, $h \leqslant x \to y$. 由此及 $h \in H$, 应用定义 2.4.5(F2) 得 $x \to y \in H$, 这说明 $x \rightsquigarrow y \in H$ 蕴涵 $x \to y \in H$. 同理可证, $x \to y \in H$ 蕴涵 $x \rightsquigarrow y \in H$, 这说明 H 是正规的.

应用定理 2.4.8 可得

定理 6.3.9　设 H 是 PL^*–代数 L 的正规滤子, 在 L 上定义如下关系:

$$a \approx b \text{当且仅当}(a \to b \in H, b \to a \in H)\text{当且仅当}(a \rightsquigarrow b \in H, b \rightsquigarrow a \in H),$$

则 $\approx$ 是L上的同余关系. 用 $[a]$ 表示 $a \in L$ 所在的等价类, 则商代数 $L/H = \{[a] | a \in L\}$是 PL^*–代数, 其中, $[a] \leqslant [b]$ 当且仅当 $a \to b \in H$ 当且仅当 $a \rightsquigarrow b \in H$.

PL^*–代数 L 的滤子 F 叫做真的, 如果 $F \neq L$. 容易知道, 滤子 F 是真的当且仅当 $0 \notin F$.

定义 6.3.6　PL^*–代数 L 的真滤子 F 称为是素的, 如果对任意 $x, y \in L$, $x \vee y \in F$ 蕴涵 $x \in F$ 或 $y \in F$.

定理 6.3.10　设 F 是 PL^*–代数 L 的真滤子, 则以下条件等价:

(1) F 是素的;

(2) 对任意 $x, y \in L$, $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$;

(3) 对任意 $x, y \in L$, $x \rightsquigarrow y \in F$ 或 $y \rightsquigarrow x \in F$;

(4) 对任意 $x, y \in L$, 若 $x \vee y=1$, 则 $x \in F$ 或 $y \in F$.

证明　仅证 (1)⇔(2). 因为 $(x \to y) \vee (y \to x)=1\in F$, 故 (1)⇒(2).

假定 (2) 成立且 $x \vee y \in F$, 据 (2), 不妨设 $x \to y \in F$. 由定理 6.2.6, $x \vee y= ((x \to y) \rightsquigarrow y)\wedge ((y \to x) \rightsquigarrow x) \in F$. 从而由定义 2.4.5(F2) 得 $(x \to y) \rightsquigarrow y \in F$, 再应用命题 2.4.1 (F4) 得 $y \in F$, 这说明 (1) 成立.

容易证明以下结论.

定理 6.3.11　设 H 是 PL^*–代数 L 的正规滤子, 则以下条件等价:

(1) H 是素的,

(2) L/H 是链, 即全序 PL^*–代数.

定义 6.3.7　对于 PL^*–代数 L 的子集 X, 包含 X 的最小滤子, 即包含 X 的所有滤子的交, 称为由 X 生成的滤子, 记为 $[X)$.

在 PL^*–代数中, x^n 可如下递归地定义: $x^0=1$, $x^1 = x$, $x^{k+1} = x^k \otimes x$, $k \in \mathbf{N}$.

易证如下结果成立.

命题 6.3.4　设 L 是 PL^*–代数, $\varnothing \neq X \subseteq L$, 则

(1) $[X)=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 1, x_1, \cdots, x_n \in X, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \leqslant a\}$;

(2) 若 $X=\{x\}$, 则记 $[X)$ 为 $[x)$ 且 $[x)=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 1, x^n \leqslant a\}$;

(3) 若 F 是 L 的滤子, $x \in L$, 则

$[F\cup\{x\})=\{a \in L|$ 存在整数 $m \geqslant 1, n_1, \cdots, n_m \geqslant 0$ 及 $f_1, \cdots, f_m \in F$,

$$(f_1 \otimes x^{n_1}) \otimes \cdots \otimes (f_m \otimes x^{n_m}) \leqslant a\}.$$

命题 6.3.5　设 H 是 PL^*–代数 L 的正规滤子, $x \in L$, 则

$[H\cup\{x\})=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 0, h \in H, h \otimes x^n \leqslant a\}=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 0$, $h \in H, x^n \otimes h \leqslant a\}$.

证明　由命题 6.3.4 (3) 得

$[H\cup\{x\})=\{a \in L|$ 存在整数 $m \geqslant 1, n_1, \cdots, n_m \geqslant 0$ 及 $h_1, \cdots, h_m \in H$, $(h_1 \otimes x^{n_1}) \otimes \cdots \otimes (h_m \otimes x^{n_m}) \leqslant a\}$.

如果 $m=1$, 由 $h_1 \otimes x^{n_1} \leqslant a$.

如果 m=2, 则有 $a \geqslant (h_1 \otimes x^{n_1}) \otimes (h_2 \otimes x^{n_2}) = h_1 \otimes (x^{n_1} \otimes h_2) \otimes x^{n_2}$. 因 H 是正规的, 据定理 6.3.8, 存在 $h_3 \in H$ 使 $x^{n_1} \otimes h_2 \geqslant h_3 \otimes x^{n_1}$. 于是

$a \geqslant h_1 \otimes (h_3 \otimes x^{n_1}) \otimes x^{n_2} = (h_1 \otimes h_3) \otimes x^{n_1+n_2} = h \otimes x^n$, 这里 $h = h_1 \otimes h_3$, $n = n_1 + n_2$.

重复上述过程可得 $[H \cup \{x\}) = \{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 0, h \in H, h \otimes x^n \leqslant a\}$.

应用定理 6.3.8 可得另一个等式.

命题 6.3.6 设 L 是 PL^*–代数, 则对任意 $x, y \in L$ 有

(1) 若 $x \vee y = 1$, 则对任意整数 $n \geqslant 1$, $x^n \vee y^n = 1$.

(2) 对任意整数 $n \geqslant 1$, $(x \to y)^n \vee (y \to x)^n = 1$, $(x \rightsquigarrow y)^n \vee (y \rightsquigarrow x)^n = 1$.

类似文献 [77], 可证上述命题, 同时应用命题 6.3.4、命题 6.3.5、命题 6.3.6 可以得到如下结论 (证明方法参见文献 [77]).

定理 6.3.12 设 F 是 PL^*–代数 L 的滤子, S 是 L 的作为格的理想 (以下称为格 $L(L)$ 的格理想, $L(L)$ 表示 L 关于序 $\leqslant$ 构成的格) 且 $F \cap S = \varnothing$, 则存在 L 的素滤子 P 满足 $F \subseteq P$ 且 $P \cap S = \varnothing$.

推论 6.3.1 设 L 是 PL^*–代数, $a \in L$, $a \neq 1$, 则存在 L 的素滤子 P 使得 $a \notin P$.

证明 容易证明 $S = \{x \in L | x \leqslant a\}$构成格 $L(L)$ 的格理想, 而显然$\{1\} \cap S = \varnothing$. 据定理 6.3.12 知存在 L 的素滤子 P 满足 $P \cap S = \varnothing$, 当然有 $a \notin P$.

一个自然的问题是: 如果将推论 6.3.1 中的 “素滤子” 换成 “正规素滤子”, 结论是否仍然成立? 下面将给出一个肯定的回答, 即证明 PL^*–代数 L 的正规素滤子定理, 它将在 $\mathbf{PL}^*$ 系统的完备性证明中起着关键作用.

定义 6.3.8 设 P 是 PL^*–代数 L 的素滤子, 如果不存在比 P 更小的素滤子 (即若 P' 是素滤子且 $P' \subseteq P$, 则 $P' = P$), 则称 P 是 L 的极小素滤子.

引理 6.3.3 在 PL^*–代数 L 中成立 $(\forall x, y, z \in L)$

(1) $x \otimes y \leqslant x$, $x \otimes y \leqslant y$;

(2) $(x \vee z) \otimes (y \vee z) \leqslant (x \otimes y) \vee z$.

证明 (1) 易知 $x \leqslant y \to x$, 应用定义 6.3.3(A3) 即得 $x \otimes y \leqslant x$. 类似地, $x \otimes y \leqslant y$.

(2) 的证明如下 (注意, 任意 PL^*–代数必是一个 $psMTL$–代数):

$$
\begin{aligned}
&(x \vee z) \otimes (y \vee z) = (x \otimes (y \vee z)) \vee (z \otimes (y \vee z)) && \text{(由定理 6.2.3 (10))}\\
&= ((x \otimes y) \vee (x \otimes z)) \vee ((z \otimes y) \vee (z \otimes z)) && \text{(由定理 6.2.3 (10))}\\
&= (x \otimes y) \vee ((x \otimes z) \vee (z \otimes z)) \vee (z \otimes y) && \text{(由 } \vee \text{ 的结合性和交换性)}\\
&= (x \otimes y) \vee ((x \vee z) \otimes z)) \vee (z \otimes y) && \text{(由定理 6.2.3 (10))}\\
&\leqslant (x \otimes y) \vee z \vee z && \text{(由本引理结论 (1))}\\
&= (x \otimes y) \vee z.
\end{aligned}
$$

定理 6.3.13　设 P 是 PL^*–代数 L 的极小素滤子, 则 $P=\cup\{a^{\perp}|a\notin P\}$, 这里 $a^{\perp}$ 表示$\{x\in L|x\vee a=1\}$.

证明　记 $Q=\cup\{a^{\perp}|a\notin P\}$, 下证 $P=Q$.

(1) 先证 $Q\subseteq P$. 对任意 $x\in Q$, 则有 $a\notin P$ 使 $x\in a^{\perp}$, 即 $x\vee a=1$. 由于 P 是素滤子, 故由 $a\notin P$ 及 $x\vee a=1\in P$ 即得 $x\in P$.

(2) 再证 Q 是 L 的滤子.

对任意 $x,y\in Q$, 则有 $a,b\notin P$ 使 $x\in a^{\perp}$, $y\in b^{\perp}$, 即 $x\vee a=1$, $y\vee b=1$. 从而 $a\vee b\notin P$ (因 P 是素滤子), 且由引理 6.3.3(2) 得

$$(x\otimes y)\vee(a\vee b)\geqslant(x\vee(a\vee b))\otimes(y\vee(a\vee b))=1\otimes 1=1,$$

即 $(x\otimes y)\vee(a\vee b)=1$. 于是 $x\otimes y\in(a\vee b)^{\perp}$, $a\vee b\notin P$, $x\otimes y\in Q$.

再设 $x\leqslant y$, $x\in Q$, 则有 $a\notin P$ 使 $x\in a^{\perp}$, 即 $x\vee a=1$. 从而 $y\vee a\geqslant x\vee a=1$, 即 $y\vee a=1$, $y\in a^{\perp}$, 这说明 $y\in Q$. 所以 Q 是 L 的滤子.

(3) 再证 Q 是素滤子.

假设 $x\vee y=1$, $x\notin Q$, 则对任意 $a\notin P$ 均有 $x\vee a\neq 1$. 以下用反证法证明 $x\notin P$.

假如 $x\in P$. 设 S 是格 $L(L)$ 的包含 x 与 $L-P$ 的极大格理想 (由 Zorn 引理容易证明 S 的存在性), 则 $1\notin S$(否则, 就有 $a\in L-P$ 使 $x\vee a=1$, 即 $x\in a^{\perp}$, $a\notin P$. 这与 $x\notin Q$ 矛盾). 对滤子$\{1\}$及格理想 S 应用定理 6.3.12, 必存在 L 的素滤子 P' 满足 $P'\cap S=\varnothing$. 显然 $P'\subseteq P$, 而 $x\in P$, $x\notin P'$, 这与 P 是极小素滤子矛盾.

于是, $x\notin P$, 而 $x\vee y=1$, 这说明 $y\in x^{\perp}$, 进而 $y\in Q$. 据此, 应用定理 6.3.10(4) 可知 Q 是素滤子.

从而由 (1), (3) 及 P 是极小素滤子的条件可得 $P=Q$.

定理 6.3.14　PL^*–代数的极小素滤子必是正规滤子.

证明　设 P 是 PL^*–代数 L 的极小素滤子, 分两步证明 P 是正规滤子.

(1) 先证对任意 $a\in L$, $a^{\perp}$ 是 L 的正规滤子. 由引理 6.3.3 易证 $a^{\perp}$ 是 L 的滤子.

设 $t\in a^{\perp}$, 则 $t\vee a=1$. 于是, $t=1\to t=(t\vee a)\to t=(t\to t)\wedge(a\to t)=a\to t$. 同理, $a=t\to a$.

假设 $x\in a^{\perp}\otimes y$, 则有 $t\in a^{\perp}$ 使 $x=t\otimes y$. 应用定义 6.3.3(A6) 及刚才证明的结论得

$$a\vee(y\rightsquigarrow t\otimes y)=(t\to a)\vee(y\rightsquigarrow(a\to t)\otimes y)=1,$$

即 $(y\rightsquigarrow t\otimes y)\in a^{\perp}$. 又由 $t\otimes y\leqslant y$ 得

$$t\otimes y=(t\otimes y)\wedge y\geqslant y\otimes(y\rightsquigarrow t\otimes y).\qquad(\text{由定义 6.2.3 (C4}'))$$

从而有 $z=y\otimes(y\rightsquigarrow t\otimes y)\in y\otimes a^{\perp}$ 使得 $x=t\otimes y\geqslant z$, 这说明 (NF2) 成立. 同理可证明 (NF1) 成立, 故应用定理 6.3.8 知 $a^{\perp}$ 是 L 的正规滤子.

(2) 再证 P 是正规滤子.

由定理 6.3.13, 对于极小素滤子 P 有: $P=\cup\{a^{\perp}|a\notin P\}$. 假设 $x\to y\in P$, 则有 $a\notin P$ 使 $x\to y\in a^{\perp}$. 由刚证明的 (1) 知, $a^{\perp}$ 是正规滤子, 故 $x\rightsquigarrow y\in a^{\perp}$, 即 $x\rightsquigarrow y\in P$. 同理, $x\rightsquigarrow y\in P\Rightarrow x\to y\in P$. 从而说明 P 是 L 的正规滤子.

定理 6.3.15(PL^*–代数正规素滤子定理)　设 L 是 PL^*–代数, $a\in L$, $a\neq 1$, 则存在 L 的正规素滤子 Q 使得 $a\notin Q$.

证明　(1) 首先证明 PL^*–代数的素滤子必包含一个极小素滤子.

设 P 是 PL^*–代数 L 的素滤子, $\Gamma=\{Q|Q$ 是 L 的素滤子且 $Q\subseteq P\}$. 显然, Γ 非空 (因 $P\in\Gamma$) 且关于集合的包含关系构成一个偏序集. 对于 Γ 的任意链$\{Q_i\}_{i\in I}$, 易证 $\cap_{i\in I}Q_i$ 是该链的一个下界. 由 Zorn 引理知, Γ 有极小元, 显然它是包含在 P 中的极小素滤子.

(2) 由推论 6.3.1 知, 存在 L 的素滤子 P 使得 $a\notin P$. 由 (1), P 包含一个极小素滤子 Q, 显然有 $a\notin Q$. 而由定理 6.3.14, 极小素滤子 Q 必是正规的, 这正是所需的结论.

6.3.4　系统 PL* 的完备性及 PL* 的意义

应用上述正规素滤子定理, 即可证明系统 **PL*** 的完备性.

容易验证全体 PL^*–代数构成代数簇, 故应用泛代数的结果可以得到

定理 6.3.16　全体 PL^*–代数构成的类关于子代数、同态像以及直积封闭.

定理 6.3.17　设 L 是 PL^*–代数, 则存在一簇全序 PL^*–代数$\{L_i|i\in I\}$, 使得 L 可以同构嵌入 L^*, 这里 $L^*=\prod\limits_{i\in I}L_i$.

证明　设 $\Gamma=\{Q|Q$ 是 L 的正规素滤子$\}$, 则 $\Gamma\neq\varnothing$(容易证明: 每一个滤子都可扩充成一个极大滤子, 极大滤子必是素滤子. 而由定理 6.3.15 的证明过程知素滤子必包含有极小素滤子, 由定理 6.3.14 知极小素滤子必是正规滤子). 由定理 6.3.11, 对任意 $Q\in\Gamma$, L/Q 是全序 PL^*–代数, 记这簇全序 PL^*–代数的积为 L^*. 可以证明, 映射 f:$L\to L^*$, $x\mapsto([x]_Q)_{Q\in\Gamma}$ 是从 L 到 L^* 的单同态, 即 L 可以同构嵌入 L^*.

事实上, f 显然是同态映射. 设 $x,y\in L$, 若 $x\neq y$, 则 $x\leqslant y$, $y\leqslant x$ 不同时成立, 不妨设 $x\leqslant y$ 不成立, 即 $x\to y\neq 1$. 应用定理 6.3.15, 存在 L 的正规素滤子 Q 使得 $x\to y\notin Q$. 于是, 在 L/Q 中 $[x]_Q\leqslant[y]_Q$ 不成立, 因此 $[x]_Q\neq[y]_Q$, 进而 $f(x)\neq f(y)$.

定理 6.3.18(系统 **PL*** 的完备性定理)　逻辑系统 **PL*** 是完备的, 即对系统 **PL*** 中的任意公式 φ, 以下各项等价:

(1) φ 是系统 **PL*** 的定理;

(2) 对任意的 PL^*–代数 L , φ 是 L–重言式;

(3) 对任意线性序的 PL^*–代数 L , φ 是 L–重言式.

证明　(1)⇒(2). 已在定理 6.3.7 中证明. (2)⇒(3), 显然成立.

(3)⇒(2). 根据定理 6.3.15, 只需证明对于任意一簇全序 PL^*–代数$\{L_i|i\in I\}$, 当对于每一个 L_i 来说 φ 是 L_i–重言式时, φ 是 L^*–重言式, 这里 $L^*=\prod_{i\in I}L_i$. 事实上, 对任意 L^* 上的 PR–赋值 v 有: f_iv 也是 L_i 上的 PR–赋值, 这里 f_i: $L^*\to L_i$ 是投影映射. 若 $v(\varphi)=(a_i)_{i\in I}\neq 1$, 则存在 $a_i\neq 1$, 从而 $f_i(v(\varphi))\neq 1$. 这与 "对于每一个 L_i 来说 φ 是 L_i–重言式" 的假设矛盾.

(2)⇒(1). 由于 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的商代数 [F] 是一个 PL^*–代数, 故据 (2) 知 φ 是 [F] 重言式, 即对 [F] 上的所有 PR–赋值 v 有 $v(\varphi)=1$. 特别地, 对于典型映射

$$v:F(S)\to[F],A\mapsto[A],A\in F(S)$$

应有 $v(\varphi)=1$. 从而 $[\varphi]=1$, 这说明 φ 是系统 $\mathbf{PL}^*$ 的定理 (由定理 6.3.1 中的 T11, T14 知 [F] 的最大元 1 恰是系统 $\mathbf{PL}^*$ 的全部定理).

注 6.3.4(关于系统 $\mathbf{PL}^*$ 的意义):　以上基于非可换 R_0 t–模 (伪 R_0 t–模), 建立了非可换模糊逻辑形式系统 $\mathbf{PL}^*$, 并证明它的可靠性和完备性, 这是对模糊逻辑形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的自然而合理的拓广. 这些结果与已有研究成果有如下几点不同之处:

(1) 文献 [72], [75] 分别给出了非可换模糊逻辑系统$\mathbf{psBL^r}$, $\mathbf{PL}$, 也分别证明了它们的完备性, 但它们是基于连续伪 t–模的, 而系统 $\mathbf{PL}^*$ 是基于左连续伪 t–模的.

(2) 系统 $\mathbf{PL}^*$ 具有对合否定 (本书关于非可换模糊逻辑的 "对合" 是指 "伪对合", 即 $A^{-\sim}\approx A^{\sim-}\approx A$), 而文献 [72] 中提出的$\mathbf{psBL}$, $\mathbf{psMTL}$, $\mathbf{psMTL^r}$ 系统不要求满足 (伪) 对合律.

(3) 尽管文献 [74] 证明了基于左连续伪 t–模的逻辑系统 $\mathbf{psMTL}^r$ 的完备性, 但并没有研究相关代数系统的滤子理论, 更没有论证 "正规素滤子定理"(本章关于 PL^*–代数滤子、正规滤子、正规素滤子的结论, 可以自然地推广到 $psMTL$–代数中, 见第 7 章). 同时, 系统 $\mathbf{PL}^*$ 的公理, 没有照搬$\mathbf{psMTL}$, $\mathbf{psMTL^r}$ 系统的公理, 而是受文献 [43] 的启发使用了更简洁的形式.

(4) 现有非可换模糊逻辑系统 $\mathbf{psBL}$[73], $\mathbf{psBL^r}$[72], $\mathbf{psMTL}$[72], $\mathbf{psMTL^r}$[72,74], $\mathbf{PL}$[75] 都从非可换格群作为研究的出发点, 没有给出一个具有实际含义的伪 t–模, 因而很难说明其实际应用价值. 而系统 $\mathbf{PL}^*$ 基于伪 R_0 t–模, 它是在模糊推理中有明显的优势的 R_0 t–模的推广, 且有明显的实际含义 (见下面的说明), 因而具有一定的实际应用价值 (伪 R_0 t–模、系统 $\mathbf{PL}^*$ 在模糊推理中的应用需要进一步深入研究).

注 6.3.5(关于伪 R_0 t–模的实际意义)　伪 R_0 t–模作为 R_0 t–模的非可换推广, 其根本区别在于引进函数 f_1 和 f_2(见定理 2.3.5, 定理 2.3.6), 可以对它们的意义解

释如下：对于模糊逻辑，t–模和伪 t–模扮演 “逻辑与” 真值的角色. 对于基于 t–模的可换模糊逻辑，实际上有一个隐含的假定，即认为命题的逻辑真值是客观真实的、不存在误差和偏袒关系. 然而，现实世界是复杂的，对于具体应用来说这一假定是很难保证的，基于伪 t–模的非可换模糊逻辑就是期望 “顾及” 逻辑真值可能存在的主观性因素，提供一种 “调节机制”，使逻辑系统能更好地体现灵活性或柔性 (事实上，从误差和偏袒关系的存在来看 “逻辑与”，就自然不具备可换性了). 对于伪 $R_0\,t$–模来说，函数 f_1 和 f_2 正是前述 “调节机制” 的体现，它们分别对第一、二个变量进行调节后，再遵循 $R_0\,t$–模的规则得到 “逻辑与” 的真值，而对于没有偏差的理想状态，伪 $R_0\,t$–模正好与 $R_0\,t$–模一致. 因此，从这个意义上说，研究基于伪 $R_0\,t$–模的非可换模糊逻辑是有实际意义和重要应用前景的.

6.4 非可换模糊逻辑系统PUL*

Hájek 在文献 [72] 中提出了非可换模糊逻辑系统 **psMTL**，但没能证明其完备性; Jenei 和 Montagna 的论文 [74] 在一定程度上弥补了这一不足，证明了 **psMTL**^{r} 系统的完备性，但增加了两个限制条件. 同时，**psMTL** 与 **psMTL**^{r} 系统没有对合否定，这与通常 $\neg\neg A\approx A$ 的 “直观” 意义相差较远. 再者，非可换模糊逻辑系统 **psBL**/**psBL**^{r}, **psMTL**/**psMTL**^{r}, **PL** 将 “逻辑非” 取作 $\neg A=A\to 0$, 这就使得 “逻辑非” 依赖于蕴涵算子，导致不同的蕴涵算子对应的 “逻辑非” 有不同的性质. 于是，建立新的满足以下要求的非可换模糊逻辑系统就是有意义的了，它应保留 **psMTL** 的广泛性 (基于一般左连续伪 t–模)，同时 “逻辑非” 与蕴涵算子相互独立、且具有对合否定 (对于非可换模糊逻辑，“对合” 指 “伪对合”，即 $\neg_1\neg_2 A\approx A\approx\neg_2\neg_1 A$)，当然还应具有完备性，本章建立的 **PUL*** 系统达到了以上这些要求，来自作者的论文 [155]. 事实上，系统 **PUL*** 是 **psMTL** 的扩张，我们通过引入投影算子 Δ 及独立于蕴涵的伪对合否定，借助相应代数系统 (PUL^*–代数) 的正规素滤子定理，证明了它的完备性. 系统**PUL*** 可以看成4.4 节逻辑系统**UL*** 的非可换拓广.

6.4.1 非可换模糊命题演算系统 PUL*

定义 6.4.1 设 S 是原子命题集, &, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\rightsquigarrow$ 是二元命题联结词, $\neg_1$, $\neg_2$ 是一元命题联结词, θ 为真值常量, $F(S)$ 是由 S 和&, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\rightsquigarrow$, $\neg_1$, $\neg_2$, θ 生成的公式集. 由以下公理及推理规则组成的逻辑系统称为 **PUL***:

公理

(PUL1) $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$,

$\qquad(B\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((A\rightsquigarrow B)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow C))$;

(PUL 2) $A\&B\to A$;

(PUL 3) $A\&B \to B$;

(PUL 4) $((A \to B)\&A) \to (A \wedge B)$, $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \to (A \wedge B)$;

(PUL 5) $(A \wedge B) \to A$;

(PUL 6) $(A \wedge B) \to (B \wedge A)$;

(PUL 7) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (A\&B \to C)$, $(A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)) \leftrightarrow (B\&A \rightsquigarrow C)$;

(PUL 8) $((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C)$,

$((A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow (((B \rightsquigarrow A) \rightsquigarrow C) \rightsquigarrow C)$;

(PUL 9) $(A \vee B) \leftrightarrow (((A \to B) \rightsquigarrow B) \wedge ((B \to A) \rightsquigarrow A))$,

$(A \vee B) \leftrightarrow (((A \rightsquigarrow B) \to B) \wedge ((B \rightsquigarrow A) \to A))$;

(PUL 10) $\theta \to A$;

(PUL 11) $(A \to (\neg_1\neg_2 A))\&((\neg_1\neg_2 A) \to A)$, $(A \to (\neg_2\neg_1 A))\&((\neg_2\neg_1 A) \to A)$;

(PUL 12) $\Delta A \vee ((\Delta A) \to \theta)$, $\Delta A \vee ((\Delta A) \rightsquigarrow \theta)$;

(PUL 13) $\Delta(A \vee B) \to (\Delta A \vee \Delta B)$;

(PUL 14) $\Delta A \to A$;

(PUL 15) $\Delta A \to \Delta\Delta A$;

(PUL 16) $\Delta(A \to B) \to (\Delta A \to \Delta B)$, $\Delta(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow (\Delta A \rightsquigarrow \Delta B)$;

(PUL 17) $\Delta(A \to B) \leftrightarrow \Delta(A \rightsquigarrow B)$;

(PUL 18) $\Delta(A \to B) \to \Delta((\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A))$, $\Delta(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow \Delta((\neg_2 B) \to (\neg_2 A))$,

其中, $A \leftrightarrow B$ 是 $(A \to B)\&(B \to A)$ 的简写.

推理规则

MP 规则 (分离规则): 由 A 和 $A \to B$ 推得 B, 由 A 和 $A \rightsquigarrow B$ 推得 B.

Nec 规则 (必然规则): 由 A 推得 ΔA.

注 6.4.1 公理中的 $\neg_1$, $\neg_2$ 与 $\to$, $\rightsquigarrow$ 是相互独立的, $\neg_1 A$ 并非 $A \to \theta$, $\neg_2 A$ 并非 $A \rightsquigarrow \theta$.

以下用符号 $\vdash A$ 表示 A 是系统 **PUL*** 中的定理, 用符号 $\Gamma \vdash A$ 表示公式 A 可从公式集 Γ 推出.

引理 6.4.1(蕴涵规则, 简称 Imp 规则) 由 $A \to B$ 推得 $A \rightsquigarrow B$, 由 $A \rightsquigarrow B$ 和推得 $A \to B$.

证明 只证前半部分 (以后类似, 将不再每次声明).

(1) $A \to B$	(已知)
(2) $\Delta(A \to B)$	(由 (1), Nec 规则)
(3) $\Delta(A \rightsquigarrow B)$	(由 (2), (PUL17), MP 规则)
(4) $\Delta(A \rightsquigarrow B) \to (A \rightsquigarrow B)$	(由 (PUL14))
(5) $A \rightsquigarrow B$	(由 (3), (4), MP 规则)

引理 6.4.2(HS 规则) 若 $\Gamma=\{A \to B, B \to C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \to C)$. 类似地, 若 $\Gamma=\{A \rightsquigarrow B, B \rightsquigarrow C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \rightsquigarrow C)$.

证明 只证前半部分.

(1) $B \to C$ (已知)

(2) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (由 (PUL1))

(3) $(A \to B) \to (A \to C)$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $A \to B$ (已知)

(5) $A \to C$ (由 (4), (3), MP 规则)

定理 6.4.1 在系统 PUL* 中成立 (非反序规则): 若 $\vdash (A \to B)$, 则 $\vdash (\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$; 反之, 也成立, 即若 $\vdash (\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$, 则 $\vdash (A \to B)$. 若 $\vdash (A \to B)$, 则 $\vdash (\neg_2 B) \to (\neg_2 A)$; 反之, 也成立.

证明 首先证明, 若 $\vdash (A \to B)$, 则 $\vdash (\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$.

(1) $A \to B$ (已知)

(2) $\Delta(A \to B)$ (由 Nec 规则)

(3) $\Delta(A \to B) \to \Delta((\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A))$ (由 (PUL18))

(4) $\Delta((\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A))$ (由 (2), (3), MP 规则)

(5) $\Delta((\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A)) \to ((\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A))$ (由 (PUL14))

(6) $(\neg_1 B) \rightsquigarrow (\neg_1 A)$ (由 (4), (5), HS 规则)

(7) $(\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$ (由 (6), Imp 规则)

同理可证, 若 $\vdash (A \to B)$, 则 $\vdash (\neg_2 B) \to (\neg_2 A)$.

再证, 若 $\vdash (\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$, 则 $\vdash (A \to B)$.

(1) $(\neg_1 B) \to (\neg_1 A)$ (已知)

(2) $(\neg_2 (\neg_1 A)) \to (\neg_2 (\neg_1 B))$ (由 (1) 及已证结论)

(3) $A \to (\neg_2 (\neg_1 A))$ (由 (PUL11), (2), MP 规则)

(4) $A \to (\neg_2 (\neg_1 B))$ (由 (3), (2), HS 规则)

(5) $(\neg_2 (\neg_1 B)) \to B$ (由 (PUL11), (3), MP 规则)

(6) $A \to B$ (由 (4), (5), HS 规则)

同理可证, 若 $\vdash (\neg_2 B) \to (\neg_2 A)$, 则 $\vdash (A \to B)$.

定理 6.4.2 在系统 PUL* 中成立 (反序对偶规则): 若 $\vdash A \to (B \to C)$, 则 $\vdash B \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow C)$; 若 $\vdash A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow C)$, 则 $\vdash B \to (A \to C)$.

证明 前半部分的证明如下:

(1) $A \to (B \to C)$ (已知)

(2) $(A \to (B \to C)) \to (A \& B \to C)$ (由 (PUL7))

(3) $A \& B \to C$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $A\&B \rightsquigarrow C$　　(由 (3), Imp 规则)

(5) $(A\&B \rightsquigarrow C) \to (B \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow C))$　　(由 (PUL7))

(6) $B \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow C)$　　(由 (4), (5), MP 规则)

定理 6.4.3　以下公式是系统 **PUL*** 中的定理:

(T1) $A \to ((A \to B) \rightsquigarrow A \wedge B)$, $A \rightsquigarrow ((A \rightsquigarrow B) \to A \wedge B)$;

(T2) $A \to (B \to A)$, $A \rightsquigarrow (B \rightsquigarrow A)$;

(T3) $A \to A$, $A \rightsquigarrow A$;

(T4) $A \to ((A \to B) \rightsquigarrow B)$, $A \rightsquigarrow ((A \rightsquigarrow B) \to B)$;

(T5) $(A \to B) \to ((B \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$, $(A \rightsquigarrow B) \rightsquigarrow ((B \rightsquigarrow C) \to (A \rightsquigarrow C))$;

(T6) $(A \to (B \rightsquigarrow C)) \to (B \rightsquigarrow (A \to C))$, $(A \rightsquigarrow (B \to C)) \rightsquigarrow (B \to (A \rightsquigarrow C))$;

(T7) $A \to I$, $A \rightsquigarrow I$, 这里 I 是 $\theta \to \theta$ 的缩写

(T8) $(I \to A) \leftrightarrow A$, $(I \rightsquigarrow A) \leftrightarrow A$,

证明　(T1) 的证明如下:

(1) $((A \to B)\&A) \to (A \wedge B)$　　(由 (PUL4))

(2) $((A \to B)\&A) \rightsquigarrow (A \wedge B)$　　(由 (1), Imp 规则)

(3) $(((A \to B)\&A) \rightsquigarrow (A \wedge B)) \to (A \rightsquigarrow ((A \to B) \rightsquigarrow (A \wedge B)))$　　(由 (PUL5))

(4) $A \rightsquigarrow ((A \to B) \rightsquigarrow (A \wedge B))$　　(由 (2), (3), MP 规则)

(5) $A \to ((A \to B) \rightsquigarrow A \wedge B)$　　(由 (1), Imp 规则)

(T2) 的证明如下:

(1) $(A\&B) \to A$　　(由 (PUL2))

(2) $((A\&B) \to A) \to (A \to (B \to A))$　　(由 (PUL7))

(3) $A \to (B \to A)$　　(由 (1), (2), MP 规则)

(T3) 的证明如下:

(1) $A \rightsquigarrow ((A \to (B \to A)) \rightsquigarrow A)$　　(由 (T2))

(2) $(A \to (B \to A)) \to (A \to A)$　　(由 (1), 反序对偶规则)

(3) $A \to (B \to A)$　　(由 (T2))

(4) $A \to A$　　(由 (3), (2), MP 规则)

(T4) 的证明如下:

(1) $(A \to B) \to (A \to B)$　　(由 (T3))

(2) $A \rightsquigarrow ((A \to B) \rightsquigarrow B)$　　(由 (1), 反序对偶规则)

(3) $A \to ((A \to B) \rightsquigarrow B)$　　(由 (2), Imp 规则)

(T5) 的证明如下:

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$　　(由 (PUL1))

(2) $(A \to B) \rightsquigarrow ((B \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (1), 反序对偶规则)

(3) $(A \to B) \to ((B \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (2), Imp 规则)

(T6) 的证明如下:

(1) $(A \to (B \rightsquigarrow C)) \to (((B \rightsquigarrow C) \to C) \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (T5))

(2) $B \rightsquigarrow ((B \rightsquigarrow C) \to C)$, (由 (T4))

(3) $(((B \rightsquigarrow C) \to C) \rightsquigarrow (A \to C)) \to (B \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (2), (T5), MP 规则)

(4) $(A \to (B \rightsquigarrow C)) \to (B \rightsquigarrow (A \to C))$ (由 (1), (3), HS 规则)

(T7) 的证明如下:

(1) $\theta \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow \theta)$ (由 (T2))

(2) $A \to (\theta \to \theta)$ (由 (1), 反序对偶规则)

(3) $A \to I$ (公式 (2) 的简写)

(T8) 的证明如下:

(1) $I \to ((I \to A) \rightsquigarrow A)$ (由 (T4))

(2) $(I \to A) \rightsquigarrow A$ (由 (1), (T3), MP 规则)

(3) $(I \to A) \to A$ (由 (2), Imp 规则)

(4) $A \to (I \to A)$ (由 (T2))

(5) $(I \to A) \leftrightarrow A$ (由 (3), (4))

6.4.2 可证等价关系及系统 PUL* 的可靠性

定义 6.4.2 设 $A, B \in F(S)$, 如果 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$, 则称 A 与 B 可证等价, 记作 $A \approx B$.

容易证明, 可证等价是 $F(S)$ 上的等价关系.

注 6.4.2 (1) 由于有 Imp 推理规则, 故 $A \approx B$ 当且仅当 $\vdash A \rightsquigarrow B$ 且 $\vdash B \rightsquigarrow A$.

(2) 在 (T7) 中, 记 I 是 $\theta \to \theta$ 的缩写. 事实上, I 也可定义为 $\theta \rightsquigarrow \theta$, 因为 $\theta \to \theta \approx \theta \rightsquigarrow \theta$, 这可如下证明:

(i) $\theta \rightsquigarrow \theta$ (由 (T3))

(ii) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \to (I \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta))$ (由 (T2))

(iii) $I \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta)$ (由 (i), (ii), MP 规则)

(iv) $(\theta \to \theta) \rightsquigarrow (\theta \rightsquigarrow \theta)$ (公式 (iii) 的另一写法)

(v) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \rightsquigarrow I$ (由 (T7))

(vi) $(\theta \rightsquigarrow \theta) \rightsquigarrow (\theta \to \theta)$ (公式 (v) 的另一写法)

(vii) $\theta \to \theta \approx \theta \rightsquigarrow \theta$ (由 (iv), (vi))

为了证明 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的同余关系, 需要以下结果.

定理 6.4.4 以下公式是系统 PUL* 中的定理:

(T9) $((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$,

$((C\rightsquigarrow A)\wedge(C\rightsquigarrow B))\rightsquigarrow(C\rightsquigarrow(A\wedge B))$;

(T10) $((A\to B)\&A)\to B$, $(A\&(A\rightsquigarrow B))\rightsquigarrow B$;

(T11) $(A\to B)\to((A\&C)\to(B\&C))$, $(A\rightsquigarrow B)\rightsquigarrow((C\&A)\rightsquigarrow(C\&B))$;

(T12) $A\&(B\&C)\to(A\&B)\&C$, $(A\&B)\&C\to A\&(B\&C)$;

(T13) $(A\&B)\to(A\wedge B)$;

(T14) $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to(B\wedge C)))$,

$(A\rightsquigarrow B)\rightsquigarrow((A\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow(A\rightsquigarrow(B\wedge C)))$;

(T15) $A\to(A\vee B)$, $B\to(A\vee B)$, $(A\vee B)\to(B\vee A)$;

(T16) $(A\to B)\vee(B\to A)$, $(A\rightsquigarrow B)\vee(B\rightsquigarrow A)$;

(T17) $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$,

$(A\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((B\rightsquigarrow C)\rightsquigarrow((A\vee B)\rightsquigarrow C))$.

证明　这里仅以每一个结论的前半部分为例给出证明过程.

(T9) 的证明如下:

(1) $((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to A)$　　(由 (PUL5))

(2) $(C\to A)\to((A\to(A\wedge B))\rightsquigarrow(C\to(A\wedge B)))$　　(由 (T5))

(3) $((C\to A)\wedge(C\to B))\to((A\to(A\wedge B))\rightsquigarrow(C\to(A\wedge B)))$

(由 (1), (2), HS 规则)

(4) $(A\to(A\wedge B))\rightsquigarrow((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$

(由 (3), (T6), MP 规则)

(5) $(A\to(A\wedge B))\to((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$

(由 (4), Imp 规则)

(6) $A\to((A\to B)\rightsquigarrow(A\wedge B))$　　(由 (T1))

(7) $(A\to B)\rightsquigarrow(A\to(A\wedge B))$　　(由 (6), (T6), MP 规则)

(8) $(A\to B)\to(A\to(A\wedge B))$　　(由 (7), Imp 规则)

(9) $(A\to B)\to((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$　　(由 (8), (5), HS 规则)

(10) $(B\to A)\to((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$　　(类似 (9) 的证明)

(11) $((C\to A)\wedge(C\to B))\to(C\to(A\wedge B))$　　(由 (9),(10), (PUL8), MP)

(T10) 的证明如下:

(1) $((A\to B)\&A)\to A\wedge B$　　(由 (PUL4))

(2) $(A\wedge B)\to(B\wedge A)$　　(由 (PUL6))

(3) $(B\wedge A)\to B$　　(由 (PUL5))

(4) $(A\wedge B)\to B$　　(由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((A\to B)\&A)\to B$　　(由 (1), (4), HS 规则)

(T11) 的证明如下:

(1) $B\&C \to B\&C$ (由 (T3))
(2) $(B\&C \to B\&C) \to (B \to (C \to (B\&C)))$ (由 (PUL7))
(3) $B \to (C \to (B\&C))$ (由 (1), (2), MP 规则)
(4) $(B \to (C \to (B\&C))) \to ((A \to B) \to (A \to (C \to (B\&C))))$
(由 (PUL1))
(5) $(A \to B) \to (A \to (C \to (B\&C)))$ (由 (3), (4), MP 规则)
(6) $(A \to (C \to (B\&C))) \to ((A\&C) \to (B\&C))$ (由 (PUL7))
(7) $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$ (由 (5), (6), HS 规则)

(T12) 的证明如下：
(1) $A\&(B\&C) \to A\&(B\&C)$ (由 (T3))
(2) $A \to (B\&C \to (A\&(B\&C)))$ (由 (1), (PUL7), MP 规则)
(3) $A \to (B \to (C \to (A\&(B\&C))))$ (由 (2), (PUL7), MP 规则)
(4) $(A\&B) \to (C \to (A\&(B\&C)))$ (由 (3), (PUL7), MP 规则)
(5) $(A\&B)\&C \to (A\&(B\&C))$ (由 (4), (PUL7), MP 规则)

(T13) 的证明如下：
(1) $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \to (A \wedge B)$ (由 (PUL4))
(2) $B \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow B)$ (由 (T2))
(3) $(B \rightsquigarrow (A \rightsquigarrow B)) \rightsquigarrow ((A\&B) \rightsquigarrow (A\&(A \rightsquigarrow B)))$ (由 (T11))
(4) $(A\&B) \rightsquigarrow (A\&(A \rightsquigarrow B))$ (由 (2), (3), MP 规则)
(5) $(A\&B) \to (A\&(A \rightsquigarrow B))$ (由 (4), Imp 规则)
(6) $(A\&B) \to (A \wedge B)$ (由 (5), (1), HS 规则)

(T14) 的证明如下：
(1) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$ (由 (T9))
(2) $((A \to B)\&(A \to C)) \to ((A \to B) \wedge (A \to C))$ (由 (T13))
(3) $((A \to B)\&(A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$ (由 (2), (1), HS 规则)
(4) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ (由 (3), (PUL7), MP 规则)

(T15) 的证明如下 (只证 $A \to (A \vee B)$)：
(1) $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \rightsquigarrow B$ (由 (T10))
(2) $(A\&(A \rightsquigarrow B)) \to B$ (由 (1), Imp 规则)
(3) $A \to ((A \rightsquigarrow B) \to B)$ (由 (2), (PUL7), MP 规则)
(4) $A \to ((B \rightsquigarrow A) \to A)$ (由 (T2))
(5) $A \to (((A \rightsquigarrow B) \to B) \wedge ((B \rightsquigarrow A) \to A))$ (由 (3), (4), (T14), MP 规则)
(6) $A \to (A \vee B)$ (由 (5), (PUL9), HS 规则)

(T16) 的证明如下：
(1) $(A \to B) \to ((A \to B) \vee (B \to A))$ (由 (T15))

(2) $(B\to A)\to((B\to A)\vee(A\to B))$　(由 (T15))

(3) $((B\to A)\vee(A\to B))\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (T15))

(4) $(B\to A)\to((A\to B)\vee(B\to A))$　(由 (2), (3), HS 规则)

(5) $((A\to B)\to((A\to B)\vee(B\to A)))\to(((B\to A)\to((A\to B)\vee(B\to A)))$
$\to((A\to B)\vee(B\to A)))$　(由 (PUL8))

(6) $(A\to B)\vee(B\to A)$　(由 (1), (4), (5), MP 规则)

(T17) 的证明如下:

(1) $(A\vee B)\to(((A\to B)\rightsquigarrow B)\wedge((B\to A)\rightsquigarrow A))$　(由 (PUL9))

(2) $(((A\to B)\rightsquigarrow B)\wedge((B\to A)\rightsquigarrow A))\to((A\to B)\rightsquigarrow B)$
(由 (PUL5))

(3) $(A\vee B)\to((A\to B)\rightsquigarrow B)$　(由 (1), (2), HS 规则)

(4) $(A\to B)\rightsquigarrow((A\vee B)\to B)$　(由 (3), (T6), MP 规则)

(5) $(A\to B)\to((A\vee B)\to B)$　(由 (4), Imp 规则)

(6) $((A\vee B)\to B)\to((B\to C)\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$　(由 (T5))

(7) $(A\to B)\to((B\to C)\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$　(由 (5), (6), HS 规则)

(8) $(B\to C)\rightsquigarrow(((A\to B)\to(A\vee B)\to C))$　(由 (7), (T6), MP 规则)

(9) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow(B\to C)$　(由 (PUL5))

(10) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\to B)\to((A\vee B)\to C))$
(由 (9), (8), HS 规则)

(11) $(A\to B)\to(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$
(由 (10), (T6), MP 规则)

(12) $(A\to B)\rightsquigarrow(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$
(由 (11), Imp 规则)

(13) $(B\to A)\rightsquigarrow(((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C))$
(类似于 (12) 的证明)

(14) $((A\to C)\wedge(B\to C))\rightsquigarrow((A\vee B)\to C)$　(由 (12),(13),(PUL8),MP 规则)

(15) $((A\to C)\wedge(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$　(由 (14), Imp 规则)

(16) $((A\to C)\&(B\to C))\to((A\to C)\wedge(B\to C))$　(由 (T13))

(17) $((A\to C)\&(B\to C))\to((A\vee B)\to C)$　(由 (16), (15), HS 规则)

(18) $(A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$　(由 (15), (PUL7), MP 规则)

定理 6.4.5　可证等价关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的 $(\&, \wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2)$ 型同余关系, 即

(1) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\&C\approx B\&D$;

(2) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\wedge C\approx B\wedge D$;

(3) 若 $A\approx B$ 且 $C\approx D$, 则 $A\vee C\approx B\vee D$;

(4) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \to C \approx B \to D$;

(5) 若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \rightsquigarrow C \approx B \rightsquigarrow D$;

(6) 若 $A \approx B$, 则 $\neg_1 A \approx \neg_1 B$;

(7) 若 $A \approx B$, 则 $\neg_2 A \approx \neg_2 B$.

证明 假设 $A \approx B, C \approx D$.

(1) 由 $A \to B$, 应用 (T11) 及 MP 规则可得 $A\&C \to B\&C$. 同理, 由 $C \rightsquigarrow D$ 可得 $B\&C \rightsquigarrow B\&D$, 进而得 $B\&C \to B\&D$(应用 Imp 规则). 于是, $A\&C \to B\&D$(应用 HS 规则). 类似地, 有 $B\&D \to A\&C$, 故 $A\&C \approx B\&D$.

(2) 由 $A \to B$(已知)、$A \wedge C \to A$ (应用 PUL5) 及 MP 规则可得 $A \wedge C \to B$. 同理可得 $A \wedge C \to D$. 而由 (T14) 可得 $(A \wedge C \to B) \to ((A \wedge C \to D) \to (A \wedge C \to B \wedge D))$, 应用 MP 规则即得 $A \wedge C \to B \wedge D$. 类似地有 $B \wedge D \to A \wedge C$, 故 $A \wedge C \approx B \wedge D$.

(3) 由 $A \to B$(已知)、$B \to B \vee D$ (应用 T15) 及 MP 规则可得 $A \to B \vee D$. 同理可得 $C \to B \vee D$. 而由 (T17) 可得 $(A \to (B \vee D)) \to ((C \to (B \vee D)) \to (A \vee C \to B \vee D))$, 应用 MP 规则即得 $A \vee C \to B \vee D$. 类似地有 $B \vee D \to A \vee C$, 故 $A \vee C \approx B \vee D$.

(4) 由 $B \to A$(已知)、$(B \to A) \to ((A \to C) \rightsquigarrow (B \to C))$ (应用 PL1) 及 MP 规则可得 $(A \to C) \rightsquigarrow (B \to C)$, 进而有 $(A \to C) \to (B \to C)$. 又由 $B \to A$(已知)、$(C \to D) \to ((B \to C) \to (B \to D))$ (应用 PUL1) 及 MP 规则可得 $(B \to C) \to (B \to D)$. 于是, $(A \to C) \to (B \to D)$. 同理可证 $(B \to D) \to (A \to C)$, 故 $A \to C \approx B \to D$.

类似 (4) 可证 (5) 成立. (6), (7) 可由定理 6.4.1 的非反序规则直接得到.

根据上述结论, $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成 $(\&, \wedge, \vee, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2)$ 型商代数 $F(S)/\approx$, 以下记为 [F]. 依据 [F] 的代数性质, 引入 PUL^*–代数的概念.

定义 6.4.3 (2,2,2,2,2,1,1,1,0,0) 代数结构 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2, \Delta, 0, 1)$ 称为是 PUL^*–代数, 如果

(A1) $(L; \wedge, \vee, 0, 1)$ 是有界格 (相应的序为 $\leqslant$), 这里 0 和 1 分别是最小元、最大元;

(A2) $(L; \otimes, 1)$ 是独异点, 即 $\otimes$ 满足结合律且对任意 $x \in L$ 有 $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$;

(A3) $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \to z$ 当且仅当 $y \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(A4) $(x \to y) \otimes x \leqslant x \wedge y$, $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x \wedge y$;

(A5) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x)$;

(A6) $\neg_1 \neg_2 x = \neg_2 \neg_1 x = x$;

(A7) $\Delta x \vee ((\Delta x) \to 0) = 1$, $\Delta x \vee ((\Delta x) \rightsquigarrow 0) = 1$;

(A8) $\Delta(x \vee y) \leqslant (\Delta x) \vee (\Delta y)$;

(A9) $\Delta x \leqslant x$;

(A10) $\Delta x \leqslant \Delta\Delta x$;

(A11) $\Delta(x \to y) \leqslant (\Delta x) \to (\Delta y)$, $\Delta(x \rightsquigarrow y) \leqslant (\Delta x) \rightsquigarrow (\Delta y)$;

(A12) $\Delta(x \to y) \leqslant \Delta(\neg_1 y \to \neg_1 x)$, $\Delta(x \to y) \leqslant \Delta(\neg_2 y \to \neg_2 x)$;

(A13) $\Delta(x \to y) = \Delta(x \rightsquigarrow y)$;

(A14) $\Delta 1=1$.

注 6.4.3　上述条件 (A4) 可由其他条件推出 (见文献 [76]), 但为了便于与 $psMTL$–代数进行比较, 这里仍保留在定义中.

容易证明 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的商代数 [F] 是一个 PUL^*–代数. 对于 PUL^*–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2, \Delta, 0, 1)$, 由定义 6.2.3 知, $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 构成一个 $psMTL$–代数. 因而关于 $psMTL$–代数的所有结论对于 PUL^*–代数同样成立. 此外, 有

定理 6.4.6　在 PUL^*–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2, \Delta, 0, 1)$ 中成立:

(1) $\Delta x=1$ 当且仅当 $x=1$;

(2) 若 $x \leqslant y$, 则 $\neg_1 y \leqslant \neg_1 x$, $\neg_2 y \leqslant \neg_2 x$;

(3) $\neg_1 1=0$, $\neg_1 0=1$, $\neg_2 1=0$, $\neg_2 0=1$;

(4) $\Delta 0=0$;

(5) $\Delta x = \Delta\Delta x$;

(6) $(\Delta x \to 0)\otimes\Delta x=0$, $\Delta x \otimes (\Delta x \rightsquigarrow 0)=0$;

(7) $\Delta x = \Delta x \otimes \Delta x$;

(8) 若 $x \leqslant y$, 则 $\Delta x \leqslant \Delta y$;

(9) $\Delta(x \otimes y) = \Delta x \otimes \Delta y$.

证明　(1) 由定义 6.4.3 (A14) 知 $\Delta 1=1$. 假设 $\Delta x=1$, 由定义 6.4.3 (A9) 得 $x \geqslant \Delta x=1$. 因 1 为最大元, 故 $x \leqslant 1$, 于是 $x=1$.

(2) 若 $x \leqslant y$, 则 $x \to y=1$. 据 (A14), $\Delta(x \to y)=1$. 于是由 (A12) 得 $\Delta(\neg_1 y \to \neg_1 x) \geqslant \Delta(x \to y)=1$, 即 $\Delta(\neg_1 y \to \neg_1 x)=1$. 应用 (1) 即得 $\neg_1 y \to \neg_1 x=1$, 此即 $\neg_1 y \leqslant \neg_1 x$. 同理可证 $\neg_2 y \leqslant \neg_2 x$.

(3) 由 $\neg_2 0\leqslant 1$(因 1 为最大元), 应用 (2) 得 $\neg_1 1\leqslant \neg_1(\neg_2 0)$. 又据 (A6), $\neg_1(\neg_2 0)=0$. 于是 $\neg_1 1\leqslant 0$, 此即 $\neg_1 1=0$. 同理有 $\neg_2 1=0$. 于是, $\neg_1 0=\neg_1(\neg_2 1)=1$, $\neg_2 0=\neg_2(\neg_1 1)=1$.

(4) 由 (A9) 即得.

(5) 由 (A9) 得 $\Delta\Delta x \leqslant \Delta x$. 而由 (A10) 得 $\Delta x \leqslant \Delta\Delta x$, 故 $\Delta x = \Delta\Delta x$.

(6) 由 (A11) 及 (4) 得 $\Delta(x \to 0)\leqslant (\Delta x) \to (\Delta 0)=(\Delta x) \to 0$. 应用 (A3) 得 $(\Delta x \to 0)\otimes\Delta x \leqslant 0$, 即 $(\Delta x \to 0) \otimes\Delta x=0$. 类似地, $\Delta x \otimes (\Delta x \rightsquigarrow 0)=0$.

(7) 由 $\Delta x \leqslant 1=(\Delta x) \to (\Delta x)$, 应用 (A3) 得 $\Delta x \otimes \Delta x \leqslant \Delta x$. 另一方面, 由 $0\leqslant \Delta x \otimes \Delta x$, 应用定理 6.2.3 (8) 得, $\Delta x \to 0\leqslant \Delta x \to \Delta x \otimes \Delta x$. 又由 (A3) 得 $\Delta x \leqslant \Delta x \to \Delta x \otimes \Delta x$, 于是 $\Delta x\vee (\Delta x \to 0)\leqslant \Delta x \to \Delta x \otimes \Delta x$. 应用 (A7) 得

$\Delta x \to \Delta x \otimes \Delta x \geqslant \Delta x \vee (\Delta x \to 0)=1$, 即 $\Delta x \to \Delta x \otimes \Delta x=1$, $\Delta x \leqslant \Delta x \otimes \Delta x$. 所以 $\Delta x = \Delta x \otimes \Delta x$.

(8) 由 (A11) 及 (A14) 即得.

(9) 由 (A3) 易得 $x \otimes y \leqslant x$, 应用 (8) 得 $\Delta(x \otimes y) \leqslant \Delta x$. 同理, $\Delta(x \otimes y) \leqslant \Delta y$. 于是, 据定理 6.2.3 (3) 得 $\Delta(x \otimes y) \otimes \Delta(x \otimes y) \leqslant \Delta x \otimes \Delta y$. 又据 (7) 有, $\Delta(x \otimes y) \otimes \Delta(x \otimes y) = \Delta(x \otimes y)$. 于是, $\Delta(x \otimes y) \leqslant \Delta x \otimes \Delta y$. 另一方面, 据定理 6.2.3 (2) 得 $x \leqslant y \to (x \otimes y)$, 应用 (8) 得, $\Delta x \leqslant \Delta(y \to (x \otimes y))$. 又据 (A11) 有 $\Delta(y \to (x \otimes y)) \leqslant \Delta y \to \Delta(x \otimes y)$, 即 $\Delta x \leqslant \Delta y \to \Delta(x \otimes y)$. 应用 (A3) 得 $\Delta x \otimes \Delta y \leqslant \Delta(x \otimes y)$. 所以, $\Delta(x \otimes y) = \Delta x \otimes \Delta y$.

定义 6.4.4 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2, 0, 1)$ 是 PUL^*–代数, 从 $F(S)$ 到 L 的 $(\wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2)$ 型同态称为系统**PUL*** 在 L 上的一个 PU 赋值.

用 $\Omega(L)$ 表示 $F(S)$ 在 PUL^*–代数 L 上的全体 PU 赋值之集.

定义 6.4.5 设 A 是 $F(S)$ 中的公式, 如果对任意的 $v \in \Omega(L)$ 均有 $v(A)=1$, 则称 A 为 L–重言式 (永真式), 记为 $\vDash_L A$.

容易证明以下定理, 这表明: **PUL*** 中的语构关于语义 $\Omega(L)$ 是可靠的.

定理 6.4.7(可靠性定理) 系统 **PUL*** 中的定理一定是 L–重言式, 即若 $A \in F(S)$ 且 $\vdash A$, 则 $\vDash_L A$. 这里 L 是任意确定的 PUL^*–代数.

证明 只需证明 **PUL*** 中的公理 (PUL1)~(PUL18) 都是重言式, 并且 **PUL*** 中的 MP 推理规则、Nec 规则保持重言式.

易知 (PUL1)~(PUL18) 都是重言式. 下证推理规则保持重言式. 设 A, $A \to B$ 是重言式, 则 $v(A)=1$, $v(A \to B)=1$. 从而 $v(B) = v(A) \to v(B) = v(A \to B)=1$, 即 B 为重言式, 这说明 MP 推理规则保持重言式. 又设 A 是重言式, 则对任意赋值 v 均有 $v(A)=1$, 从而 $v(\Delta A) = \Delta v(A) = \Delta 1=1$. 所以 ΔA 为重言式, 这说明 Nec 规则保持重言式.

6.4.3 PUL^*–代数的正规素滤子定理及系统 PUL* 的完备性

本节研究 PUL^*–代数的滤子理论, 包括 PUL^*–代数的生成滤子定理和正规素滤子定理, 并应用它们证明系统 **PUL*** 的完备性. 需要特别指出的是, 本节证明了 PUL^*–代数的滤子与正规滤子等价, 这与 $psBL$–代数的滤子有很大的不同. 同时, 本节关于 PUL^*–代数的滤子、正规滤子的许多结论, 可以自然地拓展到 $psMTL$–代数上, 特别是关于正规滤子的充要条件 (它不同于 $psBL$–代数的正规滤子的相应结论), 见第 7 章.

定义 6.4.6 PUL^*–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow, \neg_1, \neg_2, \Delta, 0, 1)$ 的非空子集 F 称为是 L 的一个滤子, 如果 F 满足

(F1) 对任意 $x, y \in F$, $x \otimes y \in F$;

(F2) 如果 $x \in F$, $y \in L$, $x \leqslant y$, 则 $y \in F$;

(F3) 对任意 $x \in F$, $\Delta x \in F$;

(F4) 如果 $x \to y \in F$, 则 $(\neg_1 y) \to (\neg_1 x) \in F$, $(\neg_2 y) \to (\neg_2 x) \in F$;

(F5) 如果 $x \rightsquigarrow y \in F$, 则 $(\neg_1 y) \rightsquigarrow (\neg_1 x) \in F$, $(\neg_2 y) \rightsquigarrow (\neg_2 x) \in F$.

容易证明以下结论.

命题 6.4.1　设 F 是 PUL^*–代数 L 的滤子, 则成立

(F6) $1 \in F$;

(F7) 如果 $x \in F$, $y \in L$, 则 $y \to x \in F$, $y \rightsquigarrow x \in F$;

(F8) 如果 $x, y \in F$, 则 $x \wedge y \in F$.

命题 6.4.2　对于 PUL^*–代数 L 的子集 F, 如果 F 满足 (F3)~(F5), 则以下条件彼此等价:

(1) F 是 L 的滤子;

(2) $1 \in F$; 若 $x, x \to y \in F$, 则 $y \in F$;

(3) $1 \in F$; 若 $x, x \rightsquigarrow y \in F$, 则 $y \in F$.

定义 6.4.7　PUL^*–代数 L 的滤子 H 称为是正规的, 如果

(NF) 对任意 $x, y \in L$, $x \to y \in H$ 当且仅当 $x \rightsquigarrow y \in H$.

容易证明以下结论 (见命题 6.3.3 及定理 6.3.8)

命题 6.4.3　设 H 是 PUL^*–代数 L 的正规滤子, 则:

(NF1) 对任意 $y \in x \otimes H = \{x \otimes h | h \in H\}$, 存在 $z \in H \otimes x = \{h \otimes x | h \in H\}$使得 $y \geqslant z$;

(NF2) 对任意 $y \in H \otimes x = \{h \otimes x | h \in H\}$, 存在 $z \in x \otimes H = \{x \otimes h | h \in H\}$使得 $y \geqslant z$.

定理 6.4.8　PUL^*–代数 L 的滤子 H 是正规的, 当且仅当 H 满足 (NF1) 及 (NF2).

类似于文献 [77], [78] 中的方法, 容易证明

定理 6.4.9　设 H 是 PUL^*–代数 L 的正规滤子, 在 L 上定义如下关系:

$$a \approx b \text{当且仅当} (a \to b \in H, b \to a \in H) \text{当且仅当} (a \rightsquigarrow b \in H, b \rightsquigarrow a \in H),$$

则 $\approx$ 是 L 上的同余关系. 用 $[a]$ 表示 $a \in L$ 所在的等价类, 则商代数 $L/H = \{[a] | a \in L\}$是 PUL^*–代数, 其中, $[a] \leqslant [b]$ 当且仅当 $a \to b \in H$ 当且仅当 $a \rightsquigarrow b \in H$.

PUL^*–代数 L 的滤子 F 叫做真的, 如果 $F \neq L$. 容易知道, 滤子 F 是真的当且仅当 $0 \notin F$.

定义 6.4.8　PUL^*–代数 L 的真滤子 F 称为是素的, 如果对任意 x, $y \in L$, $x \vee y \in F$ 蕴涵 $x \in F$ 或 $y \in F$.

定理 6.4.10　设 F 是 PUL^*–代数 L 的真滤子, 则以下条件等价:

(1) F 是素的;

(2) 对任意 $x, y \in L, x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$;

(3) 对任意 $x, y \in L, x \rightsquigarrow y \in F$ 或 $y \rightsquigarrow x \in F$;

(4) 对任意 $x, y \in L$, 若 $x \vee y=1$, 则 $x \in F$ 或 $y \in F$.

证明 见定理 6.3.10.

容易证明以下结论.

定理 6.4.11 设 F 是 PUL^*–代数 L 的正规滤子, 则以下条件等价:

(1) F 是素的;

(2) L/H 是链, 即全序 PUL^*–代数.

定理 6.4.12 在 PUL^*–代数中, 正规滤子与滤子等价.

证明 只需证明每个滤子都是正规的. 设 F 是 PUL^*–代数 L 的滤子, $x \to y \in F$.

由定义 6.4.6 (F3) 及 $x \to y \in F$ 得, $\Delta(x \to y) \in F$. 据定义 6.4.3 (A13), $\Delta(x \rightsquigarrow y) = \Delta(x \to y) \in F$. 又据定义 6.4.3 (A9) 有 $\Delta(x \rightsquigarrow y) \leqslant x \rightsquigarrow y$, 应用定义 6.4.6 (F2) 即得 $x \rightsquigarrow y \in F$. 同理可证, $x \rightsquigarrow y \in F \Rightarrow x \to y \in F$. 所以 F 是 PUL^*–代数 L 的正规滤子.

定义 6.4.9 对于 PUL^*–代数 L 的子集 X, 包含 X 的最小正规滤子, 即包含 X 的所有正规滤子的交, 称为由 X 生成的正规滤子, 记为 [X).

定理 6.4.13(生成滤子定理) 设 L 是 PUL^*–代数, H 是 L 的正规滤子, $x \in L$, 则

$$[H \cup \{x\}) = \{u | \exists v_1, v_2 \in H, \text{s.t.}\, v_1 \otimes (\Delta x) \leqslant u \text{且} (\Delta x) \otimes v_2 \leqslant u\}.$$

证明 用 F 表示$\{u|\exists v_1,v_2 \in H, \text{ s.t. } v_1 \otimes (\Delta x) \leqslant u$ 且 $(\Delta x) \otimes v_2 \leqslant u\}$.

对于 F 来说, (F2) 显然成立. 以下分别证明 (F1), (F3), (F4), (F5) 成立.

(F1): 设 $u_1,u_2 \in F$, 则存在 $v_1,v_2,v_3,v_4 \in H$ 使得 $v_1 \otimes (\Delta x) \leqslant u_1$, $(\Delta x) \otimes v_2 \leqslant u_1$, $v_3 \otimes (\Delta x) \leqslant u_2$, $(\Delta x) \otimes v_4 \leqslant u_2$. 于是由定理 6.2.3 (3) 得

$$(v_1 \otimes (\Delta x)) \otimes (v_3 \otimes (\Delta x)) \leqslant u_1 \otimes u_2.$$

由于 H 是正规滤子, 应用命题 6.4.3(NF1), 对于 $(\Delta x) \otimes v_3 \in (\Delta x) \otimes H$, 存在 $v_5 \in H$ 使得 $(\Delta x) \otimes v_3 \geqslant v_5 \otimes (\Delta x)$. 于是

$$u_1 \otimes u_2 \geqslant v_1 \otimes ((\Delta x) \otimes v_3) \otimes (\Delta x) \geqslant v_1 \otimes (v_5 \otimes (\Delta x)) \otimes (\Delta x).$$

而应用定理 6.4.6(7) 得, $v_1 \otimes (v_5 \otimes (\Delta x)) \otimes (\Delta x) = (v_1 \otimes v_5) \otimes (\Delta x \otimes \Delta x) = (v_1 \otimes v_5) \otimes \Delta x$. 从而, $u_1 \otimes u_2 \geqslant v_6 \otimes \Delta x$, 其中, $v_6 = v_1 \otimes v_5 \in H$(对于 H 应用 (F1)). 同理可证, 存在 $v_7 \in H$ 使得 $u_1 \otimes u_2 \geqslant \Delta x \otimes v_7$. 这说明 $u_1 \otimes u_2 \in F$, 即 F 满足 (F1).

(F3): 设 $u \in F$, 则有 $v_1,v_2 \in H$ 使得 $v_1 \otimes (\Delta x) \leqslant u$ 且 $(\Delta x) \otimes v_2 \leqslant u$. 于是, 依次应用定理 6.4.6 (8), (9), (5) 得

$$\Delta u \geqslant \Delta(v_1 \otimes (\Delta x)) = (\Delta v_1) \otimes (\Delta\Delta x) = (\Delta v_1) \otimes (\Delta x).$$

注意到 $\Delta v_1 \in H$(对滤子 H 应用 (F3)). 同理可证, 存在 $v_3 \in H$ 使得 $\Delta u \geqslant \Delta x \otimes v_3$. 所以 $\Delta u \in F$, 即 F 满足 (F3).

(F4): 设 $a \to b \in F$, 则有 $v_1,v_2 \in H$, 使得 $v_1 \otimes (\Delta x) \leqslant a \to b$ 且 $(\Delta x) \otimes v_2 \leqslant a \to b$. 于是, 依次应用定义 6.4.3(A9), (A12) 及定理 6.4.6(8), (9), (5) 得

$$\begin{aligned}(\neg_1 b) \to (\neg_1 a) &\geqslant \Delta((\neg_1 b) \to (\neg_1 a)) \geqslant \Delta(a \to b) \geqslant \Delta(v_1 \otimes (\Delta x))\\ &= \Delta v_1 \otimes (\Delta\Delta x) = \Delta v_1 \otimes \Delta x = v_3 \otimes \Delta x,\end{aligned}$$

这里 $v_3 = \Delta v_1 \in H$(对滤子 H 应用 (F3)). 同理可证, 存在 $v_4 \in H$ 使得 $(\neg_1 b) \to (\neg_1 a) \geqslant \Delta x \otimes v_4$. 这说明 $(\neg_1 b) \to (\neg_1 a) \in F$. 类似地有, $(\neg_2 b) \to (\neg_2 a) \in F$. 从而, F 满足 (F4).

(F5): 类似于 (F4) 的证明.

综上所述, F 是滤子, 进而由定理 6.4.12 知 F 是正规的. 又显然有, $H \subseteq F$ 且 $x \in F$. 根据生成滤子的定义得 $F=[H\cup\{x\})$.

定理 6.4.14(*PUL**–代数正规素滤子定理) 设 L 是 *PUL**–代数, $a \in L$, $a \neq 1$, 则存在 L 的正规素滤子 P 使得 $a \notin P$.

证明 对于 $a \in L$, $a \neq 1$, 假设 F 是不包含 a 的正规滤子 (这样的 F 一定存在, 比如$\{1\}$), 如果 F 不是素的, 则有 $x, y \in L$ 满足 $x \to y \notin F$, $y \to x \notin F$. 利用定理 6.4.13, 可以构造两个正规滤子 F_1,F_2, 它们分别是包含 F 与 $x \to y$, $y \to x$ 的最小正规滤子. 可以断定 F_1,F_2 中至少有一个不包含 a, 否则, 由 $a \in F_1,a \in F_2$ 可得, 存在 $v_1,v_2 \in F$ 使得 $a \geqslant v_1 \otimes \Delta(x \to y)$, $a \geqslant v_2 \otimes \Delta(y \to x)$. 于是

$$\begin{aligned}a &\geqslant (v_1 \otimes \Delta(x \to y)) \vee (v_2 \otimes \Delta(y \to x)) && \text{(由定理 6.2.3 (3))}\\ &\geqslant ((v_1 \otimes v_2) \otimes \Delta(x \to y)) \vee ((v_1 \otimes v_2) \otimes \Delta(y \to x)) && \text{(由定理 6.2.3 (3))}\\ &= (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta(x \to y) \vee \Delta(y \to x)) && \text{(由定理 6.2.3 (10))}\\ &\geqslant (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta((x \to y) \vee (y \to x))) && \text{(由定义 6.4.3 (A8))}\\ &= (v_1 \otimes v_2) \otimes (\Delta 1) = (v_1 \otimes v_2) \otimes 1 = v_1 \otimes v_2 \in F && \text{(由定义 6.4.3 (A5), (A14))}\end{aligned}$$

从而有 $a \in F$, 这是一个矛盾. 于是, 按照这种方式, 可以构造一个不包含 a 的嵌套的滤子序列, 而它们的 "并" 正是要寻找的正规素滤子.

应用上述正规素滤子定理, 即可证明 **PUL*** 系统的完备性.

容易验证全体 *PUL**–代数构成代数簇, 故应用泛代数的结果可以得到:

定理 6.4.15 全体 *PUL**–代数构成的类关于子代数、同态像以及直积封闭.

引理 6.4.3 设 L 是 *PUL**–代数, 则

(1) 若 F 是 L 的滤子, 则 $F=\cap\{Q|Q$ 是 L 的素滤子且 $Q\supseteq F\}$;

(2) L 的每个真滤子 F 都可扩充为极大滤子 (指不包含于任何滤子的真滤子);

(3) L 的每个极大滤子都是素滤子.

证明 (1) 记 $F^*=\cap\{Q|Q$ 是 L 的素滤子且 $Q\supseteq F\}$. 显然 $F^*\supseteq F$. 若存在 $a\in F^*$ 但 $a\notin F$, 则由定理 6.4.14, 存在素滤子 P 使得 $P\supseteq F$, $a\notin P$. 从而 $P\in\{Q|Q$ 是 L 的素滤子且 $Q\supseteq F\}$, 这与 $a\in F^*$ 矛盾. 所以 $F^*=F$.

(2) 设 $\Gamma=\cup\{Q|Q$ 是 L 的真滤子且 $Q\supseteq F\}$, 则 Γ 关于集合的包含关系构成偏序集. 对于 Γ 的任何子链$\{Q_i|i\in I\}$, 令 $Q^*=\bigcup\limits_{i\in I}Q_i$, 则 Q^* 是包含 F 的滤子, 且 Q^* 是真滤子 (因 Q_i 都是真滤子, 故对任意 $i\in I$ 有 $0\notin Q_i$, 从而 $0\notin Q^*$), 即 Q^* 是子链$\{Q_i|i\in I\}$的上界. 由 Zorn 引理, Γ 有极大元, 显然这个极大元即是 L 的极大滤子.

(3) 设 F 是 L 的极大滤子, 由于 F 是真滤子, 故应用定理 6.4.14 知, 存在素子 $P\supseteq F$. 由 F 的极大性得 $P=F$. 这说明 F 是素滤子.

定理 6.4.16 设 L 是 PUL^*–代数, 则存在一簇全序 PUL^*–代数$\{L_i|i\in I\}$, 使得 L 可以同构嵌入 L^*, 这里 $L^*=\prod\limits_{i\in I}L_i$.

证明 设 $\Gamma=\{Q|Q$ 是 L 的正规素滤子$\}$, 则 $\Gamma\neq\varnothing$(由引理 6.4.3, 每一个滤子都可扩充成一个极大滤子, 而极大滤子必是素滤子, 又由定理 6.4.12 知, 它是正规素滤子). 由定理 6.4.11, 对任意 $Q\in\Gamma$, L/Q 是全序 PUL^*–代数, 记这簇全序 PUL^*–代数的积为 L^*. 可以证明, 映射 $f{:}L\to L^*$, $x\mapsto([x]_Q)_{Q\in\Gamma}$ 是从 L 到 L^* 的单同态, 即 L 可以同构嵌入 L^*.

事实上, f 显然是同态映射. 设 $x,y\in L$, 若 $x\neq y$, 则 $x\leqslant y$, $y\leqslant x$ 不同时成立, 不妨设 $x\leqslant y$ 不成立, 即 $x\to y\neq 1$. 应用定理 6.4.14, 存在 L 的正规素滤子 Q 使得 $x\to y\notin Q$. 于是, 在 L/Q 中 $[x]_Q\leqslant[y]_Q$ 不成立, 因此 $[x]_Q\neq[y]_Q$, 进而 $f(x)\neq f(y)$.

定理 6.4.17(系统 **PUL*** 的完备性定理) 逻辑系统 **PUL*** 是完备的, 即对系统 **PUL*** 中的任意公式 φ, 以下各项等价:

(1) φ 是系统 **PUL*** 的定理;

(2) 对任意的 PUL^*–代数 L, φ 是 L- 重言式;

(3) 对任意线性序的 PUL^*–代数 L, φ 是 L- 重言式.

证明 (1)⇒(2). 已在定理 6.4.7 中证明. (2)⇒(3). 显然成立.

(3)⇒(2). 根据定理 6.4.16, 只需证明对于任意一簇全序 PUL^*–代数$\{L_i|i\in I\}$, 当对于每一个 L_i 来说 φ 是 L_i–重言式时, φ 是 L^*–重言式, 这里 $L^*=\prod\limits_{i\in I}L_i$. 事实上, 对任意 L^* 上的 PU 赋值 v 有: f_iv 也是 L_i 上的 PU 赋值, 这里 f_i: $L^*\to L_i$ 是投影映射. 若 $v(\varphi)=(a_i)_{i\in I}\neq 1$, 则存在 $a_i\neq 1$, 从而 $f_i(v(\varphi))\neq 1$. 这与 "对于每一

个 L_i 来说 φ 是 L_i–重言式" 的假设矛盾.

(2)⇒(1). 由于 $F(S)$ 关于可证等价关系 $\approx$ 构成的商代数 [F] 是一个 PUL^*–代数, 故据 (2) 知 φ 是 [F] 重言式, 即对 [F] 上的所有 PU 赋值 v 有 $v(\varphi)=1$. 特别地, 对于典型映射 $v{:}F(S)\to[\mathrm{F}], A\mapsto[A]$, $A\in F(S)$, 应有 $v(\varphi)=1$. 从而 $[\varphi]=1$, 这说明 φ 是系统 **PUL***的定理 (由定理 6.4.3 中的 (T7), (T8) 及 MP 规则易证 [F] 的最大元 1 恰是系统 **PUL*** 的全部定理).

上面提到的相关非可换逻辑系统之间的关系可用图 6.2 表示.

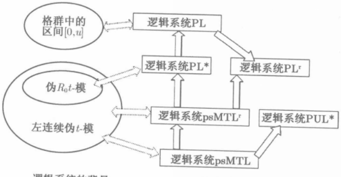


图 6.2　若干非可换模糊逻辑系统之间的关系

习　题　6

1. 给出定理 6.1.2、定理 6.1.3 及定理 6.1.5 的证明.
2. 举例说明非可表示的 $psBL$–代数 ($psMTL$–代数) 存在.
3. 深入研究可换模糊逻辑系统 **NMG**、**NM Ł**、**ΠMTL** 等, 并分别将其推广到非可换情形 (必要时建立相应的伪 t–模).
4. 查阅国内外最新文献, 了解关于 BL–代数、MTL–代数结构方面的研究成果, 并探讨将它们推广到 $psBL$–代数、$psMTL$–代数以及 PUL^*–代数中.
5. 查阅文献, 给出系统 **psMTL**$^{\mathbf{r}}$ 标准完备性定理的证明.
6. 研究非可换模糊逻辑系统 **PL***, **PUL*** 的标准完备性.

第 7 章　BCK/BIK$^+$ 逻辑及相关代数结构研究

BCK 逻辑和 **BCI** 逻辑来源于 λ 演算 (λ-calculus) 和组合逻辑中的组合子 (combinators), 关于它们的研究最早可追溯到 20 世纪 50 年代 Meredith 的工作 (见文献 [243], [244] 中的相关说明). 1966 年, Iséki 从 **BCK/BCI** 逻辑出发提出 *BCK/BCI*–代数的概念 (见文献 [245]~[248], 其中, 文献 [246] 中的名称是 *I*–代数). 此后, 国际学术界对其进行了深入细致的研究, 涉及序结构、代数结构、理想 (ideal, 与滤子概念相对应)、与逻辑的关系等方面, 我国学者在 *BCK/BCI*–代数方向上取得许多重要成果, 孟杰教授与韩国 Jun 教授的英文专著 [249] 总结了 *BCK*–代数 30 年的研究成果, 在国内外影响较大. 在考虑 *BCK*–代数的簇问题时, Komori 于 1983 年提出较 *BCK*–代数广泛的 *BCC*–代数 [250], 而 *BCC*–代数后来又被称为 *BIK*$^+$–代数 [251]. *BCC*–代数又进一步被不同学者推广, 称之为 *BZ*–代数 [252] 或弱 *BCC*–代数 (也称为 *GB*–代数 [253]). 关于 *BCI/BCC/BZ*–代数已有一些较深入的研究, 可参阅文献 [254]~[263].

BCK 逻辑和 **BCI** 逻辑均是蕴涵逻辑 (implicative logic, 即只涉及逻辑联结词 $\to$ 的逻辑系统), 各种模糊逻辑系统均包含蕴涵联结词, 它们与 **BCK** 逻辑的关系自然是一个非常重要的理论问题. 捷克学者 Cintula 在文献 [264] 中提出了弱蕴涵模糊逻辑 (weakly implicative fuzzy logic) 及模糊 **BCK** 逻辑 (**FBCK** logic) 的概念, 系统研究了它们与可换模糊逻辑系统的关系. 本书作者在文献 [265],[266] 中先后提出 **BIK**$^+$ 逻辑和模糊 **BIK**$^+$ 逻辑系统 (简称为 **FBIK**$^+$ 逻辑), 全面分析了它们与非可换模糊逻辑系统的关系. 这些结果表明, 从蕴涵联结词的角度看, **BCK** 逻辑是所有可换模糊逻辑系统的共同基础; 类似地, 分别从两个蕴涵联结词的角度看, **BIK**$^+$ 逻辑是所有非可换模糊逻辑系统的共同基础. 这是一个非常有趣的事实, **BCK** 逻辑、**BIK**$^+$ 逻辑 (看作 **BCK** 逻辑的非可换版本) 原本与模糊逻辑没有任何关系, 然而近十年关于模糊逻辑形式系统的研究, 不论是可换的还是非可换的, 它们都自然地围绕在一条主线之上: 对 **BCK** 逻辑、**BIK**$^+$ 逻辑进行各种扩张.

事实上, 关于模糊逻辑与 **BCK** 逻辑的关系研究, 首先是从代数结构之间的联系开始的, 比如徐扬教授较早研究了格蕴涵代数与 *BCK*–代数的关系 [267]、罗马尼亚学者 Iorgulescu 建立了 *BCK*–代数与 *BL*–代数的联系 [268]、文献 [269] 系统研究了 *BCC*–代数与 *psBL*–代数的关系等. 本章实际上是从逻辑形式系统和代数结构两个方面, 探究各种模糊逻辑系统及其相关代数结构的统一基础; 同时, 本章还将

从代数结构 (包括与量子逻辑相关的效应代数) 的角度探讨各种非经典逻辑的内在联系. 之所以将这些内容放在同一章中, 是因为它们均以 **BCK/BIK$^+$** 逻辑及相对应的 BCK/BCC–代数为公共基础.

7.1　BCK 逻辑与 BCK–代数

7.1.1　BCK/FBCK 逻辑与可换模糊逻辑

定义 7.1.1[243,244,254]　设 S 是命题变元之集, $F(S)$ 是由 S 生成的 $\to$ 型自由代数, 这里 $\to$ 为二元命题联结词. 由以下公理和 MP 推理规则组成的形式系统称为 **BCK** 逻辑:

(B) $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$;

(C) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

(K) $A\to(B\to A)$.

定义 7.1.2[243,244,254]　设 S 是命题变元之集, $F(S)$ 是由 S 生成的 $\to$ 型自由代数, 这里 $\to$ 为二元命题联结词. 由以下公理和 MP 推理规则组成的形式系统称为 **BCI** 逻辑:

(B) $(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))$;

(C) $(A\to(B\to C))\to(B\to(A\to C))$;

(I) $A\to A$.

容易验证, $A\to A$ 是 **BCK** 逻辑中的定理, 故 **BCK** 逻辑是 **BCI** 逻辑的扩张.

定义 7.1.3[264]　设 $\mathcal{L}$ 是命题语言 (propositional language), $\to$ 是 $\mathcal{L}$ 中的二元命题联结词. $\mathcal{L}$ 上的逻辑 **L** 称为是一个弱蕴涵逻辑 (weakly implicative logic), 如果下列后承 (consecution) 是 **L** 的成员:

(Ref) $\vdash_{\mathbf{L}}\varphi\to\varphi$;

(MP) $\varphi,\varphi\to\psi\vdash_{\mathbf{L}}\psi$;

(WT) $\varphi\to\psi,\psi\to\chi\vdash_{\mathbf{L}}\varphi\to\chi$;

(Cng^i_c) $\varphi\to\psi,\psi\to\varphi\vdash_{\mathbf{L}} c(\chi_1,\cdots,\chi_{i-1},\varphi,\cdots,\chi_n)\to c(\chi_1,\cdots,\chi_{i-1},\psi,\cdots,\chi_n)$, 对 $\mathcal{L}$ 中任意 n 元联结词 c 及任意 $i\leqslant n$.

注 7.1.1　对于 “命题语言”、“逻辑”、“后承” 等概念, 文献 [264] 中有严格的定义, 此处略去了 (读者可按通常的意义理解, 在本书中不会产生歧义).

对于任意公式 φ,ψ, 定义: $\varphi^0\to\psi=\psi,\varphi^m\to\psi=\varphi\to(\varphi^{m-1}\to\psi)$, m 为自然数.

定义 7.1.4[264]　模糊 **BCK** 逻辑 (简称 **FBCK** 逻辑) 是指具有以下公理和推理规则的逻辑系统:

(B) $\vdash (\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;

(C) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$;

(K) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$;

(F_n) $\vdash ((\varphi \to \psi)^n \to \chi) \to (((\psi \to \varphi)^n \to \chi) \to \chi)$, 这里 n 为任意自然数;

(MP) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

注 7.1.2 文献 [264] 中, 上述 (B) 使用以下公理:

(B′) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

事实上, 应用 (C) 不难证明 (B) 与 (B′) 等价.

作为各种模糊逻辑形式系统的一般化, Hájek 在文献 [270] 中引入如下的 quasihoop 逻辑.

定义 7.1.5[270] Quasihoop 逻辑 (简记为 **QH**) 是指由以下公理及推理规则组成的逻辑形式系统:

(1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$;

(2) $\vdash \varphi \& \psi \to \psi \& \varphi$;

(3) $\vdash \varphi \& \psi \to \varphi$;

(4) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \& \psi \to \chi)$;

(5) $\vdash (\varphi \& \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$;

(F_n) $\vdash ((\varphi \to \psi)^n \to \chi) \to (((\psi \to \varphi)^n \to \chi) \to \chi)$, 这里 n 为任意自然数;

(MP) $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$.

容易验证以下结论成立.

定理 7.1.1 每一个可换模糊逻辑系统 (**BL**, $\mathscr{L}^*$, **MTL**, **UL***, **QH** 等) 均是 **BCK** 逻辑 (及 **FBCK** 逻辑) 的一种扩张.

关于 **BCI** 逻辑, 文献 [271] 解决了文献 [264] 中的两个公开问题, 文献 [272] 指出与 **BCI** 逻辑相配套的代数结构是 MPE–代数而非 BCI–代数. 以下介绍 [271] 中关于 **BCI** 逻辑的一些结果, 相应代数结构方面的内容将在下节介绍.

定理 7.1.2[271] 以下各项是 **BCI** 逻辑中的定理或规则:

(1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\chi^n \to \varphi) \to (\chi^n \to \psi))$;

(2) $\varphi \to \psi \vdash (\chi^n \to \varphi) \to (\chi^n \to \psi)$;

(3) $(\varphi^n \to (\psi^m \to \chi)) \to (\psi^m \to (\varphi^n \to \chi))$;

(4) $\varphi^n \to (\psi^m \to \chi) \vdash \psi^m \to (\varphi^n \to \chi)$;

(5) $(\varphi \to \psi) \to \psi \vdash (\varphi^n \to \psi) \to \psi$;

(6) $\varphi \to \psi \vdash ((\chi^n \to \psi) \to \xi) \to ((\chi^n \to \varphi) \to \xi)$;

这里 n 为任意自然数.

定义 7.1.6[271] **QBCI** 逻辑是 **BCI** 逻辑添加如下公理后的扩张:

(PL^{ax}) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$.

定理 7.1.3[271]　以下公式是 QBCI 逻辑中的定理:

$(\mathrm{F}_{n,m}) \vdash ((\varphi \to \psi)^n \to \chi) \to (((\psi \to \varphi)^m \to \chi) \to \chi)$, 这里 n, m 为自然数.

7.1.2 *BCK*–代数的基本知识

定义 7.1.7[245,248,249]　一个 *BCK*–代数是指满足以下条件的 (2, 0) 型代数 $(A; *, 0)$: $\forall x, y, z \in A$,

(1) $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$;

(2) $(x * (x * y)) * y = 0$;

(3) $x * x = 0$;

(4) $x * y = 0, y * x = 0 \Rightarrow x = y$;

(5) $0 * x = 0$.

在 *BCK*–代数 A 中定义如下 $\leqslant$ 关系: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y = 1$, 则 A 关于 $\leqslant$ 构成偏序集.

以上定义是 *BCK*–代数的原始定义, 按文献 [273] 的说法, 上述 (2, 0) 型代数 $(A; *, 0)$ 应称为右–*BCK* 代数 (right-*BCK* algebra). 为了方便与本书所涉及的逻辑代数进行比较, 以后将使用下述对偶的定义, 按文献 [273] 的说法, 这叫做 "反左–*BCK* 代数"(reversed left-*BCK* algebra), 并沿用 *BCK*–代数的名称.

定义 7.1.8　一个 *BCK*–代数是指代数结构 $(A; \geqslant, \to, 1)$, 这里 $\geqslant$ 是 A 上的二元关系, $\to$ 是 A 上的二元运算, 1 是 A 中的一个常元, 且满足以下条件 ($\forall x, y, z \in A$):

(BCK1) $(z \to x) \to (y \to x) \geqslant y \to z$;

(BCK2) $(y \to x) \to x \geqslant y$;

(BCK3) $x \geqslant x$;

(BCK4) $x \geqslant y, y \geqslant x \Rightarrow x = y$;

(BCK5) $1 \geqslant x$;

(BCK6) $x \geqslant y \Leftrightarrow y \to x = 1$.

BCK–代数称为有界的, 如果存在元素 0 使得对任意 x 有 $0 \to x = 1$, 即 $0 \leqslant x$(这里 $\leqslant$ 的含义是: $x \leqslant y$ 当且仅当 $y \geqslant x$).

根据 2.2 节可换剩余格的基本性质容易得到如下结论.

定理 7.1.4　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是剩余格, 则 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 是有界 *BCK*–代数.

由此可知, 前面几章中提到的可换模糊逻辑代数, 如 *MV*–代数、*BL*–代数、R_0–代数、*MTL*–代数、*UL**–代数等, 都是特殊的有界 *BCK*–代数 (仅考虑蕴涵结构).

定理 7.1.5[245,248,249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 *BCK*–代数, 则成立 ($\forall x, y, z \in A$):

(1) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$;

(2) $x \leqslant y \Rightarrow y \to z \leqslant x \to z$;

(3) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(4) $x \leqslant y \to z \Rightarrow y \leqslant x \to z$;

(5) $x \leqslant y \to x$;

(6) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(7) $1 \to x = x$;

(8) $x \to y = ((x \to y) \to y) \to y$.

定理 7.1.6[249] 一个 (2, 0) 型代数 $(A; \to, 1)$ 是一个 BCK–代数当且仅当以下条件成立 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $(y \to z) \to ((z \to x) \to (y \to x)) = 1$;

(2) $(y \to 1) \to x = x$;

(3) $(x \to y = 1, y \to x = 1) \Rightarrow x = y$.

注 7.1.3 BCK–代数的定义中, 序关系不是独立的, 即可由 $\to$ 定义为: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y = 1$.

定义 7.1.9[249] BCK–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 称为是正关联的 (positive implicative), 如果满足 $(\forall x, y, z \in A)$:

(PI) $x \to (y \to z)=(x \to y) \to (x \to z)$.

定理 7.1.7[249] 设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是正关联的;

(2) $(\forall x, y \in A) x \to (x \to y) = x \to y$;

(3) $(\forall x, y \in A)(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (((x \to y) \to y) \to x) \to x$;

(4) $(\forall x, y \in A) x \to y = ((x \to y) \to y) \to (x \to y)$;

(5) $(\forall x, y \in A)(x \to y) \to ((x \to y) \to y) = (x \to y) \to y$;

(6) $(\forall x, y \in A)(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$.

定义 7.1.10[249] BCK–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 称为是可换的 (commutative), 如果满足 $(\forall x, y \in A)$:

(C) $(x \to y) \to y=(y \to x) \to x$.

定义 7.1.11[249] BCK–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 称为是关联的 (implicative), 如果满足 $(\forall x, y \in A)$:

(I) $(x \to y) \to x = x$.

定理 7.1.8[249] BCK–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是关联的当且仅当它既是可换的又是正关联的.

定理 7.1.9[249,258] 有界可换 BCK–代数与 MV–代数范畴等价; 有界关联 BCK–代数与 Boole 代数范畴等价.

定义 7.1.12[249]　设 $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是 BCK–代数, $a, b \in A$. 定义

$$S(a,b) = \{x \in A | a \leqslant b \rightarrow x\}.$$

显然, a, b, $1 \in S(a, b)$. 如果对任意 x, $y \in A$, $S(x, y)$ 均有最小元, 则称 $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是具有条件 (S) 的 BCK–代数, 并记 $S(x, y)$ 的最小元为 $x \otimes y$.

容易验证, 对于具有条件 (S) 的 BCK–代数 A, $(A; \otimes, 1)$ 构成幺半群.

定理 7.1.10[249]　设 $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是 BCK–代数, 如果存在 A 上的二元运算 • 使得对任意 x, y, $z \in A$ 有

(S) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \cdot y) \rightarrow z$,

则 A 具有条件 (S), 且运算 • 即是运算 $\otimes$.

显然, 对于任意可换剩余格 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$, 则 $(L; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是有界且具有条件 (S) 的 BCK–代数.

作为本节的结束, 简要介绍一下 BCI–代数的基本概念.

定义 7.1.13[245,258,259]　一个 BCI–代数是指代数结构 $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$, 这里 $\geqslant$ 是 A 上的二元关系, $\rightarrow$ 是 A 上的二元运算, 1 是 A 中的一个常元, 且满足以下条件 $(\forall x, y, z \in A)$:

(BCK1) $(z \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow x) \geqslant y \rightarrow z$;

(BCK2) $(y \rightarrow x) \rightarrow x \geqslant y$;

(BCK3) $x \geqslant x$;

(BCK4) $x \geqslant y, y \geqslant x \Rightarrow x = y$;

(BCK6) $x \geqslant y \Leftrightarrow y \rightarrow x = 1$.

(BCI) $x \geqslant 1 \Rightarrow x = 1$.

注 7.1.4　(1) 由定义知, BCK–代数与 BCI–代数的区别仅在于常元 1 上, 1 在 BCK–代数中是最大元, 而 1 在 BCI–代数中是极大元.

(2) 文献 [272] 指出, BCI–代数并非是与 **BCI** 逻辑相配套的代数结构, 应该是下述的 MPE–代数.

定义 7.1.14[272]　一个偏序代数 $(A; \leqslant, \rightarrow)$ 称为是 MPE–代数, 如果满足以下条件 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $x \leqslant x$;

(2) $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$;

(3) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x = z$;

(4) $(x \rightarrow x) \rightarrow y \leqslant y$;

(5) $x \rightarrow y \leqslant (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)$;

(6) $x \leqslant y \rightarrow z \Rightarrow y \leqslant x \rightarrow z$.

7.1.3 BCK–代数的滤子理论

这里论述的 “滤子”, 在 BCK–代数的原始文献中称为 “理想”, 因为本书采用了原始 BCK–代数的对偶定义.

定义 7.1.15[248,249] 设 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 是 BCK–代数, 非空子集 $F\subseteq A$ 称为 A 的一个滤子, 如果满足以下条件 $(\forall x,y\in A)$:

(1) $1\in F$;

(2) $(x\rightarrow y\in F,x\in F)\Rightarrow y\in F$.

注 7.1.5 (1) 显然, $\{1\}$与 A 均是 A 的滤子. 不等于 A 的滤子称为 A 的真滤子.

(2) BCK–代数 A 的一个非空子集若对 $\rightarrow$ 封闭, 则称为 A 的一个子代数. 在 BCK–代数中, 滤子必是子代数, 而子代数未必是滤子.

定理 7.1.11[249] 设 F 是 BCK–代数 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 的非空子集, 则 F 是 A 的一个滤子当且仅当对任意 $x,y\in F$ 有 $S(x,y)\in F$, 这里 $S(x,y)=\{a\in A|x\leqslant y\rightarrow a\}$.

推论 7.1.1[249] 设 F 是 BCK–代数 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 的非空子集, 则 F 是 A 的一个滤子当且仅当对任意 $x,y\in F$ 及 $z\in A$, $x\leqslant y\rightarrow z\Rightarrow z\in F$.

定理 7.1.12[249] 设 F 是 BCK–代数 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 的滤子, 定义 A 上的关系 $\sim$ 如下:

$$\forall x,y\in A,x\sim y \text{ 当且仅当 } (x\rightarrow y\in F \text{ 且 } y\rightarrow x\in F),$$

则 $\sim$ 是 A 上的同余关系, $(A/F;\geqslant,\rightarrow,C_1)$ 是一个 BCK–代数, 且 $C_1=F$, 这里 A/F 是 A 关于等价关系 $\sim$ 的商集, C_1 表示 1 所在的等价类.

定义 7.1.16[249] 设 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 是 BCK–代数, 非空子集 $F\subseteq A$ 称为 A 的一个正关联滤子 (positive implicative filter), 如果满足以下条件 $(\forall x,y,z\in A)$:

(1) $1\in F$;

(2) $x\rightarrow(y\rightarrow z)\in F$ 且 $x\rightarrow y\in F\Rightarrow x\rightarrow z\in F$.

定理 7.1.13[249] 设 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 是 BCK–代数, $F\subseteq A$, 则以下条件等价:

(1) F 是 A 的正关联滤子;

(2) F 是 A 的滤子, 且 $(\forall x,y\in A)x\rightarrow(x\rightarrow y)\in F\Rightarrow x\rightarrow y\in F$;

(3) F 是 A 的滤子, 且

$$(\forall x,y,z\in A)x\rightarrow(y\rightarrow z)\in F\Rightarrow(x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z)\in F;$$

(4) $1\in F$, 且 $(z\in F,z\rightarrow(x\rightarrow(x\rightarrow y))\in F)\Rightarrow x\rightarrow y\in F$;

(5) 商代数 $(A/F;\geqslant,\rightarrow,C_1)$ 是正关联 BCK–代数.

定理 7.1.14[249] 设 $(A;\geqslant,\rightarrow,1)$ 是 BCK–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是正关联 BCK–代数;

(2) $\{1\}$是 A 的正关联滤子;

(3) A 的所有滤子均是正关联的;

(4) 对任意 $a \in A$, $a\uparrow = \{x \in A | x \geqslant a\}$ 是 A 的滤子.

定义 7.1.17[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, 非空子集 $F \subseteq A$ 称为 A 的一个关联滤子 (implicative filter), 如果满足以下条件 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $1 \in F$;

(2) $z \in F$ 且 $z \to ((x \to y) \to x) \in F \Rightarrow x \in F$.

定理 7.1.15[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, $F \subseteq A$, 则以下条件等价:

(1) F 是 A 的关联滤子;

(2) F 是 A 的滤子, 且 $(\forall x, y \in A)$ $(x \to y) \to x \in F \Rightarrow x \in F$;

(3) 商代数 $(A/F; \geqslant, \to, C_1)$ 是关联 BCK–代数.

定理 7.1.16[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是关联 BCK–代数;

(2) $\{1\}$是 A 的关联滤子;

(3) A 的所有滤子均是关联的;

(4) 对任意 $a \in A$, $a\uparrow = \{x \in A | x \geqslant a\}$ 是 A 的关联滤子.

定义 7.1.18[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, 非空子集 $F \subseteq A$ 称为 A 的一个可换滤子 (commutative filter), 如果满足以下条件 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $1 \in F$;

(2) $z \in F$ 且 $z \to (y \to x) \in F \Rightarrow ((x \to y) \to y) \to x \in F$.

定理 7.1.17[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, $F \subseteq A$, 则以下条件等价:

(1) F 是 A 的可换滤子;

(2) F 是 A 的滤子, 且 $(\forall x, y \in A) y \to x \in F \Rightarrow ((x \to y) \to y) \to x \in F$;

(3) 商代数 $(A/F; \geqslant, \to, C_1)$ 是可换 BCK–代数.

定理 7.1.18[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, $F \subseteq A$, 则 F 是 A 的关联滤子当且仅当 F 既是 A 的可换滤子又是 A 的正关联滤子.

定理 7.1.19[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是可换 BCK–代数;

(2) $\{1\}$是 A 的可换滤子;

(3) A 的所有滤子均是可换的.

定义 7.1.19[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, $X \subseteq A$. 所有包含 X 的 A 的滤子之交也是 A 的滤子, 称为由 X 生成的滤子, 记为 (X].

定理 7.1.20[249]　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCK–代数, $X \subseteq A$, $X \neq \varnothing$, 则

$(X] = \{a \in A |$ 存在 $x_1, \cdots, x_n \in X$ 使得 $x_1 \to (\cdots \to (x_n \to a) \cdots) = 1\}$.

7.2 BIK$^+$ 逻辑、模糊 BIK$^+$ 逻辑与 $BIK^+(BCC)$–代数

7.2.1 BIK$^+$ 逻辑与 $BIK^+(BCC)$–代数

定义 7.2.1[265] 设 S 是命题变量之集, $F(S)$ 是由 S 生成的 $\to$ 型自由代数, 这里 $\to$ 是一个二元命题联结词. 称由以下推理规则和公理组成的形式系统为 **BIK$^+$** 逻辑:

推理规则

MP 规则: 从 A 及 $A \to B$ 推得 B;

BIK$^+$ 规则: 从 A 推得 $(A \to B) \to B$.

公理

(B) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(I) $A \to A$;

(K) $A \to (B \to A)$.

注 7.2.1 在 **BCK** 逻辑中 BIK$^+$ 规则成立. 事实上, 从公理 (C) 及 $(A \to B) \to (A \to B)$ 可得 $A \to ((A \to B) \to B)$. 据此应用 MP 规则即得 BIK$^+$ 规则. 因此, **BCK** 逻辑是 **BIK$^+$** 逻辑的一个扩张.

按通常的方式, 可在 **BIK$^+$** 逻辑系统中引入证明、定理、Γ–结论等概念. 以下用 $\vdash A$ 表示 A 是 **BIK$^+$** 逻辑系统中的定理, $\Gamma \vdash A$ 表示 A 是一个 Γ–结论.

定理 7.2.1 在 **BIK$^+$** 逻辑中, 以下结论成立:

(T1) 若 $\vdash B \to C$, 则 $\vdash (A \to B) \to (A \to C)$.

(T2) 若 $\Gamma = \{A \to B, B \to C\}$, 则 $\Gamma \vdash (A \to C)$. (HS 规则)

(T3) 若 $\vdash A \to B$, 则 $\vdash (B \to C) \to (A \to C)$.

(T4) 若 $\Gamma = \{A, C \to (A \to B)\}$, 则 $\Gamma \vdash (C \to B)$. (强 MP 规则)

证明 (T1) 的证明如下:

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (由 (B))

(2) $B \to C$ (已知)

(3) $(A \to B) \to (A \to C)$ (由 (1), (2) 及 MP 规则)

(T2) 的证明如下:

(1) $B \to C$ (已知)

(2) $(A \to B) \to (A \to C)$ (由 (T1))

(3) $A \to B$ (已知)

(4) $A \to C$ (由 (2), (3) 及 MP 规则)

(T3) 的证明如下:

(1) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (由 (B))

(2) $A \to B$　(已知)

(3) $((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to C)$　(由 (2), BIK$^+$ 规则)

(4) $(B \to C) \to (A \to C)$　(由 (1), (3) 及 (T2))

(T4) 的证明如下：

(1) $C \to (A \to B)$　(已知)

(2) A　(已知)

(3) $(A \to B) \to B$　(由 (2), BIK$^+$ 规则)

(4) $C \to B$　(由 (1), (3) 及 (T2))

定义 7.2.2　设 $A,B \in F(S)$. 称 A 与 B 是可证等价的, 如果 $\vdash A \to B$ 且 $\vdash B \to A$, 记为 $A \approx B$.

容易得到以下结果 (略去证明).

定理 7.2.2　关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的等价关系.

定理 7.2.3　关系 $\approx$ 是 $F(S)$ 上的一个 $\to$–型同余关系, 即若 $A \approx B$ 且 $C \approx D$, 则 $A \to C \approx B \to D$.

定义 7.2.3[250,251]　一个 *BCC*–代数 (或称 *BIK*$^+$–代数) 是指代数结构 $(L; \geqslant, \to, 1)$, 这里 $\geqslant$ 是 L 上的二元关系, $\to$ 是 L 上的二元运算, 1 是 L 中的一个常元, 且满足以下条件：

(BCC1) $(y \to z) \to (y \to x) \geqslant z \to x$;

(BCC2) $1 \to x = x$;

(BCC3) $x \geqslant x$;

(BCC4) $x \geqslant y, y \geqslant x \Rightarrow x = y$;

(BCC5) $1 \geqslant x$;

(BCC6) $x \geqslant y \Leftrightarrow y \to x=1$.

注 7.2.2　(1) 文献 [250]~[257] 中 *BCC*–代数的定义是上述定义的对偶形式.

(2) *BCK*–代数一定是 *BCC*–代数, 反之不真.

命题 7.2.1[250,252,255]　在 *BCC*–代数 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 中成立：$\forall x, y, z \in L$,

(1) $x \leqslant y \to x$;

(2) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$;

(3) $x \leqslant y \Rightarrow y \to z \leqslant x \to z$.

命题 7.2.2[255,269]　*BCC*–代数 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 是 *BCK*–代数当且仅当满足：

$$\forall x, y, z \in L, x \to (y \to z) = y \to (x \to z).$$

定理 7.2.4(Lindenbaum 代数)　$F(S)$ 关于可证等价关系构成的商代数 $[F]=F(S)/\approx=\{[A]|A \in F(S)\}$是一个 *BCC*–代数, 其常元为 $[I]$, 这里 I 是 **BIK**$^+$ 逻辑系统的一个定理.

定义 7.2.4 设 L 是一个 BCC–代数. 函数 v: $F(S) \to L$ 称为 $F(S)$ 在 L 上的一个 BCC–赋值, 如果 v 是一个从 $F(S)$ 到 L 的 $\to$–型同态.

$F(S)$ 在 L 上的所有 BCC 赋值记为 Ω_L.

定义 7.2.5 设 A 是 $F(S)$ 中的一个公式, L 是一个 BCC–代数. A 称为 L–重言式, 如果对任意 $v \in \Omega_L$ 有 $v(A)$=1, 记为 $\models_L A$. 如果 $A \to B$ 与 $B \to A$ 均是 L–重言式, 则称 A 与 B 逻辑等价.

容易验证, A 与 B 逻辑等价当且仅当 $v(A) = v(B)$, $\forall v \in \Omega_L$.

以下定理表明, **BIK$^+$** 逻辑系统关于语义 Ω_L 是可靠的 (略去证明).

定理 7.2.5 (**BIK$^+$** 的可靠性定理) 设 L 是一个 BCC–代数, 则 **BIK$^+$** 逻辑系统的每一个定理均是 L–重言式, 即 $\forall A \in F(S)$, 若 $\vdash A$, 则 $\models_L A$.

7.2.2 FBIK$^+$ 逻辑与非可换模糊逻辑

定义 7.2.6[266] 设 S 是命题变量之集, $F(S)$ 是由 S 生成的 $\to$ 型自由代数, 这里 $\to$ 是一个二元命题联结词. 称由以下推理规则和公理组成的形式系统为模糊 **BIK$^+$** 逻辑 (简称 **FBIK$^+$** 逻辑):

推理规则

MP 规则: 从 A 及 $A \to B$ 推得 B,

BIK$^+$ 规则: 从 A 推得 $(A \to B) \to B$.

公理

(B) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

(I) $A \to A$.

(K) $A \to (B \to A)$.

(F_n) $((A \to B)^n \to C) \to (((B \to A)^n \to C) \to C)$, 这里 n 为任意自然数.

显然, **FBIK$^+$** 逻辑是 **BIK$^+$** 逻辑的扩张, **FBCK** 逻辑是 **FBIK$^+$** 逻辑的扩张. 另外, 定理 7.2.1 中的 (T1)~(T4) 在 **FBIK$^+$** 中也成立.

定义 7.2.7[266] 一个 $BCC(BIK^+)$–代数 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 称为 $FBIK^+$–代数, 如果成立:

(F_n) $((x \to y)^n \to z) \to (((y \to x)^n \to z) \to z)$=1, 这里 n 为任意自然数.

下例表明, $BCC(BIK^+)$–代数未必是 $FBIK^+$–代数.

例 7.2.1[266] 设 $L = \{0, a, b, 1\}$, 其序关系为 $1 > a > b > 0$, 二元运算 $\to$ 定义如表 7.1 所示.

使用图 7.1 中 Matlab 程序可检验 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 称为 BIK^+–代数.

应用图 7.2 所示的 Matlab 程序可检验 L 满足条件 $((x \to y) \to z) \to (((y \to x) \to z) \to z)$=1, 即 n=1 时 (F_n) 成立. 但下述计算表明 n=2 时 (F_n) 不成立, 所以 L 不是 $FBIK^+$–代数:

表 7.1

$\to$	0	a	b	1
0	1	a	a	1
a	0	1	a	1
b	0	1	1	1
1	0	a	b	1

```
1     function y=Fbcc();
2 -   A=[4,2,2,4;1,4,2,4;1,4,4,4;1,2,3,4];
3 -   p=0;
4 -   for i=1:4
5 -       for j=1:4
6 -           for k=1:4
7 -               if A(A(j,k),A(A(i,j),A(i,k)))~=4;p=p+1;
8 -               end
9 -           end
10 -      end
11 -  end
12 -  if p==0; disp('true'); end
```

图 7.1 验证 BIK^+–代数的 Matlab 程序

```
1     function y=Fbcc_1()
2 -   A=[4,2,2,4;1,4,2,4;1,4,4,4;1,2,3,4];
3 -   p=0;
4 -   for i=1:4
5 -       for j=1:4
6 -           for k=1:4
7 -               if A(A(A(i,j),k),A(A(A(j,i),k),k))~=4;p=p+1;
8 -               end
9 -           end
10 -      end
11 -  end
12 -  if p==0; disp('true');end
```

图 7.2 验证 $FBIK^+$–代数的 Matlab 程序

$$(a \to 0)^2 \to b = (a \to 0) \to ((a \to 0) \to b) = a,$$

$$((0 \to a)^2 \to b) \to b = ((0 \to a) \to ((0 \to a) \to b)) \to b = b,$$

$$((a \to 0)^2 \to b) \to (((0 \to a)^2 \to b) \to b) = a \to b = a \neq 1.$$

定理 7.2.6(Lindenbaum 代数) 在 **FBIK$^+$** 中, $F(S)$ 关于可证等价关系构成的商代数 $[F]=F(S)/\approx=\{[A]|A \in F(S)\}$是一个 $FBIK^+$–代数, 其常元为 $[I]$, 这里 I 是 **FBIK$^+$** 逻辑系统的一个定理.

可类似于定义 7.2.4、定义 7.2.5 定义赋值、重言式等概念 (将 BCC–代数换成 $FBIK^+$–代数即可), 同样可得到如下结果.

定理 7.2.7 (FBIK$^+$ 的可靠性定理) 设 L 是一个 $FBIK^+$–代数, 则 FBIK$^+$ 逻辑系统的每一个定理均是 L–重言式, 即 $\forall A \in F(S)$, 若 $\vdash A$, 则 $\models_L A$.

下面讨论非可换模糊逻辑系统与 FBIK$^+$ 逻辑的关系.

定理 7.2.8[266] 以下各项是 psMTL 中的定理或规则:

(T1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi, \{\varphi \rightsquigarrow \psi, \psi \rightsquigarrow \chi\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \chi$;

(T2) $\{\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi), \chi \rightsquigarrow \upsilon\} \vdash \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon)$,
$\{\varphi \rightsquigarrow (\psi \to \chi), \chi \to \upsilon\} \vdash \varphi \rightsquigarrow (\psi \to \upsilon)$;

(T3) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi), \varphi \rightsquigarrow ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$;

(T4) $\varphi \to (\psi \to \varphi), \varphi \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \varphi)$;

(T5) $\varphi \to \varphi, \varphi \rightsquigarrow \varphi$;

(T6) $\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi), \varphi \rightsquigarrow \psi \vdash (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$;

(T7) $(\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)), (\varphi \rightsquigarrow (\psi \to \chi)) \rightsquigarrow (\psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi))$.

证明 (T1) 的证明如下:

(1) $\psi \to \chi$

(2) $(\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ (由定义 6.2.9 (A1))

(3) $(\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi)$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $\varphi \to \psi$

(5) $\varphi \to \chi$ (由 (4), (3), MP 规则)

即 $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$. 同理可证 $\{\varphi \rightsquigarrow \psi, \psi \rightsquigarrow \chi\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \chi$.

(T2) 的证明如下:

(1) $\chi \rightsquigarrow \upsilon$

(2) $(\chi \rightsquigarrow \upsilon) \rightsquigarrow ((\psi \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \upsilon))$ (由定义 6.2.9 (A1))

(3) $(\psi \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \upsilon)$ (由 (1), (2), MP 规则)

(4) $((\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon)) \to ((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon)))$ (由定义 6.2.9 (A1))

(5) $(\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon))$ (由 (3), (4), MP 规则)

(6) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)$

(7) $\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon)$ (由 (6), (5), MP 规则)

此即 $\{\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi), \chi \rightsquigarrow \upsilon\} \vdash \varphi \to (\psi \rightsquigarrow \upsilon)$. 同理可证 $\{\varphi \rightsquigarrow (\psi \to \chi), \chi \to \upsilon\} \vdash \varphi \rightsquigarrow (\psi \to \upsilon)$.

(T3) 的证明如下:

(1) $((\varphi \to \psi)\&\varphi) \to (\varphi \wedge \psi)$ (由定义 6.2.9 (A4a))

(2) $((\varphi \to \psi)\&\varphi) \rightsquigarrow (\varphi \wedge \psi)$ (由 (1), Imp 规则)

(3) $(((\varphi \to \psi)\&\varphi) \rightsquigarrow (\varphi \wedge \psi)) \rightsquigarrow (\varphi \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow (\varphi \wedge \psi)))$ (由定义 6.2.9 (A5))

(4) $\varphi \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow (\varphi \wedge \psi))$　　(由 (2), (3), MP 规则)

(5) $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$4b), ($\underline{A}$4c))

(6) $(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow \psi$　　(由 (5), Imp 规则)

(7) $\varphi \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$　　(由 (4), (6), (T3))

(8) $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$　　(由 (7), Imp 规则)

即 $\varphi \to ((\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi)$. 类似地, $\varphi \rightsquigarrow ((\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi)$.

(T4) 的证明如下:

(1) $(\varphi \& \psi) \to \varphi$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$2))

(2) $((\varphi \& \psi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi))$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$5))

(3) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$　　(由 (1), (2), MP 规则)

同理可证 $\varphi \rightsquigarrow (\psi \rightsquigarrow \varphi)$.

(T5) 的证明如下:

(1) $0 \to \varphi$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$7))

(2) $(0 \to \varphi) \to (((0 \to \varphi) \to \varphi) \rightsquigarrow \varphi)$　　(由 (T3))

(3) $((0 \to \varphi) \to \varphi) \rightsquigarrow \varphi$　　(由 (1), (2), MP 规则)

(4) $((0 \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi$　　(由 (3), Imp 规则)

(5) $(((0 \to \varphi) \to \varphi) \to \varphi) \rightsquigarrow ((\varphi \to ((0 \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
　　(由 ($\underline{A}$1))

(6) $(\varphi \to ((0 \to \varphi) \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$　　(由 (4), (5), MP 规则)

(7) $\varphi \to ((0 \to \varphi) \to \varphi)$　　(由 (T4))

(8) $\varphi \to \varphi$　　(由 (6), (7), MP 规则)

类似地, $\varphi \rightsquigarrow \varphi$.

(T6) 的证明如下:

(1) $(\psi \to \chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$1))

(2) $(\psi \to \chi) \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$　　(由 (1), Imp 规则)

(3) $(((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (((\psi \to \chi) \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi)$
$\to (\varphi \to \chi))) \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)))$　　(由定义 6.2.9($\underline{A}$1))

(4) $(\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$　　(由 (T3))

(5) $((\psi \to \chi) \rightsquigarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))) \to ((\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$
　　(由 (3), (4), MP 规则)

(6) $(\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)$　　(由 (2), (5), MP 规则)

于是, $\varphi \to \psi \vdash (\psi \to \chi) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)$. 同理可证 $\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash (\psi \rightsquigarrow \chi) \to (\varphi \rightsquigarrow \chi)$.

(T7) 的证明如下:

(1) $((\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi) \to ((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi))$　　(由定义 6.2.9 ($\underline{A}$1))

(2) $\psi \rightsquigarrow ((\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$　　(由 (T3))

(3) $\psi \to ((\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)$ (由 (2), Imp 规则)

(4) $(\psi \to ((\psi \rightsquigarrow \chi) \to \chi)) \to (\psi \to ((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi)))$

(由 (1), ($\underline{\text{A}}$1), MP 规则)

(5) $\psi \to ((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi))$ (由 (3), (4), (T1))

(6) $(((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$

(由 (T6))

(7) $(\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (((\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\varphi \to \chi)) \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$

(由 (T3))

(8) $(\varphi \to (\psi \rightsquigarrow \chi)) \to (\psi \rightsquigarrow (\varphi \to \chi))$ (由 (6), (7), (T1))

类似地, $(\varphi \rightsquigarrow (\psi \to \chi)) \rightsquigarrow (\psi \to (\varphi \rightsquigarrow \chi))$.

定理 7.2.9[266] 对任意自然数 n, m, 以下各项是 **psMTL** 中的定理或规则:

(T8) $(\psi \to \chi) \to ((\varphi^n \to \psi) \to (\varphi^n \to \chi)), (\psi \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow ((\varphi^n \rightsquigarrow \psi) \rightsquigarrow (\varphi^n \rightsquigarrow \chi))$;

(T9) $\psi \to \chi \vdash (\varphi^n \to \psi) \to (\varphi^n \to \chi), \psi \rightsquigarrow \chi \vdash (\varphi^n \rightsquigarrow \psi) \rightsquigarrow (\varphi^n \rightsquigarrow \chi)$;

(T10) $(\varphi^n \to (\psi^m \rightsquigarrow \chi)) \to (\psi^m \rightsquigarrow (\varphi^n \to \chi))$,

$(\varphi^n \rightsquigarrow (\psi^m \to \chi)) \rightsquigarrow (\psi^m \to (\varphi^n \rightsquigarrow \chi))$;

(T11) $\varphi^n \to (\psi^m \rightsquigarrow \chi) \vdash \psi^m \rightsquigarrow (\varphi^n \to \chi), \varphi^n \rightsquigarrow (\psi^m \to \chi) \vdash \psi^m \to (\varphi^n \rightsquigarrow \chi)$;

(T12) $(\varphi \to \psi) \rightsquigarrow \psi \vdash (\varphi^n \to \psi) \rightsquigarrow \psi, (\varphi \rightsquigarrow \psi) \to \psi \vdash (\varphi^n \rightsquigarrow \psi) \to \psi$;

(T13) $\varphi \to \psi \vdash ((\chi^n \to \psi) \rightsquigarrow \upsilon) \to ((\chi^n \to \varphi) \rightsquigarrow \upsilon)$,

$\varphi \rightsquigarrow \psi \vdash ((\chi^n \rightsquigarrow \psi) \to \upsilon) \rightsquigarrow ((\chi^n \rightsquigarrow \varphi) \to \upsilon)$.

证明 仅证每一项的第一部分.

(T8) 若 $n = 1$, 由定义 6.2.9 ($\underline{\text{A}}$1) 知 $(\psi\to\chi)\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi))$ 是定理. 假设 $\vdash(\psi\to\chi)\to((\varphi^n\to\psi)\to(\varphi^n\to\chi))$, 则由定义 6.2.9 ($\underline{\text{A}}$1) 得

$$((\varphi^n \to \psi) \to (\varphi^n \to \chi)) \to ((\varphi \to (\varphi^n \to \psi)) \to (\varphi \to (\varphi^n \to \chi))),$$

应用 (T1) 有 $(\psi\to\chi)\to((\varphi\to(\varphi^n\to\psi))\to(\varphi\to(\varphi^n\to\chi)))$, 即

$$(\psi \to \chi) \to ((\varphi^{n+1} \to \psi) \to (\varphi^{n+1} \to \chi)).$$

由数学归纳法知 $\vdash(\psi\to\chi)\to((\varphi^n\to\psi)\to(\varphi^n\to\chi))$.

(T9) 由 (T8) 及 MP 规则即得.

(T10) 当 $n = 1$ 时, 需要证明 $\vdash(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$. 此时对 m 应用数学归纳法. 若 $m = 1$, 由 (T7) 知结论成立. 假设 $\vdash(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$ 成立, 下证对于 m+1 结论也成立. 事实上, 由 Imp 规则得 $(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$. 应用定义 6.2.9 ($\underline{\text{A}}$1) 可得 $(\psi\rightsquigarrow(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))\rightsquigarrow(\psi\rightsquigarrow(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi)))$. 另一方面, 由 (T7) 及 Imp 规则可推得 $(\varphi\to(\psi\rightsquigarrow(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))\rightsquigarrow(\psi\rightsquigarrow(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))$.

于是, 由 (T1) 有 $(\varphi\to(\psi\rightsquigarrow(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))\rightsquigarrow(\psi\rightsquigarrow(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi)))$. 再应用 Imp 规则, $(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$, 即 $(\varphi\to(\psi^{m+1}\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^{m+1}\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$. 所以, $\vdash(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to\chi))$, 即对任意自然数 m 及 n=1, (T10) 成立.

现假设对自然数 n 有 $\vdash(\varphi^n\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi^n\to\chi))$. 由定义 6.2.9 (A̲1) 及 MP 规则得 $(\varphi\to(\varphi^n\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))\to(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi^n\to\chi)))$. 另一方面, 连续应用 (T7) m 次可得 $(\varphi\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi^n\to\chi)))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to(\varphi^n\to\chi)))$. 由此并应用 (T1) 有

$$(\varphi\to(\varphi^n\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi)))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi\to(\varphi^n\to\chi))),$$

即 $(\varphi^{n+1}\to(\psi^m\rightsquigarrow\chi))\to(\psi^m\rightsquigarrow(\varphi^{n+1}\to\chi))$. 从而, (T10) 对所有自然数 m 及 n 成立.

(T11) 由 (T10) 及 MP 规则即得.

(T12) 当 n=1 时显然成立. 假设结论对自然数 n 成立, 以下证明 $(\varphi\to\psi)\rightsquigarrow\psi\vdash(\varphi^{n+1}\to\psi)\rightsquigarrow\psi$. 事实上,

(1) $(\varphi\to\psi)\rightsquigarrow\psi$ (已知)
(2) $(\varphi^n\to\psi)\rightsquigarrow\psi$ (由 (1) 及归纳假设)
(3) $(\varphi^n\to\psi)\to\psi$ (由 (2), Imp 规则)
(4) $(\varphi\to(\varphi^n\to\psi))\to(\varphi\to\psi)$ (由 (3), (A̲1) 及 MP 规则)
(5) $(\varphi\to(\varphi^n\to\psi))\rightsquigarrow(\varphi\to\psi)$ (由 (4), Imp 规则)
(6) $((\varphi\to\psi)\rightsquigarrow\psi)\to((\varphi\to(\varphi^n\to\psi))\rightsquigarrow\psi)$ (由 (5), (T6))
(7) $(\varphi^{n+1}\to\psi)\rightsquigarrow\psi$ (由 (1), (6), MP 规则)

于是, 由数学归纳法知 (T12) 对所有自然数 n 成立.

(T13) 的证明如下:

(1) $\varphi\to\psi$ (已知)
(2) $(\chi^n\to\varphi)\to(\chi^n\to\psi)$ (由 (T9))
(3) $(\chi^n\to\varphi)\rightsquigarrow(\chi^n\to\psi)$ (由 (2), Imp 规则)
(4) $((\chi^n\to\psi)\rightsquigarrow\upsilon)\to((\chi^n\to\varphi)\rightsquigarrow\upsilon)$ (由 (T6))

定理 7.2.10[266] 以下公式是 **psMTL** 中的定理:

(T14) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$, $((\varphi\rightsquigarrow\psi)\rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow(((\psi\rightsquigarrow\varphi)\rightsquigarrow\chi)\to\chi)$.

证明 (T14) 前半部分的证明如下:

(1) $((\psi\to\varphi)\to\chi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\to\chi)$ (由定义 6.2.9 (A̲6))
(2) $((\psi\to\varphi)\to\chi)\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\to\chi)$ (由 (1), Imp 规则)
(3) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (2), (T7), MP 规则)

同理可证 $\vdash((\varphi\rightsquigarrow\psi)\rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow(((\psi\rightsquigarrow\varphi)\rightsquigarrow\chi)\to\chi)$.

定理 7.2.11[266] 对任意自然数 n, m, 以下公式是 **psMTL** 中的定理:

$(\mathrm{F}_{m,n,\to})$ $((\psi\to\varphi)^m\to\chi)\to(((\varphi\to\psi)^n\to\chi)\to\chi)$;

$(\mathrm{F}_{m,n,\rightsquigarrow})$ $((\psi\rightsquigarrow\varphi)^m \rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow(((\varphi\rightsquigarrow\psi)^n \rightsquigarrow\chi)\rightsquigarrow\chi)$.

证明 $(\mathrm{F}_{m,n,\to})$ 的证明如下：

(1) $((\psi\to\varphi)\to\chi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (T14))

(2) $(\varphi\to\psi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (T3))

(3) $((\varphi\to\psi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\to(((\psi\to\varphi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
$\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$ (由 (T14))

(4) $((\psi\to\varphi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (2), (3), MP 规则)

(5) $((\psi\to\varphi)^{n-1}\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (4), (T12))

(6) $((\psi\to\varphi)^{n-1}\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
$\to(((\psi\to\varphi)^{n-1}\to((\psi\to\varphi)\to\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
(由 (1), (T12))

(7) $((\psi\to\varphi)^{n-1}\to((\psi\to\varphi)\to\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (5), (6), MP 规则)

(8) $((\psi\to\varphi)^{n}\to\chi)\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (7))

(9) $((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)$ (由 (T5))

(10) $(\psi\to\varphi)^{m}\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (9), (T11))

(11) $((\psi\to\varphi)^{m}\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)$
$\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$ (由 (8))

(12) $((\varphi\to\psi)\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (10), (11), MP 规则)

(13) $((\varphi\to\psi)^{n-1}\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (12), (T12))

(14) $((\psi\to\varphi)^{n}\to\chi)\to(((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (8), Imp 规则)

(15) $((\varphi\to\psi)\to\chi)\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{n}\to\chi)\to\chi)$ (由 (14), (T7), MP 规则)

(16) $(((\varphi\to\psi)^{n-1}\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
$\to(((\varphi\to\psi)^{n-1}\to((\varphi\to\psi)\to\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
(由 (15), (T13))

(17) $((\varphi\to\psi)^{n-1}\to((\varphi\to\psi)\to\chi))\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$
(由 (13), (16), MP 规则)

(18) $((\varphi\to\psi)^{n}\to\chi)\rightsquigarrow(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (17))

(19) $((\varphi\to\psi)^{n}\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi)$ (由 (18), Imp 规则)

(20) $(((\varphi\to\psi)^{n}\to\chi)\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow\chi))$
$\to(((\psi\to\varphi)^{m}\to\chi)\rightsquigarrow(((\varphi\to\psi)^{n}\to\chi)\to\chi))$ (由 (T7))

(21) $((\psi \to \varphi)^m \to \chi) \rightsquigarrow (((\varphi \to \psi)^n \to \chi) \to \chi)$　　(由 (19), (20), MP 规则)

(22) $((\psi \to \varphi)^m \to \chi) \to (((\varphi \to \psi)^n \to \chi) \to \chi)$　　(由 (21), Imp 规则)

同理可证 $\vdash ((\psi \rightsquigarrow \varphi)^m \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow (((\varphi \rightsquigarrow \psi)^n \rightsquigarrow \chi) \rightsquigarrow \chi)$.

由定理 7.2.11 可得如下重要结果.

定理 7.2.12　逻辑系统 **psMTL** 是模糊 **BIK$^+$** 逻辑的双重扩张, 这里的 “双重” 是指系统 **psMTL** 关于 $\to$ 和 $\rightsquigarrow$ 的蕴涵片段均构成 **FBIK$^+$** 逻辑.

一般地, 以下结果成立.

定理 7.2.13　每一个非可换模糊逻辑系统 (**psBL**, **psMTL**, **PL**, **PL***, **PUL***) 均是 **FBIK$^+$** 逻辑的一种 “双重” 扩张, 这里的 “双重” 是指非可换模糊逻辑系统关于 $\to$ 的蕴涵片段是一个 **FBIK$^+$** 系统, 同时关于 $\rightsquigarrow$ 的蕴涵片段也是一个 **FBIK$^+$** 系统.

图 7.3 揭示了各种模糊逻辑系统及其相配套的代数结构之间的内在联系:

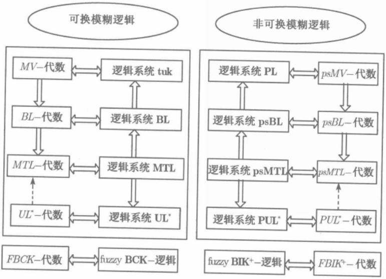


图 7.3　模糊逻辑及相关代数结构全景图

注 7.2.3　图 7.3 中的空心单向箭头表示 “语义扩张”(对于形式系统而言) 或 “推广”(对于代数系统而言) 之意, 双向箭头表示 “对应” 之意, 单向虚箭头表示不考虑添加的投影算子和新的否定算子时 UL^*–代数是 MTL–代数、PUL^*–代数是 $psMTL$–代数.

7.2.3　$BZ/BCC(BIK^+)$–代数的滤子理论

BCC–代数是 BCK–代数的推广、BZ–代数 (或称弱 BCC–代数, GB–代数) 是 BCI–代数的推广, 一个自然的想法是沿用 BCK/BCI–代数的滤子概念建立 $BCC/$

BZ–代数的商结构理论, 然而有反例说明这是办不到的 (本书作者在国际上第一个构造了这样的反例, 正式发表在与波兰学者 Dudek 合作的论文 [255] 中), 因此需要建立 BCC/BZ–代数滤子的新理论. 关于 BZ–代数的滤子 (原文使用术语 "理想") 及其商代数结构, 最早在文献 [274], [275] 中完成; 关于 BCC–代数的滤子及同余关系, 文献 [255] 得到更细致的一些新结果. 关于 BCK/BCI 与 BCC/BZ–代数之间的关系以及它们的滤子结构, 文献 [276]~[285] 有深入研究, 成果丰富. 本节仅介绍若干基本概念和结论, 并着重证明本书涉及的模糊逻辑代数的滤子 (正规滤子) 可以统一在 BCC–代数滤子 (正规滤子) 的框架之下.

定义 7.2.8[252,253,276] 一个 BZ–代数 (或称 GB–代数) 是指满足以下条件的 (2, 0) 型代数 $(L; \to, 1)$:

(1) $(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y))=1$;

(2) $1 \to x = x$;

(3) $x \to y = y \to x = 1 \Rightarrow x = y$.

注 7.2.4 (1) 上述定义是原始文献中定义的对偶形式, 这是为了便于与逻辑系统中的 "蕴涵" 联结词相对应.

(2) 若在 BZ–代数 $(L; \to, 1)$ 中定义序关系 $\leqslant$ 如下: $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \to y = 1$, 则 $(L; \leqslant)$ 为偏序集.

(3) 可以证明, 1 是 BZ–代数 $(L; \to, 1)$ 中的极大元, 即 $(\forall x \in L) 1 \leqslant x \Rightarrow x = 1$.

(4) 对于任意 BCK/BCI–代数及 BCC–代数 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 来说, $(L; \to, 1)$ 均构成 BZ–代数.

(5) 如果存在 $0 \in L$ 使得 $(\forall x \in L)\ 0 \leqslant x$, 则称 BZ–代数 $(L; \to, 1)$ 是有界的. 可以证明, 有界 BZ–代数必是 BCC (BIK^+)–代数. 可用图 7.4 表示这些代数结构之间的关系.

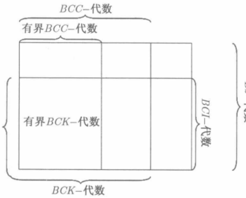


图 7.4 BCK/BCI–代数及 BCC/BZ–代数之间的关系

定理 7.2.14[252,253,276]　BZ–代数 $(L; \to, 1)$ 中成立 $(\forall x, y, z, u \in L)$:

(1) $x \to x = 1$;

(2) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$;

(3) $x \leqslant y \Rightarrow y \to z \leqslant x \to z$;

(4) $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$;

(5) $x \leqslant y \to z \Rightarrow x \leqslant (u \to y) \to (u \to z)$;

(6) $x \leqslant y \to z \Rightarrow z \to u \leqslant x \to (y \to u)$;

(7) $x \leqslant y \Rightarrow y' \leqslant x'$;

(8) $x \to y \leqslant (y \to x)'$;

(9) $x \leqslant x''$;

(10) $x''' = x'$;

(11) $y' = (x \to y) \to x'$;

(12) $y'' = x' \to (y \to x)'$;

(13) $(x \to y)'' = x'' \to y''$,

其中, x' 表示 $x \to 1$.

定义 7.2.9[255,275]　设 F 是 BZ–代数 (或 BCC–代数)$(L; \to, 1)$ 的非空子集, 称 F 是 L 的一个滤子 (原文称为 BCK–理想), 如果满足:

(1) $1 \in F$;

(2) $x \to y \in F, x \in F \Rightarrow y \in F$.

上述滤子沿用了 BCK/BCI–代数的滤子概念. 下例表明, 按上述定义的滤子, 按通常的方式确定的关系 $\sim_F$ 不是同余关系, 其中, $\sim_F$ 定义为

(*) $x \sim_F y$ 当且仅当 $(x \to y \in F, y \to x \in F)$.

例 7.2.2[255]　设 $L = \{0, a, b, c, 1\}$, L 上的运算 $\to$ 按表 7.2 定义.

表 7.2

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	a	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	a	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

则 $(L; \to, 1)$ 是一个 BZ–代数 (实际上是一个有界 BCC–代数). 令 F={1, c}, 易于验证 F 是 L 的一个滤子, 但按前述 (*) 方式定义的关系 $\sim_F$ 不是同余的, 因为

$$a \sim_F b \text{ 且 } 0 \sim_F 0, \text{ 而 } (a \to 0) \to (b \to 0) \notin F, \text{ 即 } (a \to 0) \sim_F (b \to 0) \text{ 不成立.}$$

定义 7.2.10[255,275] 设 F 是 BZ–代数 (或 BCC–代数)$(L;\to,1)$ 的非空子集, 称 F 是 L 的一个正规滤子 (文献 [255] 称为 BCC–理想), 如果满足:

(1) $1\in F$;

(2) $x\to(y\to z)\in F, y\in F\Rightarrow x\to z\in F$.

注 7.2.5 正规滤子必是滤子, 滤子未必是正规滤子.

定理 7.2.15[255,275] 设 F 是 BZ–代数 (或 BCC–代数)$(L;\to,1)$ 的正规滤子, 在 L 上定义如下二元关系:

$$x\sim y \text{ 当且仅当 } x\to y\in F \text{ 且 } y\to x\in F, \forall x,y\in L,$$

则 $\sim$ 是 L 上的同余关系, 且商集 $L/F=\{C_x|x\in A\}$关于自然定义的运算构成 BZ–代数 (或 BCC–代数), 这里 $C_x=\{y\in L|\ x\sim y\}$; $\forall x, y\in L, C_x\to C_y=C_{x\to y}$; L/F 的最大元 $C_1=F$.

定理 7.2.16 设 F 是 BZ–代数 (或 BCC–代数)$(L;\to,1)$ 的滤子, 则 F 是 L 的一个正规滤子当且仅当满足: $\forall x, y\in L, x\in F\Rightarrow(x\to y)\to y\in F$.

证明 假设 F 是 L 的正规滤子, $x\in F$, 则由定理 7.2.14(1) 得 $(x\to y)\to(x\to y)=1\in F$. 由定义 7.2.10(2) 知 $(x\to y)\to y\in F$.

反之, 假设滤子 F 满足上述条件. 若 $y, x\to(y\to z)\in F$. 由 $y\in F$, 应用所给的条件得 $(y\to z)\to z\in F$. 而由定义 7.2.8(1) 有

$$((y\to z)\to z)\to((x\to(y\to z))\to(x\to z))=1\in F.$$

两次应用定义 7.2.9(2) 得 $x\to z\in F$, 这说明 F 是 L 的正规滤子.

对于基于 t–模或伪 t–模的模糊逻辑系统, 其相应的代数结构均是某类特殊的剩余格. 下面的系列结论说明, 剩余格的滤子、正规滤子实际上是 BCC–代数滤子、正规滤子的直接应用.

定理 7.2.17 设 H 是剩余格 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,\rightsquigarrow)$ 的非空子集, 则 H 是 L 的正规滤子当且仅当满足:

(1) $1\in H$;

(2) $y, x\to(y\rightsquigarrow z)\in H\Rightarrow x\rightsquigarrow z\in H$;

(3) $y, x\rightsquigarrow(y\to z)\in H\Rightarrow x\to z\in H$.

证明 假设 H 是 L 的正规滤子, 则由命题 2.4.1 知 $1\in H$, 即 (1) 成立. 如果 $y, x\to(y\rightsquigarrow z)\in H$, 则由定理 2.4.1(7) 得 $y\rightsquigarrow(x\to z)=x\to(y\rightsquigarrow z)\in H$. 由 $y\in H$ 及 $y\rightsquigarrow(x\to z)\in H$, 应用命题 2.4.1(F4) 得 $x\to z\in H$. 再应用定义 2.4.6 (F5) 得 $x\rightsquigarrow z\in H$. 这说明 (2) 成立. 同理可证 (3) 成立.

反之, 假设 H 满足 (1), (2) 及 (3). 如果 $x, x\to y\in H$, 则有 $x, 1\rightsquigarrow(x\to y)\in H$, 应用 (3) 得 $1\to y\in H$, 即 $y\in H$, 这说明 H 是滤子 (根据命题 2.4.1(F3)). 如果

$x \to y \in H$, 应用定理 2.4.1(7) 得 $x \to((x \to y) \rightsquigarrow y)=(x \to y) \rightsquigarrow (x \to y)=1\in H$, 应用 (2) 得 $x \rightsquigarrow y \in H$. 类似地, 从 $x \rightsquigarrow y \in H$ 可推得 $x \to y \in H$. 这说明 H 是 L 的正规滤子.

定理 7.2.18　设 H 是剩余格 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, \rightsquigarrow)$ 的非空子集, 则 H 是 L 的正规滤子当且仅当满足:

(1) $1\in H$;

(2) $y, x \to (y \to z) \in H \Rightarrow x \to z \in H$;

(3) $y, x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) \in H \Rightarrow x \rightsquigarrow z \in H$.

证明　假设 H 是 L 的正规滤子, 则由定理 7.2.17 及定义 2.4.6 (F5) 易知 (1), (2) 及 (3) 成立.

反之, 假设 H 满足 (1), (2) 和 (3). 如果 $x, x \to y \in H$, 则有 $x, 1\to (x \to y) \in H$, 应用 (2) 得 $1\to y \in H$, 即 $y \in H$, 这说明 H 是滤子 (根据命题 2.4.1(F3)). 如果 $x \to y \in H$, 应用定理 2.4.1(5) 得 $x \rightsquigarrow((x \to y) \rightsquigarrow y)=1\in H$, 应用 (3) 得 $x \rightsquigarrow y \in H$. 类似地, 从 $x \rightsquigarrow y \in H$ 可得 $x \to y \in H$. 这说明定义 2.4.6(F5) 成立, 即 H 是 L 的正规滤子.

对比上述结论与 BZ–代数 (或 BCC–代数) 正规滤子的定义 7.2.10 易得:

定理 7.2.19　设 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是一个剩余格, H 是 L 的非空子集. H 是 L 的正规滤子当且仅当同时满足下列条件:

(1) H 是 BCC–代数 $(L; \geqslant, \to, 1)$ 的正规滤子;

(2) H 是 BCC–代数 $(L; \geqslant, \rightsquigarrow, 1)$ 的正规滤子.

应用定理 7.2.16 及定理 7.2.19 可得

推论 7.2.1　设 H 是剩余格 $(L; \vee, \wedge, \otimes,\to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 的滤子, 则 H 是正规的当且仅当满足: $\forall x, y \in L, x \in H \Rightarrow (x \to y) \to y \in H$ 且 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y \in H$.

综上所述, 与各种可换模糊逻辑系统配套的代数结构, 其滤子理论可统一在 BCK–代数滤子这一统一框架之下; 同样, 与各种非可换模糊逻辑系统配套的代数结构, 其正规滤子理论可统一在 BCC–代数正规滤子这一统一框架之下.

7.3　伪 Hoop 与伪 BCK–代数 ($psBCK$–代数)

Hoop 作为一类特殊的代数结构, 最早起源于 20 世纪 70 年代 Büchi 与 Owens 的工作, 后来一些学者对其进行了系统研究 [286,287]; 2003 年, 文献 [288] 论述了 Hoop 与模糊逻辑代数的密切关系; 2005 年, 文献 [289] 对 Hoop 进行了非可换推广, 引入伪 Hoop 的概念; 2008 年, 文献 [290] 讨论了伪 Hoop 与非可换模糊逻辑代数的关系. 对于伪 BCK–代数 ($psBCK$–代数), 最早出现在文献 [291] 中, 它是 BCK–代数的非可换推广, 其思想来自对非可换模糊逻辑代数的研究, 文献 [292],

[293] 对 $psBCK$–代数作了长篇论述. 伪 BCK–代数与源于量子逻辑的伪差分偏序集 (pseudo-difference posets) 有密切关系, 文献 [294], [295] 对此进行了详细分析. 本节主要介绍伪 Hoop 的正规素滤子定理、$psBCK$–代数及其各种子类的基本概念.

7.3.1 伪 Hoop 及其正规素滤子定理

定义 7.3.1[289] 一个 (2, 2, 2, 0) 型代数结构 $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 称为伪 Hoop (pseudo hoop), 如果它满足以条件 $(\forall x, y, z \in M)$:

(1) $x \otimes 1 = x = 1 \otimes x$;

(2) $x \to x = 1 = x \rightsquigarrow x$;

(3) $(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)$;

(4) $(x \otimes y) \rightsquigarrow z = y \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$;

(5) $(x \to y) \otimes x = (y \to x) \otimes y = x \otimes (x \rightsquigarrow y) = y \otimes (y \rightsquigarrow x)$.

如果 $\otimes$ 运算是可换的 (等价地, $\to = \rightsquigarrow$), 则称 $(M; \otimes, \to, 1)$ 是 Hoop.

以下直接用 M 表示伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$.

对于伪 Hoop M, 如果定义关系 $\leqslant$ 如下: $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \to y = 1$ (等价地, $x \rightsquigarrow y = 1$), 则 $\leqslant$ 是 M 上的偏序. 一个伪 Hoop M 称为是有界的, 如果存在元素 $0 \in M$ 使得 $(\forall x \in M)$ $0 \leqslant x$. 容易看出, 任意 $psBL$–代数均是有界伪 Hoop.

对任意 $x \in M$ 及整数 $n \geqslant 0$, 归纳定义 x^n 如下: $x^0 = 1$; 当 $n \geqslant 1$ 时 $x^n = x^{n-1} \otimes x$.

命题 7.3.1[289,295] 在任意伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 中成立 $(\forall x, y, z \in M)$:

(1) $(M; \leqslant)$ 是交半格 (meet-semilattice) 且 $x \wedge y = (x \to y) \otimes x = x \otimes (x \rightsquigarrow y)$;

(2) $x \otimes y \leqslant z$ iff $x \leqslant y \to z$ iff $y \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(3) $x \otimes y \leqslant x, y$, $x \otimes y \leqslant x \wedge y$;

(4) $x \leqslant y \to x$, $x \leqslant y \rightsquigarrow x$;

(5) $x \to x = x \rightsquigarrow x = 1$;

(6) $1 \to x = 1 \rightsquigarrow x = x$;

(7) $x \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y$, $x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$;

(8) $x \to y \leqslant (y \to z) \rightsquigarrow (x \to z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (y \rightsquigarrow z) \to (x \rightsquigarrow z)$;

(9) $x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (z \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow y)$;

(10) $x \leqslant y$ 蕴涵 $z \to x \leqslant z \to y$ 及 $z \rightsquigarrow x \leqslant z \rightsquigarrow y$;

(11) $x \leqslant y$ 蕴涵 $y \to z \leqslant x \to z$ 及 $y \rightsquigarrow z \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(12) $[(y \to x) \rightsquigarrow x] \to x = y \to x$, $[(y \rightsquigarrow x) \to x] \rightsquigarrow x = y \rightsquigarrow x$;

(13) $x \to (y \to z) = x \otimes y \to z$, $x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) = y \otimes x \rightsquigarrow z$;

(14) $x \leqslant y$ 蕴涵 $x \otimes z \leqslant y \otimes z$ 及 $z \otimes x \leqslant z \otimes y$;

(15) $x \to y \leqslant x \otimes z \to y \otimes z$, $x \rightsquigarrow y \leqslant z \otimes x \rightsquigarrow z \otimes y$;

(16) $x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)$, $x \rightsquigarrow \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \rightsquigarrow y_i)$, 这里假定出现的上确定存在;

(17) $x \to (y \rightsquigarrow z) = y \rightsquigarrow (x \to z)$, $x \rightsquigarrow (y \to z) = y \to (x \rightsquigarrow z)$.

定义 7.3.2[289]　伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的子集 F 称为 M 的一个滤子, 如果 F 满足:

(1) $x, y \in F$ 蕴涵 $x \otimes y \in F$;

(2) $x \leqslant y$ 且 $x \in F$ 蕴涵 $y \in F$.

伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的滤子 F 称为是真的, 如果 $F \neq M$.

命题 7.3.2[289]　设 F 是伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的子集, 则以下各项等价:

(1) F 是 M 的滤子;

(2) $1\in F$; $(x, x \to y \in F)$ 蕴涵 $y \in F$;

(3) $1\in F$; $(x, x \rightsquigarrow y \in F)$ 蕴涵 $y \in F$.

定义 7.3.3[289]　设 X 是伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的子集, 即 $X \subseteq M$. 所有包含 X 的滤子之交仍是 M 的滤子, 称为由 X 生成的滤子, 记为 $\langle X\rangle$.

定理 7.3.1[289]　设 X 是伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的子集, 则

$$\langle X\rangle = \{y \in M \mid \text{存在自然数 } n \text{ 及 } x_1, x_2, \cdots, x_n \in X \text{ 使得 } y \geqslant x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n\}.$$

定义 7.3.4[289]　伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的滤子 H 称为是正规的, 如果对任意 $x, y \in M$ 有

(N) $x \to y \in F$ 当且仅当 $x \rightsquigarrow y \in F$.

定理 7.3.2[289]　设 H 是伪 Hoop $(M; \otimes, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 的滤子, 则以下条件等价:

(1) H 是正规滤子;

(2) $\forall x \in M$, $x \otimes H = H \otimes x$.

定义 7.3.5[289]　一个伪 Hoop M 称为是基本的 (basic), 如果对任意 x, y, $z \in M$ 有

(B1) $(x \to y) \to z \leqslant [(y \to x) \to z] \to z$,

(B2) $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow z \leqslant [(y \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow z] \rightsquigarrow z$.

命题 7.3.3[289]　在任意基本伪 Hoop M 中成立 $(\forall x, y, z \in M)$:

(1) $(M; \vee, \wedge)$ 是分配格;

(2) $x \vee y = [(x \to y) \rightsquigarrow y] \wedge [(y \to x) \rightsquigarrow x]$;

(3) $x \vee y = [(x \rightsquigarrow y) \to y] \wedge [(y \rightsquigarrow x) \to x]$;

(4) $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$, $(x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$;

(5) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$, $(x \vee y) \rightsquigarrow z = (x \rightsquigarrow z) \wedge (y \rightsquigarrow z)$;

(6) $z \otimes (x \wedge y) = (z \otimes x) \wedge (z \otimes y)$, $(x \wedge y) \otimes z = (x \otimes z) \wedge (y \otimes z)$.

定理 7.3.3[289] 有界基本伪 Hoop 与 $psBL$–代数等价.

定理 7.3.4[290] 设 M 是基本伪 Hoop, 则

(1) $x \vee (y \otimes z) \geqslant (x \vee y) \otimes (x \vee z), \forall x, y, z \in M$;

(2) 如果 F 是 M 的滤子, $x \in M$, 那么

$\langle F \cup \{x\} \rangle = \{y \in M|$ 存在自然数 k, 整数 $n_1, n_2, \cdots, n_k \geqslant 0$ 及 $f_1, f_2, \cdots, f_k \in F$ 使得 $(f_1 \otimes x^{n_1}) \otimes (f_2 \otimes x^{n_2}) \otimes \cdots \otimes (f_k \otimes x^{n_k}) \leqslant y\}$.

证明 (1) 对任意 $x, y, z \in M$, 应用命题 7.3.3 (6) 及命题 7.3.1(3) 可得

$$
\begin{aligned}
(x \vee y) \otimes (x \vee z) &= [(x \vee y) \otimes x] \vee [(x \vee y) \otimes z] \\
&= (x \otimes x) \vee (y \otimes x) \vee (x \otimes z) \vee (y \otimes z) \\
&\leqslant x \vee x \vee x \vee (y \otimes z) = x \vee (y \otimes z).
\end{aligned}
$$

(2) 由定理 7.3.1 易证 (2) 为真.

定义 7.3.6[290] 伪 Hoop M 的一个滤子称为是素的 (prime), 如果对任意 $x, y \in M$ 有 $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$.

定理 7.3.5[290] 设 F 是基本伪 Hoop M 的一个滤了, 则以下条件等价:

(1) F 是素的;

(2) $\forall x, y \in M, x \rightsquigarrow y \in F$ 或 $y \rightsquigarrow x \in F$;

(3) $\forall x, y \in M, x \vee y \in F$ 蕴涵 $x \in F$ 或 $y \in F$.

证明 (1)⇒(3). 对任意 $x, y \in M$, 由 (1) 知 $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$. 以 $x \to y \in F$ 为例证明. 此时应用命题 7.3.3(2) 可得

$$x \vee y = [(x \to y) \rightsquigarrow y] \wedge [(y \to x) \rightsquigarrow x] \leqslant (x \to y) \rightsquigarrow y.$$

若 $x \vee y \in F$, 则 $(x \to y) \rightsquigarrow y \in F$. 进而, 由 $x \to y \in F$ 即得 $y \in F$. 这说明 (3) 成立.

(3)⇒(1). 根据命题 7.3.3(4) 得 $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 \in F$. 应用 (3) 即得 $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$. 这说明 (1) 成立.

类似地, 可以证明 (2)⇒(3) 且 (3) ⇒(2). 所以 (1), (2) 及 (3) 等价.

引理 7.3.1[289] 设 M 是伪 Hoop 且 $x, y, z \in M$, 则

(1) 如果 $x \vee y$=1, 那么 $x \otimes y = x \wedge y$;

(2) 如果 $x \vee y$=1, 那么 $x^n \vee y^n$=1 对任意自然数 n 成立.

定理 7.3.6(素滤子定理)[290] 设 F 是基本伪 Hoop M 的一个滤子, S 是 M 的一个格理想且满足 $F \cap S = \varnothing$, 则必存在 M 的素滤子 P 满足 $F \subseteq P$ 且 $P \cap S = \varnothing$.

证明 令 $\wp$=$\{Q|Q$ 是 M 的滤子且满足 $F \subseteq Q, Q \cap S = \varnothing\}$. 由 Zorn 引理知, $\wp$ 有极大元 P. 假设 P 不是 M 的素滤子, 则存在 $x, y \in M$ 使得 $x \to y \notin P$ 且

$y \to x \notin P$. 这样, M 的生成滤子 $\langle P \cup \{x \to y\}\rangle$ 及 $\langle P \cup \{y \to x\}\rangle$ 均不属于 $\wp$. 于是, $\exists a, b \in M$ 使得 $a \in S \cap \langle P \cup \{x \to y\}\rangle$ 且 $b \in S \cap \langle P \cup \{y \to x\}\rangle$. 应用定理 7.3.4 (2) 有

存在整数 $k \geqslant 1$, $n_1, n_2, \cdots, n_k \geqslant 0$ 及 $f_1, f_2, \cdots, f_k \in P$ 使得 $[f_1 \otimes (x \to y)^{n_1}] \otimes [f_2 \otimes (x \to y)^{n_2}] \otimes \cdots \otimes [f_k \otimes (x \to y)^{n_k}] \leqslant a$;

存在整数 $l \geqslant 1$, $m_1, m_2, \cdots, m_l \geqslant 0$ 及 $g_1, g_2, \cdots, g_l \in P$ 使得 $[g_1 \otimes (y \to x)^{m_1}] \otimes [g_2 \otimes (y \to x)^{m_2}] \otimes \cdots \otimes [g_l \otimes (y \to x)^{m_l} \leqslant b$.

令 $f = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$, $g = g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_l$, 则由定义 7.3.2 (1) 得 $f, g \in P$. 取 $n = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$, $m = \max\{m_1, m_2, \cdots, m_l\}$, 则由命题 7.3.1 (14) 得

$[f \otimes (x \to y)^n]^k \leqslant [f_1 \otimes (x \to y)^{n_1}] \otimes [f_2 \otimes (x \to y)^{n_2}] \otimes \cdots \otimes [f_k \otimes (x \to y)^{n_k}] \leqslant a$;

$[g \otimes (y \to x)^m]^l \leqslant [g_1 \otimes (y \to x)^{m_1}] \otimes [g_2 \otimes (y \to x)^{m_2}] \otimes \cdots \otimes [g_l \otimes (y \to x)^{m_l}] \leqslant b$.

令 $h = f \otimes g \in P$, $t = \max\{n, m\}$, 则 $[h \otimes (x \to y)^t]^k \leqslant a$, $[h \otimes (y \to x)^t]^l \leqslant b$. 应用定理 7.3.4 (1), 命题 7.3.3 (4) 及引理 7.3.1 (2) 得

$$\begin{aligned}
c &= a \vee b \\
&\geqslant [h \otimes (x \to y)^t]^k \vee [h \otimes (y \to x)^t]^l \\
&\geqslant \{\{[h \otimes (x \to y)^t] \vee [h \otimes (y \to x)^t]\}^k\}^l \\
&\geqslant \{[h \otimes (x \to y)^t] \vee [h \otimes (y \to x)^t]\}^{kl} \\
&= \{h \otimes [(x \to y)^t \vee (y \to x)^t]\}^{kl} \\
&= (h \otimes 1)^{kl} = h^{kl} \in P.
\end{aligned}$$

从而, $c \in P$. 但 $c = a \vee b \in S$ (因 S 是一个格理想), 故 $S \cap P \neq \varnothing$. 这是一个矛盾.

由上述定理可得如下推论: 设 F 是基本伪 Hoop M 的一个滤子, $a \in M \backslash F$, 则必存在 M 的素滤子 P 满足 $F \subseteq P$ 且 $a \notin P$.

注 7.3.1　定理 7.3.1 实际上是文献 [77] 中 Theorem 4.28 的推广 (从 $psBL$–代数推广到基本伪 Hoop).

定义 7.3.7[290]　一个基本伪 Hoop M 称为是优的 (well), 如果对任意 $x, y, z \in M$ 成立:

(W1) $x \vee y=1$ 蕴涵 $x \vee (z \rightsquigarrow y \otimes z)=1$;

(W2) $x \vee y=1$ 蕴涵 $x \vee (z \to z \otimes y)=1$.

命题 7.3.4[290]　设 M 是 $psBL^r$–代数, 则 M 是优基本伪 Hoop.

证明　因为 $psBL^r$–代数必是基本伪 Hoop, 故只需证明 (W1) 及 (W2) 成立. 设 $x \vee y=1$, 则

$$\begin{aligned} y &= 1 \to y \\ &= (x \vee y) \to y \\ &= (x \to y) \vee (y \to y) \qquad \text{(由命题 7.3.3(5))} \\ &= (x \to y) \vee 1 \\ &= x \to y. \end{aligned}$$

类似地, $y \to x = x$. 由定义 6.2.2 得 $x \vee (z \rightsquigarrow y \otimes z) = (y \to x) \vee [z \rightsquigarrow (x \to y) \otimes z] = 1$. 这说明 (W1) 成立. 同理可证 (W2) 成立.

定义 7.3.8[290] 伪 Hoop 的一个素滤子称为是极小的, 如果它是包含滤子$\{1\}$的所有素滤子组成的偏序集的极小元.

定理 7.3.7[290] 设 P 是基本伪 Hoop M 的极小素滤子, 则

$$P = \cup\{a^{\perp} | a \notin P\},\ 这里\ a^{\perp} = \cup\{x \in M | x \vee a = 1\}.$$

证明 令 $Q = \cup\{a^{\perp} | a \notin P\}$, 证明 $P = Q$.

(1) $Q \subseteq P$: 若 $x \in Q$, 则 $x \in a^{\perp}$, 其中, $a \notin P$. 这就是说, $x \vee a = 1 \in P$. 因为 P 是素滤子 (且 $a \notin P$), 所以 $x \in P$. 这说明 $Q \subseteq P$.

(2) Q 是 M 的一个滤子: 显然, $1 \in Q$. 如果 $x, y \in Q$, 则有 $x \in a^{\perp}$, $y \in b^{\perp}$, 其中, $a \notin P$, $b \notin P$. 这说明 $x \vee a = 1$ 且 $y \vee b = 1$. 因为 P 是素滤子且 $a \notin P$, $b \notin P$, 故 $a \vee b \notin P$. 由定理 7.3.4 (1) 得 $(x \otimes y) \vee (a \vee b) \geqslant [x \vee (a \vee b)] \otimes [y \vee (a \vee b)] = 1 \otimes 1 = 1$, 即 $(x \otimes y) \vee (a \vee b) = 1$. 亦即 $x \otimes y \in (a \vee b)^{\perp}$, 这说明 $x \otimes y \in Q$. 若 $x \leqslant y$ 且 $x \in Q$, 则存在 $a \notin P$ 使得 $x \in a^{\perp}$. 由 $x \in a^{\perp}$ 可得 $x \vee a = 1$. 从而, $y \vee a \geqslant x \vee a = 1$. 这说明 $y \in Q$. 于是由定义 7.3.2 知 Q 是 M 的滤子.

(3) Q 是素滤子: 假设 $x \vee y = 1$ 且 $x \notin Q$, 则对任意 $a \notin P$ 有 $x \vee a \neq 1$. 如果 $x \in P$, 则由 $(M \backslash P) \cup \{x\}$生成的格 $(M; \vee, \wedge)$ 的格理想 S 是真的, 即 $1 \notin S$(否则, 若 $1 \in S$, 则有 $a \in M \backslash P$ 使 $x \vee a = 1$, 即 $x \in a^{\perp}$ 且 $a \notin P$, $x \in Q$. 这是一个矛盾). 应用定理 7.3.6 于滤子$\{1\}$及格理想 S, 必存在 M 的素滤子 P_1 使得 $P_1 \cap S = \varnothing$. 于是, $P_1 \subseteq P$, $x \in P$, $x \notin P_1$, 这与 P 是极小素滤子矛盾. 这说明 $x \notin P$. 从而, 由 $x \vee y = 1$ 及 $x \notin P$ 得 $y \in x^{\perp}$, 即 $y \in Q$. 所以, Q 是素滤子.

结合 (1) 和 (3) 得 $P = Q$.

定理 7.3.8[290] 设 P 是优基本伪 Hoop M 的极小素滤子, 则 P 是正规的.

证明 (1) 对任意 $a \in M$, $a^{\perp}$ 是正规滤子: 由定理 7.3.4(1) 容易检验 $a^{\perp}$ 是滤子. 假设 $x \in a^{\perp} \otimes y$, 则有 $t \in a^{\perp}$ 使得 $x = t \otimes y$. 于是, $a \vee t = 1$. 由定义 7.3.7(W2) 可推得 $a \vee (y \rightsquigarrow t \otimes y) = 1$. 此即 $y \rightsquigarrow t \otimes y \in a^{\perp}$. 应用定义 7.3.1 (v) 及命题 7.3.1(1) 得, $y \otimes (y \rightsquigarrow t \otimes y) = y \wedge (t \otimes y)$. 因为 $t \otimes y \leqslant y$ (应用命题 7.3.1 (3)), 故 $y \otimes (y \rightsquigarrow t \otimes y) = t \otimes y = x$. 这说明 $x \in y \otimes a^{\perp}$, 即 $a^{\perp} \otimes y \subseteq y \otimes a^{\perp}$. 类似地, 可以证明 $y \otimes a^{\perp} \subseteq a^{\perp} \otimes y$. 由定理 7.3.2 知 $a^{\perp}$ 是 M 的正规滤子, $\forall a \in M$.

(2) P 是正规滤子: 由定理 7.3.7 知 $P=\cup\{a^{\perp}|a\notin P\}$. 若 $x\to y\in P$, 则存在 $a\notin P$ 使得 $x\to y\in a^{\perp}$. 由 (1), $a^{\perp}$ 是 M 的正规滤子. 故 $x\rightsquigarrow y\in a^{\perp}\subseteq P$. 反之, 若 $x\rightsquigarrow y\in P$, 则存在 $a\notin P$ 使得 $x\rightsquigarrow y\in a^{\perp}$. 应用 (1), $a^{\perp}$ 是 M 的正规滤子. 于是, $x\to y\in a^{\perp}\subseteq P$. 这说明 P 是 M 的正规滤子.

定理 7.3.9 (优基本伪 Hoop 的正规素滤子定理)[290] 设 M 是一个优基本伪 Hoop 且 $a\in M-\{1\}$, 则存在 M 的正规滤子 H 使得 $a\notin H$.

证明 首先证明每一个素滤子必包含一个极小素滤子. 假设 P 是 M 的素滤子. 令 $\wp$ 是包含在 P 中的所有素滤子组成的集, 即 $\wp=\{Q|Q$ 是 M 的素滤子且 $Q\subseteq P\}$. 因为 $P\in\wp$, 故 $\wp\neq\varnothing$. 同时, $(\wp,\subseteq)$ 是一个偏序集, 且 $\wp$ 的每一个链$\{Q_i\}_{i\in I}$ 均有下界 $\bigcap\limits_{i\in I}Q_i$. 所以, 由 Zorn 引理, $\wp$ 有极小元 Q. 显然, Q 是一个极小素滤子.

由定理 7.3.6 后的推论知, 存在素滤子 P 满足 $a\notin P$. 应用刚证明的结果, 有极小素滤子 $H\subseteq P$. 由定理 7.3.8 知 H 是正规滤子且 $a\notin H$.

注 7.3.2 (1) 上述结论可看成文献 [150] 中 Theorem 3.6 的推广 (即将 BL–代数的素滤子定理推广到优基本伪 Hoop 上, 后者较 $psBL^r$–代数更广泛).

(2) 关于伪 Hoop 的一些其他研究结果, 见文献 [296], [297].

7.3.2 *psBCK*–代数与非可换模糊逻辑代数

定义 7.3.9[291,292] 一个伪 BCK–代数 (简记为 $psBCK$–代数) 是指代数结构 $(A;\geqslant,\to,\rightsquigarrow,1)$, 这里 $\geqslant$ 是 A 上的二元关系, $\to,\rightsquigarrow$ 是 A 上的二元运算, 1 是 A 中的一个常元, 且满足以下条件 $(\forall x,y,z\in A)$:

(I) $(z\to x)\rightsquigarrow(y\to x)\geqslant y\to z$, $(z\rightsquigarrow x)\to(y\rightsquigarrow x)\geqslant y\rightsquigarrow z$;

(II) $(y\to x)\rightsquigarrow x\geqslant y$, $(y\rightsquigarrow x)\to x\geqslant y$;

(III) $x\geqslant x$;

(IV) $1\geqslant x$;

(V) $x\geqslant y, y\geqslant x\Rightarrow x=y$;

(VI) $x\geqslant y\Leftrightarrow y\to x=1\Leftrightarrow y\rightsquigarrow x=1$.

称伪 BCK–代数 ($psBCK$–代数) 是可换的, 如果 $(\forall x,y\in A)x\to y=x\rightsquigarrow y$. 显然, 任意可换 $psBCK$–代数是一个 BCK–代数.

命题 7.3.5[291,292] 在伪 BCK–代数 $(A;\geqslant,\to,\rightsquigarrow,1)$ 中成立 $(\forall x,y,z\in A)$:

(1) $x\leqslant y\Rightarrow y\to z\leqslant x\to z$, $y\rightsquigarrow z\leqslant x\rightsquigarrow z$;

(2) $x\leqslant y, y\leqslant z\Rightarrow x\leqslant z$;

(3) $z\rightsquigarrow(y\to x)=y\to(z\rightsquigarrow x)$;

(4) $z\leqslant y\to x\Leftrightarrow y\leqslant z\rightsquigarrow x$;

(5) $z\to x\leqslant(y\to z)\to(y\to x)$, $z\rightsquigarrow x\leqslant(y\rightsquigarrow z)\rightsquigarrow(y\rightsquigarrow x)$;

(6) $x \leqslant y \to x$, $x \leqslant y \rightsquigarrow x$;

(7) $1 \to x = x$, $1 \rightsquigarrow x = x$;

(8) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$, $z \rightsquigarrow x \leqslant z \rightsquigarrow y$;

(9) $((y \to x) \rightsquigarrow x) \to x = y \to x$, $((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow x = y \rightsquigarrow x$.

定理 7.3.10[291,292] 代数结构 $(A; \geqslant, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 是一个 $psBCK$–代数当且仅当满足以下条件:

(1) $(A; \geqslant, 1)$ 是一个有最大元 1 的偏序集;

(2) $(\forall x \in A)$ $1 \to x = x = 1 \rightsquigarrow x$;

(3) $(\forall x, y, z \in A)$ $(y \to z) \rightsquigarrow [(z \to x) \rightsquigarrow (y \to x)] = 1$,

$(y \rightsquigarrow z) \to [(z \rightsquigarrow x) \to (y \rightsquigarrow x)] = 1$;

(4) $(\forall x, y \in A) x \to y = 1 \Leftrightarrow x \rightsquigarrow y = 1 \Leftrightarrow x \leqslant y$;

(5) $(\forall x, y, z \in A) x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$, $z \rightsquigarrow x \leqslant z \rightsquigarrow y$.

定义 7.3.10[291,292] $psBCK$–代数 $(A; \geqslant, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 称为具有条件 (pP) (表示 pseudo product) 或简称 $psBCK$(pP)–代数, 如果满足:

(pP) 对任意 $x, y \in A$, $\min\{z \in A | x \leqslant y \to z\} = \min\{z \in A | y \leqslant x \rightsquigarrow z\}$存在 (记为 $x \otimes y$).

注 7.3.3 容易验证, 任意全序 $psBCK$–代数具有条件 (pP); $psBCK$(pP)–代数是可换的当且仅当 $(\forall x, y \in A) x \otimes y = y \otimes x$.

定理 7.3.11[292] 设 $(A; \geqslant, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 是 $psBCK$(pP)–代数, $x \otimes y$ 定义为 $\min\{z \in A | x \leqslant y \to z\}$或 $\min\{z \in A | y \leqslant x \rightsquigarrow z\}$, 则 A 满足条件

(pRP) $(\forall x, y, z \in A) x \otimes y \leqslant z \Leftrightarrow x \leqslant y \to z \Leftrightarrow y \leqslant x \rightsquigarrow z$.

定理 7.3.12[292,273] 设 $(A; \geqslant, \to, \rightsquigarrow, 1)$ 是 $psBCK$(pP)–代数, $x \otimes y$ 定义为 $\min\{z \in A | x \leqslant y \to z\}$或 $\min\{z \in A | y \leqslant x \rightsquigarrow z\}$, 则在 A 中成立 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $x \otimes y \leqslant x, y$;

(2) $(x \to y) \otimes x \leqslant x, y$, $x \otimes (x \rightsquigarrow y) \leqslant x, y$;

(3) $y \leqslant x \to (y \otimes x)$, $y \leqslant x \rightsquigarrow (x \otimes y)$;

(4) $x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (z \otimes x) \rightsquigarrow (z \otimes y)$;

(5) $x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z)$, $(y \rightsquigarrow z) \otimes x \leqslant y \rightsquigarrow (z \otimes x)$;

(6) $(y \to z) \otimes (x \to y) \leqslant x \to z$, $(x \rightsquigarrow y) \otimes (y \rightsquigarrow z) \leqslant x \rightsquigarrow z$;

(7) $x \to (y \to z) = (x \otimes y) \to z$, $x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) = (y \otimes x) \rightsquigarrow z$;

(8) $(x \otimes z) \to (y \otimes z) \leqslant x \to (z \to y)$, $(z \otimes x) \rightsquigarrow (z \otimes y) \leqslant x \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow y)$;

(9) $x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z)$, $x \rightsquigarrow y \leqslant (z \otimes x) \rightsquigarrow (z \otimes y)$;

(10) $x \leqslant y \Rightarrow x \otimes z \leqslant y \otimes z$, $z \otimes x \leqslant z \otimes y$;

(11) $0 \otimes x = x \otimes 0 = 0$.

定理 7.3.13[291,292]　设 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 是 $psBCK$(pP)–代数, 而

$$x \otimes y = \min\{z \in A | x \leqslant y \rightarrow z\} = \min\{z \in A | y \leqslant x \rightsquigarrow z\},$$

则 $(A; \geqslant, \otimes, 1)$ 是一个偏序整独异点 (partially ordered integral monoid), 即 $\otimes$ 运算是具有最大元 1 的偏序集 $(A; \geqslant, 1)$ 上的伪 t–模.

注 7.3.4　$psBCK$(pP)–代数与偏序剩余整独异点范畴等价.

定义 7.3.11[273]　一个 $psBCK$–代数 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 称为是有界的 (bounded), 如果存在一个元素 0 使得 $(\forall x \in A) 0 \leqslant x$, 即 $0 \rightarrow x = 0 \rightsquigarrow x = 1$.

在有界 $psBCK$–代数中定义如下两个非运算:

$(\forall x \in A) x^- = x \rightarrow 0,\ x^\sim = x \rightsquigarrow 0$.

定理 7.3.14[273]　在任意有界 $psBCK$–代数 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 中成立 $(\forall x, y, z \in A)$:

(1) $1^- = 0 = 1^\sim,\ 0^- = 1 = 0^\sim$;

(2) $x \leqslant (x^-)^\sim,\ x \leqslant (x^\sim)^-$;

(3) $x \rightarrow y \leqslant y^- \rightsquigarrow x^-,\ x \rightsquigarrow y \leqslant y^\sim \rightarrow x^\sim$;

(4) $x \leqslant y \Rightarrow y^- \leqslant x^-$ 且 $y^\sim \leqslant x^\sim$;

(5) $y \rightsquigarrow x^- = x \rightarrow y^\sim$;

(6) $((x^-)^\sim)^- = x^-,\ ((x^\sim)^-)^\sim = x^\sim$.

定理 7.3.15[292]　在任意有界 $psBCK$(pP)–代数 A 中成立: $x \otimes x^\sim = 0 = x^- \otimes x$.

定义 7.3.12[292]　一个 $psBCK$–代数 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 称为是 $psBCK$–格, 如果偏序集 $(A; \geqslant)$ 构成格. 一个 $psBCK$(pP)–代数 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 称为是 $psBCK$(pP)–格, 如果偏序集 $(A; \geqslant)$ 构成格.

注 7.3.5　容易验证, 有界 $psBCK$(pP)–格与剩余格范畴等价. 因此那些基于剩余格的模糊逻辑代数 (如 $psBL$–代数、$psMTL$–代数、PL^*–代数等) 均是有界 $psBCK$(pP)–格的特例.

定理 7.3.16[292]　对于 $psBCK$(pP)–格 $(A; \geqslant, \rightarrow, \rightsquigarrow, 1)$ 来说, 以下条件彼此等价:

(1) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1,\ (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$;　(称为条件 (pprel))

(2) $[(x \vee y) \rightarrow y] \vee [(x \vee y) \rightarrow x] = 1,\ [(x \vee y) \rightsquigarrow y] \vee [(x \vee y) \rightsquigarrow x] = 1$;
(称为条件 ($\text{pprel}_\vee$))

(3) $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z),\ x \rightsquigarrow (y \vee z) = (x \rightsquigarrow y) \vee (x \rightsquigarrow z)$;
(称为条件 ($\text{pprel}_{\Rightarrow\vee}$))

(4) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z),\ (x \wedge y) \rightsquigarrow z = (x \rightsquigarrow z) \vee (y \rightsquigarrow z)$.
(称为条件 ($\text{pprel}_{\wedge\Rightarrow}$))

注 7.3.6　(1) 易知, $psMTL$–代数是满足上述条件的 $psBCK$(pP)–格.

(2) 文献 [298] 在可换情形下得到类似结果 (需要说明的是, 定理 7.3.16 并不要求 $psBCK$(pP)–格 A 有界).

(3) 关于 $psBCK$–代数与模糊逻辑代数结构之间关系的更详细分析, 可阅读文献 [292], [293], [299].

7.4 MTL–代数与 $psMTL$–代数的若干研究

7.4.1 关于 MTL–代数的滤子

本节介绍作者及合作者在 MTL–代数方面的部分研究成果, 它们来自文献 [300]~[310]. 由于篇幅的限制, 略去了一些结果的详细证明过程.

1. MTL–代数的 Boole 滤子、理想及二部 MTL–代数

定义 7.4.1 设 L 是 MTL–代数. L 的一个滤子 F 称为是 Boole 滤子, 如果对任意 $x \in L, x \vee x' \in F$.

命题 7.4.1 设 F 和 A 是 MTL–代数 L 的两个滤子, 且 $F \subseteq A$. 如果 F 是 Boole 滤子, 则 A 也是 Boole 滤子.

注 7.4.1 我们在文献 [300] 中首次引入 R_0–代数的 Boole 滤子概念 (它是 [311] 中 BL–代数 Boole 演绎系统概念的推广), 定义 7.4.1 将这一概念推广到 MTL–代数中. 从下面的讨论中可以看到, 文献 [300] 中的大部分结果均可加以推广.

定理 7.4.1 设 L 是 MTL–代数, F 是 L 的一个滤子, 则以下条件彼此等价:

(1) F 是 Boole 滤子;

(2) 对任意 $x, y, z \in L, x \to (z' \to y) \in F$, $y \to z \in F \Rightarrow x \to z \in F$;

(3) 对任意 $x, y \in L, (x \to y) \to x \in F \Rightarrow x \in F$.

证明 (1)⇒(2). 设 $x \to (z' \to y) \in F, y \to z \in F$. 由定理 2.2.1(8) 得

$$y \to z \leqslant (z' \to y) \to (z' \to z) \leqslant (x \to (z' \to y)) \to (x \to (z' \to z)).$$

应用命题 2.2.1 (F4) 即得 $x \to (z' \to z) \in F$. 应用定理 2.2.7 (2) 得

$$z' \vee z \leqslant ((z' \to z) \to z) \wedge ((z \to z') \to z') \leqslant (z' \to z) \to z.$$

于是 $(z' \to z) \to z \in F$. 又据定理 2.2.1(8) 及 (4) 得 $x \to (z' \to z) \leqslant ((z' \to z) \to z) \to (x \to z)$. 所以 $x \to z \in F$, 即 (2) 成立.

(2)⇒(3). 设 $(x \to y) \to x \in F$. 因 $x' = x \to 0 \leqslant x \to y$, 故 $(x \to y) \to x \leqslant x' \to x$, 这里应用了定理 2.2.1 (8)、(4) 及 0 为最小元. 于是, 据定义 2.2.4 (F2) 得 $x' \to x \in F$. 从而

$$1 \to (x' \to x') = 1 \in F, \text{ 且 } x' \to x \in F.$$

应用 (2) 得 $1\to x\in F$, 即 $x\in F$. 这说明 (3) 成立.

(3)⇒(1). 首先证明 (3) ⇒ $(x'\to x)\to x\in F$, $\forall x\in L$(注意, 这里的证明与文献 [300] 中相应定理的证明不完全相同, 这里没有使用 R_0–代数的特有性质). 因为

$$(((x'\to x)\to x)\to 0)\to((x'\to x)\to x)=((x'\to x)\to x)'\to((x'\to x)\to x)$$
$$=(x'\to x)\to(((x'\to x)\to x)'\to x) \quad \text{(由定理 2.2.1 (4))}$$
$$\geqslant((x'\to x)\to x)'\to x' \quad \text{(由定理 2.2.1 (8))}$$
$$\geqslant x\to((x'\to x)\to x) \quad \text{(由定理 2.2.1 (8))}$$
$$=1, \quad \text{(由定理 2.2.1 (4) 及 (1))}$$

即 $(((x'\to x)\to x)\to 0)\to((x'\to x)\to x)\in F$. 由 (iii) 得 $(x'\to x)\to x\in F$.

现在证明 $x\vee x'\in F$, $\forall x\in L$. 因为 $x\leqslant x\vee x'$, 所以 $(x'\to x)\to x\leqslant(x'\to x)\to(x\vee x')$, 这里应用了定理 2.2.1 (8)、(4)、(1). 于是 $(x'\to x)\to(x\vee x')\in F$(应用定义 2.2.4(F2)). 又

$$((x\vee x')\to x)\to(x\vee x')=((x\to x)\wedge(x'\to x))\to(x\vee x') \quad \text{(由定理 2.2.1 (7))}$$
$$=(1\wedge(x'\to x))\to(x\vee x')=(x'\to x)\to(x\vee x')\in F.$$

于是, 由 (3) 得 $x\vee x'\in F$. 这说明 (1) 成立.

注 7.4.2　实际上, 上述证明过程仅用到可换剩余格的性质, 故可以同样在可换剩余格中引入 Boole 滤子概念且上述结论也成立 [309].

定理 7.4.2　设 L 是 MTL–代数, F 是 L 的 Boole 滤子, 则

$$\forall x,y,z\in L,\quad x\to(y\to z)\in F,\quad x\to y\in F\Rightarrow x\to z\in F.$$

定理 7.4.3　设 L 是 MTL–代数, F 是 L 的 Boole 滤子, $\forall a\in M$, 定义 $F_a=\{x|a\to x\in F\}$, 则 F_a 是包含 F 和 a 的最小 MP–滤子.

定理 7.4.4　设 L 是 MTL–代数, $F\subseteq L$, 则以下条件等价:

(1) F 是 Boole 滤子;

(2) L/F 是布尔代数.

在 MTL–代数 L 中, 一个真滤子 M 称为是极大的, 如果对任意的滤子 F, $M\subseteq F\subseteq L\Rightarrow F=M$ 或 $F=L$. 仿照文献 [312] 中 Proposition 4, Proposition 5, Proposition 7, Proposition 8 的证明方法, 可得到如下结果 (其中, (5) 实际上是定理 1.2.14 的应用):

引理 7.4.1　(1) 任何 MTL–代数都有素滤子;

(2) 设 P, Q 是 MTL–代数 L 的真滤子且 $P\subseteq Q$, 如果 P 是素的, 则 Q 也是素的;

(3) MTL–代数的任何真滤子都可扩充成为素滤子;

(4) MTL–代数的任何真滤子都可扩充成为极大素滤子;

(5) MTL–代数的任何极大滤子必是素滤子.

应用上述引理, 可得如下结果.

定理 7.4.5 在任何 MTL–代数 L 中, 以下各项等价:

(1) F 是极大 Boole 滤子;

(2) F 是真素的 Boole 滤子;

(3) F 是真滤子且 $\forall x \in L$, $x \in F$ 或 $x' \in F$.

下面讨论 MTL–代数的理想及其与滤子的关系.

定义 7.4.2 设 L 是 MTL–代数. L 的一个非空子集 I 称为 L 的理想, 如果满足:

(I1) $0 \in I$;

(I2) $(x' \to y')' \in I$, $x \in I \Rightarrow y \in I$.

命题 7.4.2 MTL–代数 L 的任何理想 I 必满足:

(I3) $x \leqslant y$, $y \in I \Rightarrow x \in I$.

定理 7.4.6 对于 MTL–代数 L 的任意理想 I, 定义如下二元关系:

$$x \sim_I y \text{ 当且仅当 } (x \to y)' \in I \text{ 且 } (y \to x)' \in I,$$

则 $\sim_I$ 是同余关系且相应的商结构 $L/{\sim_I}$ 是一个 MTL–代数.

对于 R_0–代数, 文献 [313] 给出如下结论 (引理 7.4.2). 后面的例子将说明, 这一结论对于 MTL–代数来说不成立 (主要原因是 MTL–代数中对合律不成立). 下面将用新的方法来刻画 MTL–代数的滤子与理想之间的关系.

引理 7.4.2[313] 设 M 是 R_0–代数, $F \subseteq M$, 则 F 是 M 的滤子当且仅当 $F' = \{x' | x \in F\}$是 M 的理想.

例 7.4.1 设 L={0, a, b, c, d, 1}, 其上的二元运算 $\to$, $\otimes$ 按表 7.3, 表 7.4 的方式定义, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.5 所示, 则 (L; $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\to$, 0, 1) 是一个 MTL–代数 (可使用 Mathematica 进行验证, 见图 7.6), 但它不是 R_0–代数, 因为 $(a \to 0) \to 0 \neq a$.

表 7.3 运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	b	b	d	1
b	0	a	1	a	d	1
c	0	1	1	1	d	1
d	d	1	1	1	1	1
1	0	a	b	c	d	1

表 7.4 运算 "$\otimes$" 的定义

$\otimes$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	c	c	d	a
b	0	c	b	c	d	b
c	0	c	c	c	d	c
d	0	d	d	d	0	d
1	0	a	b	c	d	1

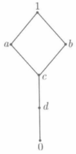


图 7.5 序 $\leqslant$ 的定义

显然, F={0, a, b, c, d, 1}是 L 的一个滤子, 但 F'=$\{x' | x \in F\} = \{0, 1, d\}$不是 L 的理想, 因为 $(d' \to a')' = d \in F'$, $d \in F'$, 而 $a \notin F'$.

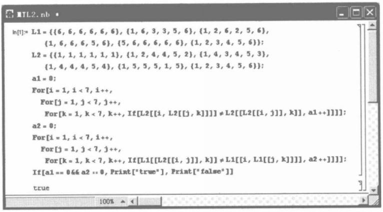


图 7.6　用 Mathematica 软件验证 MTL–代数

定义 7.4.3　设 S 是 MTL–代数 L 的非空子集. 规定:

$$S^* = \{x \in L \mid \text{存在 } y \in S \text{ 使得 } x'' \leqslant y'\}, S^\bullet = \{x \in L \mid \text{存在 } y \in S \text{ 使得 } x'' \geqslant y'\}.$$

S^* 称为 S 的对偶集 (dual set), S' 称为 S 的伴随集 (adjoint set).

显然, 对于 MTL–代数 L 的任意非空子集 S, $0 \in S^*$, $1 \in S^\bullet$; 如果 $0 \in S$, 则 $S^* = L$; 如果 $1 \in S$, 则 $S^\bullet = L$. 容易验证, $\{x'\colon x \in S\} \subseteq S^*$, $\{x'\colon x \in S\} \subseteq S^\bullet$. 一般地, $S^* \neq \{x'\colon x \in S\}$, $S^\bullet \neq \{x'\colon x \in S\}$, $S^* \neq S^\bullet$. 比如例 7.4.1 中, 若取 $S=\{d, 1\}$, 则 $\{x'\colon x \in S\}=\{0,d\}$, 而 $S^*=\{0,d\}$, $S^\bullet=\{0, a, b, c, d, 1\}$; 若取 $S=\{d, 0\}$, 则 $\{x'\colon x \in S\}=\{1,d\}$, 而 $S^*=\{0, a, b, c, d, 1\}$, $S^\bullet=\{a, b, c, d, 1\}$.

定理 7.4.7　设 F 是 MTL–代数 L 的滤子, 则 F 的对偶集 F^* 是 L 的一个理想, 且 $F \subseteq (F^*)^\bullet$.

证明　首先证明 F^* 是 L 的理想. 假定 $(x' \to y')' \in F^*$, $x \in F^*$, 则存在 $a, b \in F$ 使得 $((x' \to y')')'' \leqslant a'$, $x'' \leqslant b'$. 从而, $(x' \to y')' \leqslant a'$, $b \leqslant x'$. 由 $b \leqslant x'$, 应用定理 2.2.1(8) 及 (2) 得 $x' \to y' \leqslant b \to y'$. 于是, $b \leqslant (x' \to y') \to y' = y \to (x' \to y')'$(由定理 2.2.1(4)). 又从 $(x' \to y')' \leqslant a'$ 出发, 应用定理 2.2.1(8) 得 $y \to (x' \to y')' \leqslant y \to a'$. 故 $b \leqslant y \to a'$. 进而

$$y \leqslant b \to a' \leqslant (b \to a')'' \qquad \text{(由定理 2.2.5)}$$

于是, $(b \to a')' = (b \to a')''' \leqslant y'$, $y'' \leqslant (b \to a')''$. 因为

$$\begin{aligned} b \to (a \to (b \to a')') &= b \to ((b \to a') \to a') = (b \to a') \to (b \to a') \\ &= 1 \in F, \qquad \text{且 } a, b \in F. \end{aligned}$$

所以 $(b \to a')' \in F$. 这说明 $y \in F^*$, 即 F^* 是 L 的理想.

其次证明 $F \subseteq (F^*)^\bullet$. 事实上, 对任意 $x \in F$, 有 $x' \in F^*$, 因为 $x'' \geqslant x'' = (x')'$, 所以 $x \in (F^*)^\bullet$, 即 $F \subseteq (F^*)^\bullet$.

定理 7.4.8 设 I 是 MTL-代数 L 的理想, 则 I 的伴随集 $I^\bullet$ 是 L 的一个滤子, 且 $I \subseteq (I^\bullet)^*$.

证明 假定 $x \in I^\bullet$, $x \to y \in I^\bullet$, 则存在 $a, b \in I$ 使得 $x'' \geqslant a'$, $(x \to y)'' \geqslant b'$. 应用定理 2.2.1 (8) 及 (2)(或定理 2.2.5) 可得

$$
\begin{aligned}
y' &\leqslant (x \to y) \to x' \\
&\leqslant x'' \to (x \to y)' \\
&\leqslant a' \to (x \to y)' && (\text{由 } x'' \geqslant a') \\
&\leqslant (x \to y)'' \to a'' \\
&\leqslant b' \to a'' && (\text{由 } (x \to y)'' \geqslant b')
\end{aligned}
$$

所以 $y'' \geqslant (b' \to a'')'$. 由此可推得 $b' \to a'' \in I$. 实际上, 由定理 2.2.7(2) 有

$$b' \leqslant (b' \to a'') \to a''.$$

从而, $((b' \to a'') \to a'')' \leqslant b''$, 即 $((b' \to a'') \to a'')' \to b''=1$. 于是,

$$(((b' \to a'') \to a'')' \to b'')' = 0 \in I, \text{ 即 } (b' \to ((b' \to a'') \to a'')'')' = 0 \in I$$

(由定理 2.2.1(4))

从而, 据定义 7.4.2 (I2) 及 $b \in I$ 得 $((b' \to a'') \to a'')' \in I$, 即 $(a' \to (b' \to a'')')' \in I$. 再次应用 (I2) 及 $a \in I$ 得 $b' \to a'' \in I$. 这样, 由 $y'' \geqslant (b' \to a'')'$ 及 $b' \to a'' \in I$ 知 $y \in I^\bullet$. 这说明 $I^\bullet$ 是 L 的滤子.

设 $x \in I$, 则 $x' \in I^\bullet$, $x'' \leqslant (x')'$, 于是 $x \in (I^\bullet)^*$, 即 $I \subseteq (I^\bullet)^*$.

注 7.4.3 设 F 是 MTL-代数 L 的一个真滤子, F^* 是 F 的对偶集, 则$\{0, 1\} \in F \cup F^*$ 且 $F \cap F^* = \varnothing$. 事实上, 假定 $x \in F \cap F^*$, 则 $x \in F$, $x \in F^*$. 由 $x \in F^*$ 知, 存在 $y \in F$ 使得 $x'' \leqslant y'$. 从而 $y \leqslant (x'')' = x'$, $x \leqslant y'$. 由于

$$x \to (y \to (x \to y')') = x \to ((x \to y') \to y') = (x \to y') \to (x \to y') = 1 \in F.$$

所以, 据 $x, y \in F$ 及滤子的定义得 $(x \to y')' \in F$. 但, 从 $x \leqslant y'$ 可得 $(x \to y')' = 1' = 0$, 于是 $0 \in F$, 这与 F 是真滤子矛盾. 容易证明, $F \cup F^*$ 关于 MTL-代数的运算 $\wedge, \vee, \otimes, \to$ 是封闭的, 且有表 7.5 及定理 7.4.9.

表 7.5

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \otimes y$	$x \to y$
F	F	F	F	F	F
F	F^*	F^*	F	F^*	F^*
F^*	F	F^*	F	F^*	F
F^*	F^*	F^*	F^*	F^*	F

定理 7.4.9 设 F 是 MTL-代数 L 的一个真滤子, F^* 是 F 的对偶集, 则 $F \cup F^*$ 是 L 的子代数.

定义 7.4.4　MTL–代数 L 称为是二部的, 如果有极大滤子 M 使得 $L = M \cup M^*$.

定理 7.4.10　MTL–代数 L 含有真 Boole 滤子当且仅当 L 是二部的.

证明　如果有极大滤子 M 使得 $L = M \cup M^*$, 则 M 是真滤子且对任意 $x \in L$, 若 $x \notin M$, 则 $x \in M^*$. 从而存在 $y \in M$ 使得 $x'' \leqslant y'$, 于是 $y \leqslant x'''=x'$, 进而 $x' \in M$ (因 M 是滤子, 故定义 2.2.4(F2) 成立). 所以, 对任意 $x \in L$, $x \vee x' \in M$(因 $x \leqslant x \vee x'$, $x' \leqslant x \vee x'$). 这说明 M 是 Boole 滤子.

反之, 假设 L 含有真 Boole 滤子 F, 则 F 可扩充成极大滤子 (引理 7.4.1), 它当然是 Boole 滤子 (命题 7.4.1). 对任意 $x \in L$, 若 $x \notin M$, 则 $x' \in M$ (定理 7.4.5), 于是 $x'' \leqslant (x')'$, $x' \in M$, 即 $x \in M^*$. 所以 $L = M \cup M^*$.

例 7.4.2　设 L={0, a, b, c, d, 1}, 其上的二元运算 →, ⊗ 按表 7.6, 表 7.7 的方式定义, 其序 ⩽ 的定义如图 7.7 所示.

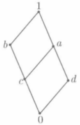


图 7.7　序 ⩽ 的定义

表 7.6　运算 "→" 的定义

→	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	b	b	a	1
b	d	a	1	a	d	1
c	a	1	1	1	a	1
d	b	1	b	b	1	1
1	0	a	b	c	d	1

表 7.7　运算 "⊗" 的定义

⊗	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	d	c	0	d	a
b	0	c	b	c	0	b
c	0	0	c	0	0	c
d	0	d	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

容易验证 (L; ∧, ∨, ⊗, →, 0, 1) 是一个 MTL–代数, F={1, a, d}是 L 的一个极大滤子, F^*={0, b, c}是 L 的一个理想, 且 $L = F \cup F^*$. 从而 L 是二部的且 F={1, a, d}是一个 Boole 滤子.

2. *MTL–代数的 MV–滤子与广义素滤子定理*

以下通过引入 MV–滤子来刻画 MV–代数在 MTL–代数中的位置, 这从一个侧面反映了 Łukasiewicz 逻辑系统与**MTL**逻辑系统的关联关系. 关于 MV–代数的定义已在定义 3.2.3 中叙述过了, 这里将后面频繁使用的 MV–代数的几个性质罗列如下以方便引用.

引理 7.4.3　设 L 是 MV–代数, 则对任意 $x, y \in L$,

(C1) $(x \to y) \to y=(y \to x) \to x$;

(C2) $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$;

(C3) $(x \to y) \vee (y \to x)=1$.

下面定理的证明过程需要用到 MTL–代数的性质 [40]: $x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$. 事实上, 此性质与逻辑系统**MTL**对联结词 ∨ 的定义相对应, 即

$\varphi \vee 4$ 定义为 $((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$, 见定义 4.1.1.

定理 7.4.11 *MTL*–代数 L 成为 *MV*–代数的充要条件是满足 (C1).

证明 由引理 7.4.3 知必要性成立. 下证充分性, 设 L 是满足 (C1) 的 *MTL*–代数, 由于 (C1)$\Rightarrow x=(x \to 0)\to 0, \forall x \in L$. 所以根据定义 3.2.3, 只需证明 L 是 *BL*–代数, 即 L 满足 (C2).

事实上, 由定理 2.2.1(2) 及 (6) 可得 $x \to y = 1 \wedge (x \to y) = (x \to x) \wedge (x \to y) = x \to (x \wedge y)$. 故 $x \otimes (x \to y) = x \otimes (x \to (x \wedge y))$. 而由定理 2.2.7(2) 得 $x \leqslant (x \to (x \wedge y)) \to (x \wedge y)$, 即 $x \otimes (x \to (x \wedge y)) \leqslant x \wedge y$. 于是, $x \otimes (x \to y) \leqslant x \wedge y$.

另一方面, 因为

$$
\begin{aligned}
x &\leqslant (x \to y) \to x \otimes (x \to y) && \text{(由定理 2.2.2 (1))}\\
&=(x \to y) \to (x \otimes (x \to y))'' && \text{(由 (C1))}\\
&=(x \otimes (x \to y))' \to (x \to y)' && \text{(由定理 2.2.1 (4))}
\end{aligned}
$$

所以, $(x \otimes (x \to y))' \leqslant x \to (x \to y)'$. 于是, $(x \to (x \to y)')' \leqslant (x \otimes (x \to y))'' = x \otimes (x \to y)$. 又

$$
\begin{aligned}
x \to (x \to y)' &= (x \to y) \to x' && \text{(由定理 2.2.1 (4))}\\
&=(y' \to x') \to x' = ((x' \to y') \to y') \wedge ((y' \to x') \to x') && \text{(由定理 2.2.1 (4), (C1))}\\
&= x' \vee y' && \text{(本定理之前的说明)}\\
&=(x \wedge y)' && \text{(由定理 2.2.1 (7), (C1))}
\end{aligned}
$$

故 $x \wedge y = (x \to (x \to y)')' \leqslant x \otimes (x \to y)$. 从而 $x \wedge y = x \otimes (x \to y)$.

定理 7.4.12 *MTL*–代数 L 成为 *MV*–代数的充要条件是满足:

(C4) $(x \to y) \to y = (((x \to y) \to y) \to x) \to x$.

证明 假设 L 是 *MV*–代数, 则

$$
\begin{aligned}
&(((x \to y) \to y) \to x) \to x=(((y \to x) \to x) \to x) \to x && \text{(由 (C1))}\\
&\leqslant (y \to x) \to x && \text{(由定理 2.2.5)}\\
&=(x \to y) \to y && \text{(由 (C1))}
\end{aligned}
$$

又 $(x \to y) \to y \leqslant (((x \to y) \to y) \to x) \to x$. 故 (C4) 成立.

反之, 假设 L 是满足 (C4) 的 *MTL*–代数, 则对任意 $x, y \in L$,

$$
\begin{aligned}
&((y \to x) \to x) \to ((x \to y) \to y)\\
&=((y \to x) \to x) \to ((((x \to y) \to y) \to x) \to x) && \text{(由 (C4))}\\
&=(((x \to y) \to y) \to x) \to (((y \to x) \to x) \to x) && \text{(由定理 2.2.1 (4))}\\
&\geqslant (((x \to y) \to y) \to x) \to (y \to x) && \text{(由定理 2.2.5)}\\
&\geqslant y \to ((x \to y) \to y) && \text{(由定理 2.2.1 (8))}\\
&=1 && \text{(由定理 2.2.1 (4), (2))}
\end{aligned}
$$

即 $((y \to x) \to x) \to ((x \to y) \to y)=1$. 由对称性得, $((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x)=1$. 所以 (C1) 成立. 应用定理 7.4.11 知 L 是 *MV*–代数.

定义 7.4.5　设 L 是 MTL–代数. L 的滤子 F 称为是 MV–滤子, 如果满足

(C5) $x \to y \in F \Rightarrow ((y \to x) \to x) \to y \in F$.

定理 7.4.13　设 F 是 MTL–代数 L 的 Boole 滤子, 则 F 是 MV–滤子.

证明　假设 $x \to y \in F$. 因为 $y \leqslant ((y \to x) \to x) \to y$ (由定理 2.2.7(1)), 故 $(((y \to x) \to x) \to y) \to x \leqslant y \to x$. 于是,

$$
\begin{aligned}
&((((y \to x) \to x) \to y) \to x) \to (((y \to x) \to x) \to y) \\
\geqslant\ & (y \to x) \to (((y \to x) \to x) \to y) && (\text{由定理 } 2.2.1\ (8)) \\
=\ & ((y \to x) \to x) \to ((y \to x) \to y) && (\text{由定理 } 2.2.1\ (4)) \\
\geqslant\ & x \to y \in F. && (\text{由定理 } 2.2.1\ (8))
\end{aligned}
$$

从而, $((((y \to x) \to x) \to y) \to x) \to (((y \to x) \to x) \to y) \in F$. 由定理 7.4.1(3) 得 $((y \to x) \to x) \to y \in F$. 这说明 F 是 MV–滤子.

定理 7.4.14　设 L 是 MTL–代数, 则 L 是 MV–代数当且仅当它的每个滤子都是 MV–滤子.

证明　设 F 是 MV–代数 L 的滤子. 对任意 $x, y \in L$, 由于

$$x \to y \leqslant ((x \to y) \to y) \to y = ((y \to x) \to x) \to y \qquad (\text{由 (C1)})$$

所以, 由滤子定义 2.2.4 中的 (F2) 知 $x \to y \in F \Rightarrow ((y \to x) \to x) \to y \in F$, 即 MV–代数的每个滤子都是 MV–滤子.

反之, 假设 MTL–代数 L 的每个滤子都是 MV–滤子, 则$\{1\}$是 L 的 MV–滤子. 因为 $x \to ((x \to y) \to y) = 1 \in \{1\}$. 由定义 7.4.5(C5) 有 $((((x \to y) \to y) \to x) \to x) \to ((x \to y) \to y) \in \{1\}$, 即

$$(((x \to y) \to y) \to x) \to x \leqslant (x \to y) \to y.$$

又 $(x \to y) \to y \leqslant (((x \to y) \to y) \to x) \to x$. 所以 $(x \to y) \to y = (((x \to y) \to y) \to x) \to x$. 根据定理 7.4.12 知 L 是 MV–代数.

定理 7.4.15　设 F 是 MTL–代数 L 的滤子, 则 F 是 MV–滤子当且仅当 L/F 是 MV–代数.

引理 7.4.4(素滤子定理)[40]　设 L 是一个 MTL–代数, $a \in L$, $a \neq 1$, 则存在 L 的一个素滤子 F 使得 $a \notin F$.

在逻辑系统 **MTL** 完备性定理的证明中, 上述引理起着重要作用 (类似的情况在基本逻辑系统 **BL**、形式系统 $\mathscr{L}^*$ 等中同样存在). 文献 [150] 将 BL–代数、R_0–代数的素滤子定理进行了推广, 用类似的方法可对引理 7.4.4 进行推广, 得到如下的广义素滤子定理.

定理 7.4.16(广义素滤子定理)　设 F 是 MTL–代数 L 的滤子, S 是 MTL–代数 L 的 $\vee$–闭子集且 $F \cap S = \varnothing$, 则存在 L 的素滤子 P 使得 $F \subseteq P$ 且 $P \cap S = \varnothing$.

注 7.4.4　上述结果也可直接由定理 2.2.14 得到.

3. 局部有限 MTL–代数与 $G(MTL)$–代数

文献 [312] 研究了局部有限 BL–代数, 文献 [22] 研究了 G–代数 (即幂等 BL–代数), 本节将这些内容拓广到 MTL–代数中 (所得结果表明, BL–代数的许多结果在 MTL–代数中不再成立), 并借此研究了 MTL–代数的结构.

定义 7.4.6 设 L 是 MTL–代数, $x \in L$. 满足 $x^m=0$ 的最小正整数 m 称为元素 x 的阶, 记为 $ord(x)$. 如果这样的正整数 m 不存在, 则记 $ord(x)=\infty$. 一个 MTL–代数称为是局部有限的, 如果它的所有非单位元素都有有限阶.

定理 7.4.17 局部有限 MTL–代数是线性序的.

证明 首先证明局部有限 MTL–代数中成立: $x \vee y = 1 \Rightarrow x = 1$ 或 $y = 1$. 事实上, 如果 $x \vee y=1$, 则由定理 2.2.7(2) 得 $1=x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \leqslant (x \to y) \to y$. 故 $x \to y \leqslant y$. 又据定理 2.2.7(1), $y \leqslant x \to y$. 从而 $y = x \to y$. 这样, 如果 $x \neq 1$, 则由局部有限的定义知, 存在正整数 m 使得 $x^m=0$. 于是

$$y = x \to y = x \to (x \to y) = x^2 \to y = \cdots = x^m \to y = 0 \to y = 1.$$

这说明 $x \vee y=1 \Rightarrow x=1$ 或 $y=1$.

其次, 由 MTL–代数的预线性等式 $(x \to y) \vee (y \to x)=1$, 应用上述结果得 $x \to y=1$ 或 $y \to x=1$, 即 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$. 所以, 此时 MTL–代数是线性序的.

引理 7.4.5[312] 局部有限 BL–代数是 MV–代数.

下面的例子表明, 上述引理对于 MTL–代数来说不成立.

例 7.4.3 设 $L=\{0, a, b, 1\}$, 其二元运算定义如表 7.8 及表 7.9:

表 7.8 运算 "$\otimes$" 的定义

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

表 7.9 运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	a	1	1	1
1	0	a	b	1

L 上的序关系定义为 $0 < b < a < 1$, 则 L 是一个局部有限 MTL–代数, 但 $b \neq (b \to 0) \to 0$, 即 L 不是 MV–代数.

例 7.4.4 设 $L=\{0, 1/2, 1\}$, 定义其上的二元运算如表 7.10 和表 7.11(它实际上是 R_0 t–模及其剩余蕴涵在$\{0, 1/2, 1\}$上的 "限制").

表 7.10 运算 "$\otimes$" 的定义

$\otimes$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	0	1/2
1	0	1/2	1

表 7.11 运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

则 L 是一个局部有限 R_0–代数, 以下记为$\{0, 1/2, 1\}(R_0)$.

定理 7.4.18　局部有限 R_0–代数必同构于$\{0, 1\}$或$\{0, 1/2, 1\}(R_0)$.

证明　显然, $\{0, 1\}$是局部有限 R_0–代数. 假设 L 是局部有限 R_0–代数且 $|L| > 2$. 对任意 $x \in L\backslash\{0, 1\}$, 由命题 3.4.3 (P20) 得 $x \to (x \to x') = x^3 \to 0 = x^2 \to 0 = x \to x'$. 进而

$$x' \to (x' \to x) = x' \to (x' \to x'') = x' \to x'' = x' \to x.$$

从而 $x^2 \to x' = x \to x'$, $(x')^2 \to x = x' \to x$. 因为 L 是局部有限的, 则存在 $m1, m2$ 使得 $x^{m1} = 0$, $(x')^{m2} = 0$. 由于 $x \neq 1$, $x \neq 0$, 故 $m1 \geqslant 2$, $m2 \geqslant 2$. 于是由命题 3.4.3 (P20) 得 $x^2 = x^{m1} = 0$, $(x')^2 = (x')^{m2} = 0$. 所以 $x \to x' = x' \to x = 1$, 即 $x = x'$.

由定理 7.4.17 知 L 是线性序的. 如果 $x, y \in L\backslash\{0, 1\}$, 则 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$. 设 $x \leqslant y$, 因为总有 $y \to x = x' \to y'$, 故由上述结果 (对于 $x \in L\backslash\{0, 1\}$, $x = x'$) 得, $y \to x = x' \to y' = x \to y = 1$, 即 $x = y$. 类似地, 从 $y \leqslant x$ 出发可得 $y = x$. 这说明 $|L| = 3$ 且 $x = x'$(当 $x \neq 1$, $x \neq 0$ 时). 从而, L 同构于$\{0, 1/2, 1\}(R_0)$.

与文献 [312] 中 Proposition 15 类似, 可以证明以下结果:

定理 7.4.19　设 M 是 MTL–代数 L 的一个滤子, 则以下条件等价:

(1) M 是极大滤子;

(2) $\forall x \notin M$, 存在 $n \in \mathrm{N}$ 使得 $(x^n)' \in M$;

(3) L/M 是局部有限的 MTL–代数.

文献 [314] 证明了如下结果, 后面的例子表明这一结果在 MTL–代数不再成立:

引理 7.4.6[314]　设 L 是 BL–代数, 则$\{x' | x \in L\}$是 MV–代数.

例 7.4.5　设 $\alpha \in [0, 1]$, 定义 [48]

$$x \otimes_\alpha y = \begin{cases} x \wedge y, & x + y > \alpha, \\ 0, & x + y \leqslant \alpha, \end{cases}$$

则 $\otimes_\alpha$ 是左连续 t–模, 其对应的剩余蕴涵 $\to_\alpha$ 如下:

$$H_\alpha = x \to_\alpha y = \begin{cases} 1, & x \leqslant y, \\ (\alpha - x) \vee y, & x > y. \end{cases}$$

令 $L = \{0, 1/8, 1/4, 3/8, 5/8, 1\}$, $\alpha = 1/2$, 则 L 关于表 7.12、表 7.13 所示的运算构成一个 MTL–代数 (这里 $\otimes$, $\to$ 即是 $\otimes_{1/2}$, $\to_{1/2}$ 在 L 上的 “限制”). 容易验证, $\{x' | x \in L\} = \{0, 1/8, 1/4, 3/8, 1\}$不是 BL–代数 (因为 $3/8 \wedge 1/8 \neq 3/8 \otimes (3/8 \to 1/8)$), 从而也不是 MV–代数.

定义 7.4.7　MTL–代数 L 若满足 $x \otimes x = x (\forall x \in L)$, 则称为 $G(MTL)$–代数. 同样, 若 $IMTL$–代数、BL–代数、R_0–代数 L 满足 $x \otimes x = x (\forall x \in L)$, 则称为 $G(IMTL)$–代数、$G(BL)$–代数、$G(R_0)$–代数.

表 7.12 运算 "$\otimes$" 的定义

$\otimes$	0	1/8	1/4	3/8	5/8	1
0	0	0	0	0	0	0
1/8	0	0	0	0	1/8	1/8
1/4	0	0	0	1/4	1/4	1/4
3/8	0	0	1/4	3/8	3/8	3/8
5/8	0	1/8	1/4	3/8	5/8	5/8
1	0	1/8	1/4	3/8	5/8	1

表 7.13 运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	1/8	1/4	3/8	5/8	1
0	1	1	1	1	1	1
1/8	3/8	1	1	1	1	1
1/4	1/4	1/4	1	1	1	1
3/8	1/8	1/8	1/4	1	1	1
5/8	0	1/8	1/4	3/8	1	1
1	0	1/8	1/4	3/8	5/8	1

注 7.4.5 按文献 [22] 中的定义, $G(BL)$–代数就是 G–代数.

例 7.4.6 令 $L=\{0\}\cup[3/4,1]$, 则容易验证 L 关于二元运算 $\otimes_{1/2}$, $\to_{1/2}$(见例 7.4.5) 及通常的序构成一个 $G(MTL)$–代数.

定理 7.4.20 在 $G(MTL)$–代数 L 中成立 $x''\vee x'=1$, $\forall x\in L$.

证明 由定义 7.4.7 及定理 2.2.5 得

$$x''=(x')'=(x'\otimes x')'=(x'\otimes x')\to 0=x'\to(x'\to 0)=x'\to x'',$$

$$x'=(x'')'=(x''\otimes x'')'=(x''\otimes x'')\to 0=x''\to(x''\to 0)=x''\to x'''=x''\to x'.$$

再据预线性等式有 $(x'\to x'')\vee(x''\to x')=1$. 所以 $x''\vee x'=1$.

定理 7.4.21 MTL–代数 L 是 $G(IMTL)$–代数当且仅当 L 是 Boole 代数.

证明 显然, Boole 代数是 $G(IMTL)$–代数.

设 L 是 $G(IMTL)$–代数, 则对任意 $x\in L$, $x\vee x'=x''\vee x'=1$ (由定理 7.4.20). 从而 $x'\wedge x=x'\wedge x''=(x\vee x')'=1'=0$. 这说明 $'$ 是 L 中的补运算. 又由于 MTL–代数是有界分配格, 所以 L 是 Boole 代数.

定理 7.4.22 设 L 是 $G(MTL)$–代数, 则

(1) $x'\otimes y'=x'\wedge y'$, $\forall x,y\in L$;

(2) $L'=\{x'|x\in L\}$是 Boole 代数.

定理 7.4.23 设 L 是 $G(MTL)$–代数, 则

(1) $\forall x,y\in L$, $x\geqslant y\Rightarrow x\otimes y=y$;

(2) $\forall x\in L$, $A_x=\{y\in L|y\geqslant x\}$是 L 的一个滤子;

(3) 若 L 是有限且线性序的, 则 $x>y\Rightarrow x\to y=y$;

(4) 若 L 是有限且线性序的, 则 L 是 $G(BL)$–代数.

综合上述结论可得

定理 7.4.24 设 L 关于 $\leqslant$ 是有限线性序集, 1, 0 分别是最大元和最小元, $\otimes$, $\to$ 是 L 上的二元运算, 则 L 是 $G(MTL)$–代数当且仅当满足:

$$x\otimes y=\begin{cases}x, & x\leqslant y,\\ y, & x>y,\end{cases}\qquad x\to y=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ y, & x>y,\end{cases}\qquad \forall x,y\in L.$$

定理 7.4.25　设 L 是 $G(MTL)$–代数, 记 $M(L) = \cap\{M|M$ 是 L 的极大滤子$\}$, 则 $M(L) =\{x \in L|x'=0\}$.

定理 7.4.26　设 L 是一个 $G(MTL)$–代数, 则以下条件等价:

(1) L 是 Boole 代数;

(2) L 是 $G(IMTL)$–代数;

(3) $M(L)=\{1\}$, 这里 $M(L) = \cap\{M|M$ 是 L 的极大滤子$\}$.

根据上面的系列结果, 可用图 7.8 表示相关模糊逻辑代数结构之间的关系.

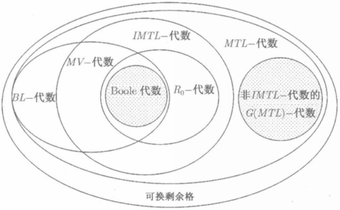


图 7.8　各种可换逻辑代数结构的关联关系

注 7.4.6　(1) MV–代数. 未必是 R_0–代数. 例如, MV 单位区间就不是 R_0–代数; MV–代数中存在非 Boole 代数的 R_0–代数, 如例 7.4.4 中的 R_0–代数就是非 Boole 的 MV–代数.

(2) $G(IMTL)$–代数类与 MV–代数类的交是 Boole 代数类 (见定理 7.4.21), 于是 $G(MTL)$–代数类与 MV–代数类的交也是 Boole 代数类, 即说 $G(MTL)$–代数是上图中两个圆形区域的并. 且非 $IMTL$–代数的 $G(MTL)$–代数是存在的, 见例 7.4.6.

定义 7.4.8　设 F 是 MTL–代数 L 的一个滤子, F 称为是 G–滤子, 如果满足:

(GF) $x^2 \to y \in F \Rightarrow x \to y \in F$.

定理 7.4.27　设 L 是一个 MTL–代数, 则 L 是 $G(MTL)$–代数当且仅当 L 的每一个滤子是 G–滤子.

G–滤子对于非幂等的 MTL–代数同样是有意义的. 例如, 令 $L=\{0\}\cup[1/8, 3/8]\cup[1/2, 1]$, 则 L 关于自然序关系及二元运算 $\to_{1/2}$, $\otimes_{1/2}$ (见例 7.4.5) 构成一个 MTL–代数. 因 $1/8\otimes1/8=0\neq1/8$, 故 L 不是 $G(MTL)$–代数, 但 $[1/2, 1]$ 是 L 的 G–滤子.

定理 7.4.28 设 F 是 MTL–代数 L 的一个滤子, 则 F 是 G–滤子当且仅当 L/F 是 $G(MTL)$–代数.

定理 7.4.29 设 F 是 MTL–代数 L 的一个滤子, 则 F 是 Boole 滤子当且仅当 F 既是 G–滤子又是 MV–滤子.

定义 7.4.9 设 F 是 MTL–代数 L 的一个滤子.

(1) F 称为是超滤子 (ultra filter), 如果满足:

(UF) $\forall x \in L, x \in F \Leftrightarrow x' \notin F$.

(2) F 称为是固执滤子 (obstinate filter), 如果满足:

(OF) $\forall x, y \in L, (x \notin F, y \notin F) \Rightarrow x \to y \in F$ 且 $y \to x \in F$.

结合定理 7.4.5, 可证如下结论成立.

定理 7.4.30 在任何 MTL–代数 L 中, 以下各项等价:

(1) F 是超滤子;

(2) F 是极大 Boole 滤子;

(3) F 是真素的 Boole 滤子;

(4) F 是真滤子且 $\forall x \in L, x \in F$ 或 $x' \in F$.

(5) F 是极大 G–滤子;

(6) F 是真固执滤子.

注 7.4.7 (1) 与上述结论对应, 可以证明关于 MTL–代数理想的一组等价条件, 见文献 [302].

(2) 上述结论可拓广到 MTL–代数的模糊滤子和模糊理想中, 见文献 [304], [307].

(3) 由于 MTL–代数是有界 BCK–代数 (见定理 7.1.4), 故上述结论可看成文献 [249] 中 Theorem 5.4 的具体化.

7.4.2 $psMTL$–代数的正规滤子与 Boole 滤子

本节首先介绍作者在文献 [153], [306] 中的研究结果, 通过构造反例说明 $psBL$–代数正规滤子的充要条件对 $psMTL$–代数来说不成立, 并给出 $psMTL$–代数正规滤子新的充要条件. 其次, 在 $psMTL$–代数中引入 Boole 滤子, 并研究它的基本性质.

$psMTL$–代数作为特殊的剩余格, 其滤子及正规滤子的概念沿用剩余格的相应概念 (见 2.4.2 节). 文献 [78] 中给出 $psBL$–代数 L 正规滤子的如下充要条件:

滤子 H 是正规的当且仅当对任意 $x \in L$ 有 $x \otimes H = H \otimes x$.

下面的例子表明这一结果不能推广到 $psMTL$–代数中 (这一反例我们前后寻找了一个多月, 至今未曾在国内外文献中见到类似的结果).

例 7.4.7 设 L=$\{0, a, b, 1\}$, 其上的二元运算 $\otimes, \to, \rightsquigarrow$ 如表 7.14~ 表 7.16 定义, 其序关系定义为 $0 < a < b < 1$, 则 $(L; \vee, \wedge, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ 是一个 $psMTL(WPBL)$–代数 (见文献 [76]). 因为所有 $psMTL(WPBL)$–代数所组成的类是

一个代数簇 (其证明类似于文献 [73] 中的 Corollary 2.6), 于是 $L\times L$={(0, 0), (0, a), (0, b), (0, 1), (a, 0), (a, a), (a, b), (a, 1), (b, 0), (b, a), (b, b), (b, 1), (1, 0), (1,a), (1, b), (1, 1)}也是一个 $psMTL(WPBL)$–代数, 且容易验证 $L\times L$ 上的序关系如图 7.9 所示.

表 7.14　运算 “⊗” 的定义

$\otimes$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

表 7.15　运算 “→” 的定义

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

表 7.16　运算 “⇝” 的定义

$\rightsquigarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

令 H={(0,1), (a,1), (b,1), (1,1)}, 则 H 是 $L\times L$ 的正规滤子. 事实上,

$$(x,y)\to(u,v)\in H\Leftrightarrow y\to v=1\Leftrightarrow y\rightsquigarrow v=1\Leftrightarrow(x,y)\rightsquigarrow(u,v)\in H.$$

但是, $(b, b)\otimes H$={(0, b), (a, b), (b, b)}, $H\otimes(b,b)$={(0, b), (b, b)}, $(b, b)\otimes H\neq H\otimes(b, b)$.

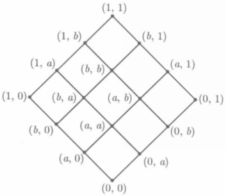


图 7.9　关于 $psMTL$–代数正规滤子的反例

类似于命题 6.3.3、定理 6.3.8 可以证明如下结果, 它是 $psMTL$–代数正规滤子的一个新的充要条件:

定理 7.4.31　$psMTL$–代数 L 的滤子 H 是正规的, 当且仅当 H 满足如下的 (NF1) 及 (NF2), $\forall x\in L$.

(NF1) 对任意 $y\in x\otimes H=\{x\otimes h|h\in H\}$, 存在 $z\in H\otimes x=\{h\otimes x|h\in H\}$使得 $y\geqslant z$;

(NF2) 对任意 $y\in H\otimes x=\{h\otimes x|h\in H\}$, 存在 $z\in x\otimes H=\{x\otimes h|h\in H\}$使得 $y\geqslant z$.

注 7.4.8 定理 7.2.17～ 定理 7.2.19 及推论 7.2.1 给出剩余格正规滤子的若干充要条件, 它们仅使用了蕴涵算子 $\to$, $\rightsquigarrow$, 没有涉及 $\otimes$ 算子, 这些充要条件自然适用于 $psMTL$–代数.

类似于 6.3.3 节, 可在 $psMTL$–代数中引入素滤子、生成滤子等概念, 证明 $psMTL$–代数的素滤子定理. 现罗列如下, 并略去证明.

定义 7.4.10 $psMTL$–代数 L 的滤子 F 叫做真的, 如果 $F \neq L$. 显然, 滤子 F 是真的当且仅当 $0 \notin F$. $psMTL$–代数 L 的真滤子 F 称为是素的, 如果对任意 $x, y \in L$, $x \vee y \in F$ 蕴涵 $x \in F$ 或 $y \in F$.

定理 7.4.32 设 F 是 $psMTL$–代数 L 的真滤子, 则以下条件等价:

(1) F 是素的;

(2) 对任意 $x, y \in L$, $x \to y \in F$ 或 $y \to x \in F$;

(3) 对任意 $x, y \in L$, $x \rightsquigarrow y \in F$ 或 $y \rightsquigarrow x \in F$;

(4) 对任意 $x, y \in L$, 若 $x \vee y$=1, 则 $x \in F$ 或 $y \in F$.

定理 7.4.33 设 H 是 $psMTL$–代数 L 的正规滤子, 则以下条件等价:

(1) H 是素的;

(2) L/H 是链, 即全序 $psMTL$–代数.

定义 7.4.11 对于 $psMTL$–代数 L 的子集 X, 包含 X 的最小滤子, 即包含 X 的所有滤子的交, 称为由 X 生成的滤子, 记为 [X).

命题 7.4.3 设 L 是 $psMTL$–代数, $\varnothing \neq X \subseteq L$, 则

(1) $[X)=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 1, x_1, \cdots, x_n \in X, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \leqslant a\}$;

(2) 若 $X=\{x\}$, 则记 $[X)$ 为 $[x)$ 且 $[x)=\{a \in L|$ 存在整数 $n \geqslant 1, x^n \leqslant a\}$;

(3) 若 F 是 L 的滤子, $x \in L$, 则

$$[F \cup \{x\}) =\{a \in L| \text{ 存在整数 } m \geqslant 1, n_1, \cdots, n_m \geqslant 0 \text{ 及 } f_1, \cdots, f_m \in F, (f_1 \otimes x^{n_1}) \otimes \cdots \otimes (f_m \otimes x^{n_m}) \leqslant a\}.$$

命题 7.4.4 设 H 是 $psMTL$–代数 L 的正规滤子, $x \in L$, 则

$$\begin{aligned}[H \cup \{x\}) &= \{a \in L| \text{ 存在整数 } n \geqslant 0, h \in H, h \otimes x^n \leqslant a\} \\ &= \{a \in L| \text{ 存在整数 } n \geqslant 0, h \in H, x^n \otimes h \leqslant a\}.\end{aligned}$$

命题 7.4.5 设 L 是 $psMTL$–代数, 则对任意 $x, y \in L$ 有

(1) 若 $x \vee y$=1, 则对任意整数 $n \geqslant 1$, $x^n \vee y^n$=1;

(2) 对任意整数 $n \geqslant 1$, $(x \to y)^n \vee (y \to x)^n$=1, $(x \rightsquigarrow y)^n \vee (y \rightsquigarrow x)^n$ =1.

定理 7.4.34(素滤子定理) 设 F 是 $psMTL$–代数 L 的滤子, S 是 L 的格理想且 $F \cap S = \varnothing$, 则存在 L 的素滤子 P 满足 $F \subseteq P$ 且 $P \cap S = \varnothing$.

推论 7.4.1　设 L 是 *psMTL*–代数, $a\in L$, $a\neq 1$, 则存在 L 的素滤子 P 使得 $a\notin P$.

7.4.1 节研究了 *MTL*–代数的 Boole 滤子, 这里将相关概念和结果推广到 *psMTL*–代数中, 借助 Boole 滤子给出 Boole 代数在 *psMTL*–代数中的特征性质, 这实际上也是文献 [269] 中关于 *psBL*–代数相应结果的推广.

定义 7.4.12　*psMTL*–代数 L 的一个滤子 F 称为是 L 的 Boole 滤子, 如果满足:

(BF) $\forall x\in L$, $x\vee x^{\sim}\in F$ 且 $x\vee x^{-}\in F$.

引理 7.4.7　在 *psMTL*–代数 L 中成立 $(x, y, z\in L)$

(1) $z\to x\leqslant(x\to y)\rightsquigarrow(z\to y)$;

(2) $z\rightsquigarrow x\leqslant(x\rightsquigarrow y)\to(z\rightsquigarrow y)$.

定理 7.4.35　设 F 是 *psMTL*–代数 L 的一个滤子, 则以下条件等价:

(1) F 是 Boole 滤子;

(2) $\forall x, y\in L$, $x\to(y^{-}\rightsquigarrow y)\in F$ 蕴涵 $x\to y\in F$, 且 $x\rightsquigarrow(y^{\sim}\to y)\in F$ 蕴涵 $x\rightsquigarrow y\in F$;

(3) $\forall x, y\in L$, $(x\to y)\rightsquigarrow x\in F$ 蕴涵 $x\in F$, 且 $(x\rightsquigarrow y)\to x\in F$ 蕴涵 $x\in F$.

证明　(1)⇒(2). 设 $x\to(y^{-}\rightsquigarrow y)\in F$. 由定理 6.2.6 得

$$y^{-}\vee y=((y^{-}\rightsquigarrow y)\to y)\wedge((y\rightsquigarrow y^{-})\to y^{-})\leqslant(y^{-}\rightsquigarrow y)\to y.$$

根据 (1) 得 $y^{-}\vee y\in F$, 进而由上述不等式及滤子的定义得 $(y^{-}\rightsquigarrow y)\to y\in F$. 又由定理 6.2.4 (22) 得 $(y^{-}\rightsquigarrow y)\to y\leqslant(x\to(y^{-}\rightsquigarrow y))\to(x\to y)$. 于是由滤子的定义及性质得 $x\to y\in F$. 同理可证, $x\rightsquigarrow(y^{\sim}\to y)\in F$ 蕴涵 $x\rightsquigarrow y\in F$, 即 (2) 成立.

(2)⇒(3). 设 $(x\to y)\rightsquigarrow x\in F$. 因为 $0\leqslant y$, 故根据定理 6.2.3 (8) 及 (9) 得 $x^{-}=x\to 0\leqslant x\to y$, $(x\to y)\rightsquigarrow x\leqslant x^{-}\rightsquigarrow x$. 于是, $x^{-}\rightsquigarrow x\in F$, 即 $1\to(x^{-}\rightsquigarrow x)=x^{-}\rightsquigarrow x\in F$, 应用 (2) 得 $1\to x\in F$, 即 $x\in F$. 这说明 $(x\to y)\rightsquigarrow x\in F$ 蕴涵 $x\in F$.

同理可证 $(x\rightsquigarrow y)\to x\in F$ 蕴涵 $x\in F$, 即 (3) 成立.

(3)⇒(1). 首先证明 (3) $\Rightarrow\forall x\in L$, $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\in F$. 因为

$$
\begin{aligned}
&(((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow 0)\to((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\\
=&(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow((((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow 0)\to x) && \text{(由定理 6.2.4 (24))}\\
\geqslant&(((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow 0)\to x^{\sim} && \text{(由引理 7.4.7 (1))}\\
=&(((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow 0)\to(x\rightsquigarrow 0)\\
\geqslant&x\rightsquigarrow((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x) && \text{(由引理 7.4.7 (2))}\\
=&1, && \text{(由定理 6.2.3 (7), (4))}
\end{aligned}
$$

所以 $(((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow 0)\to((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)=1\in F$. 应用 (3) 即得 $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\in F$.

对任意 $x\in L$, 由 $x\leqslant x\vee x^{\sim}$, 据定理 6.2.3 (8) 得 $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\leqslant(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow(x\vee x^{\sim})$. 又由 $x^{\sim}\leqslant x\vee x^{\sim}$, 据定理 6.2.3 (9) 得 $(x\vee x^{\sim})\to x\leqslant x^{\sim}\to x$, $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow(x\vee x^{\sim})\leqslant((x\vee x^{\sim})\to x)\rightsquigarrow(x\vee x^{\sim})$. 于是 $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\leqslant((x\vee x^{\sim})\to x)\rightsquigarrow(x\vee x^{\sim})$. 根据前述结果 $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\in F$, 应用滤子的定义得 $((x\vee x^{\sim})\to x)\rightsquigarrow(x\vee x^{\sim})\in F$. 再应用 (iii) 得 $x\vee x^{\sim}\in F$. 同理可证 $x\vee x^{-}\in F$. 这说明 F 是 Boole 滤子.

定理 7.4.36 设 F 是 $psMTL$–代数 L 的 Boole 滤子, 则以下结论成立:

(1) $\forall x\in L$, $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\in F$, $(x^{-}\to x)\rightsquigarrow x\in F$;

(2) $\forall x\in L$, $(x^{\sim}\rightsquigarrow x)\to x\in F$, $(x^{-}\rightsquigarrow x)\to x\in F$;

(3) $\forall x,y\in L$, $(x\rightsquigarrow y)\rightsquigarrow x\in F\Rightarrow x\in F$, 且 $(x\to y)\to x\in F\Rightarrow x\in F$;

(4) $\forall x,y\in L$, $x\rightsquigarrow y\in F\Rightarrow((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow y\in F$,
$x\to y\in F\Rightarrow((y\to x)\rightsquigarrow x)\to y\in F$;

(5) $\forall x,y\in L$, $(x\rightsquigarrow y)\to y\in F\Rightarrow((y\to x)\rightsquigarrow x\in F$,
$(x\to y)\rightsquigarrow y\in F\Rightarrow(y\rightsquigarrow x)\to x\in F$;

(6) $\forall x,y\in L$, $(x\rightsquigarrow y)\rightsquigarrow y\in F\Rightarrow((y\rightsquigarrow x)\to x\in F$,
$(x\to y)\to y\in F\Rightarrow(y\to x)\rightsquigarrow x\in F$.

证明 (1) $\forall x\in L$, 由定理 6.2.6 得

$$x^{\sim}\vee x=((x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x)\wedge((x\to x^{\sim})\rightsquigarrow x^{\sim})\leqslant(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x.$$

据定义 7.4.12(BF) 得 $x^{\sim}\vee x\in F$, 从而 $(x^{\sim}\to x)\rightsquigarrow x\in F$. 同理可证 $(x^{-}\to x)\rightsquigarrow x\in F$.

(2) 与 (1) 的证明类似.

(3) 假设 $(x\rightsquigarrow y)\rightsquigarrow x\in F$. 由 $0\leqslant y$, 应用定理 6.2.3 (8) 得 $x\rightsquigarrow 0\leqslant x\rightsquigarrow y$, 即 $x^{\sim}\leqslant x\rightsquigarrow y$. 根据定理 6.2.3 (9) 得 $(x\rightsquigarrow y)\rightsquigarrow x\leqslant x^{\sim}\rightsquigarrow x$. 于是, $x^{\sim}\rightsquigarrow x\in F$. 又由 (2), $(x^{\sim}\rightsquigarrow x)\to x\in F$. 所以 $x\in F$. 同理可证 $(x\to y)\to x\in F\Rightarrow x\in F$.

(4) 假设 $x\rightsquigarrow y\in F$. 应用定理 6.2.4 (23) 得 $y\rightsquigarrow x\leqslant((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow x$. 根据定理 6.2.3 (9) 及定理 6.2.4 (22) 得

$$\begin{aligned}&(y\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow y)\\ \geqslant\ &(((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow y)\geqslant x\rightsquigarrow y\in F.\end{aligned}$$

于是, $(y\rightsquigarrow x)\rightsquigarrow(((y\rightsquigarrow x)\to x)\rightsquigarrow y)\in F$. 又

$y \leqslant ((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y$ (由定理 6.2.3(7))

$y \rightsquigarrow x \geqslant (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x$ (由定理 6.2.3 (9))

$((((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y)$

$\geqslant (y \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \in F$ (由定理 6.2.3 (9))

故 $((((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \in F$. 应用 (3) 得 $((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y \in F$.

同理可证 $x \to y \in F \Rightarrow ((y \to x) \rightsquigarrow x) \to y \in F$.

(5) 如果 $(x \rightsquigarrow y) \to y \in F$. 由引理 7.4.7 有 $(x \rightsquigarrow y) \to y \leqslant (y \to x) \rightsquigarrow ((x \rightsquigarrow y) \to x)$, 又由定理 6.2.4 (24), $(y \to x) \rightsquigarrow ((x \rightsquigarrow y) \to x) = (x \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x)$. 故 $(x \rightsquigarrow y) \to y \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x)$. 又由 $x \leqslant (y \to x) \rightsquigarrow x$(据定理 6.2.3(7)) 得 $x \rightsquigarrow y \geqslant ((y \to x) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow y$, 进而有

$$(x \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x) \leqslant (((y \to x) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x).$$

联合上述结果得 $(x \rightsquigarrow y) \to y \leqslant (((y \to x) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x)$. 于是由滤子定义得

$$(((y \to x) \rightsquigarrow x) \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x) \in F.$$

应用定理 7.4.35(3) 得 $(y \to x) \rightsquigarrow x \in F$. 类似在有 $(x \to y) \rightsquigarrow y \in F \Rightarrow (y \rightsquigarrow x) \to x \in F$.

(6) 如果 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y \in F$. 由引理 7.4.7 及定理 6.2.4(24) 有

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y \leqslant (y \rightsquigarrow x) \to ((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x) = (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow x) \to x)$$

又由 $x \leqslant (y \rightsquigarrow x) \to x$ 得 $x \rightsquigarrow y \geqslant ((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y$, 进而有

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow x) \to x) \leqslant (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow x) \to x).$$

于是 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y \leqslant (((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow x) \to x)$. 故 $(((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((y \rightsquigarrow x) \to x) \in F$. 应用 (3) 得 $(y \rightsquigarrow x) \to x \in F$. 同理可证 $(x \to y) \to y \in F \Rightarrow (y \to x) \rightsquigarrow x \in F$.

容易证明以下结论成立.

定理 7.4.37 设 H 是 $psMTL$-代数 L 的正规滤子, 则以下条件等价:

(1) H 是 Boole 滤子;

(2) L/H 是 Boole 代数.

定理 7.4.38 设 L 是 $psMTL$-代数, 则以下条件等价:

(1) L 是 Boole 代数;

(2) L 的每一个滤子是正规 Boole 滤子.

7.4.3 $psBL$–代数的 $psMV$–滤子与 psG–滤子

文献 [269] 中引入了 $psBL$–代数的 $psMV$–滤子和 psG–滤子概念 (可以看成 7.4.1 节 MTL–代数的 MV–滤子和 G–滤子的非可换推广), 并借此刻画了 $psMV$–代数和 psG–代数的特征, 本节介绍这些结果. 读者不难发现, 其中大部分结果可以推广到 $psMTL$–代数中.

定义 7.4.13 设 F 是 $psBL$–代数 A 的一个滤子, 称 F 是 A 的 $psMV$–滤子 (pseudo-MV filter), 如果对任意 $x, y \in A$ 有

(MVF) $x \to y \in F$ 蕴涵 $((y \to x) \rightsquigarrow x) \to y \in F$, 且 $x \rightsquigarrow y \in F$ 蕴涵 $((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y \in F$.

由定理 7.4.36 (4) 知 $psBL$–代数 A 的 Boole 滤子必是 $psMV$–滤子.

定义 7.4.14 $psBL$–代数 A 的一个滤子 F 称为是 A 的 psG–滤子 (pseudo-G filter), 如果对任意 $x, y \in A$ 有

(GF) $x \to (x \to y) \in F$ 蕴涵 $x \to y \in F$, 且 $x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) \in F$ 蕴涵 $x \rightsquigarrow y \in F$.

定理 7.4.39 $psBL$–代数的任意 Boole 滤子必是 psG–滤子.

证明 设 F 是 $psBL$–代数 A 的一个 Boole 滤子, $x, y \in A$. 假设 $x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) \in F$. 由引理 7.4.7(2) 有 $x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) \leqslant ((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y) \to (x \rightsquigarrow y)$. 由滤子的定义得 $((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y) \to (x \rightsquigarrow y) \in F$. 应用定理 7.4.35(3) 可得 $x \rightsquigarrow y \in F$.

同理可证 $x \to (x \to y) \in F$ 蕴涵 $x \to y \in F$. 所以 F 是 A 的 psG–滤子.

定理 7.4.40 设 A 是一个 $psBL$–代数, F 是 A 的正规滤子, 则以下各项等价:

(1) F 是 Boole 滤子;

(2) F 既是 $psMV$–滤子又是 psG–滤子.

证明 (1)⇒(2). 见定理 7.4.36(4) 及定理 7.4.39.

(2)⇒(1). 设 F 既是 $psMV$–滤子又是 psG–滤子. 假设 $(x \rightsquigarrow y) \to x \in F$. 由于 F 是正规滤子, 故 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x \in F$. 由于

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to ((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y), \qquad (\text{由引理 } 7.4.7\ (2))$$

所以 $(x \rightsquigarrow y) \to ((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y) \in F$. 再由正规性得 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow ((x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y) \in F$. 应用 (GF) 即有 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y \in F$. 进而, $(x \rightsquigarrow y) \to y \in F$. 由 $psBL$–代数的性质有 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x \leqslant y \rightsquigarrow x$, 应用滤子的定义及 $(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow x \in F$ 得 $y \rightsquigarrow x \in F$. 于是, 应用 (MVF) 可得 $((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x \in F$. 从而, 根据滤子的性质及 $(x \rightsquigarrow y) \to y \in F$ 得 $x \in F$. 由定理 7.4.35(3) 知 F 是 Boole 滤子.

引理 7.4.8[77] $psBL$–代数 A 是 $psMV$–代数当且仅当满足 $(\forall x \in A) x^{\sim -} = x^{-\sim} = x$.

引理 7.4.9[292] $psBL$–代数 A 是 $psMV$–代数当且仅当满足

(pMV1) $(x \to y) \rightsquigarrow y = (y \to x) \rightsquigarrow x$, $(x \rightsquigarrow y) \to y = (y \rightsquigarrow x) \to x$, $\forall x, y \in A$.

命题 7.4.6　对于任意 *psBL*–代数 A 成立:

$$((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow y, \quad ((x \to y) \rightsquigarrow y) \to y = x \to y, \quad \forall x, y \in A.$$

定理 7.4.41　*psBL*–代数 A 是 *psMV*–代数当且仅当满足 $(\forall x, y \in A)$:

(pMV2) $(x \to y) \rightsquigarrow y = (((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow x$,

$(x \rightsquigarrow y) \to y = (((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x$.

证明　假设 A 是 *psMV*–代数, 则对任意 $x, y \in A$, 有

$(((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow x = (((y \to x) \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow x$　(由 (pMV1))

$=(y \to x) \rightsquigarrow x$　(由命题 7.4.6)

$=(x \to y) \rightsquigarrow y$,　(由 (pMV1))

即 $(x \to y) \rightsquigarrow y = (((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow x$. 同理可得 $(x \rightsquigarrow y) \to y = (((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x$. 这说明 (pMV2) 成立.

假设 A 是满足 (pMV2) 的 *psBL*–代数, 则对任意 $x, y \in A$ 有

$((y \to x) \rightsquigarrow x) \to ((x \to y) \rightsquigarrow y)$

$=((y \to x) \rightsquigarrow x) \to ((((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow x)$　(由 (pMV2))

$\geqslant (((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow (y \to x)$　(由引理 7.4.7 (2))

$\geqslant y \to ((x \to y) \rightsquigarrow y)$　(由引理 7.4.7 (1))

$=(x \to y) \rightsquigarrow (y \to y)$　(由定理 6.2.4 (24))

$=(x \to y) \rightsquigarrow 1 = 1$,

即 $((y \to x) \rightsquigarrow x) \to ((x \to y) \rightsquigarrow y)=1$. 类似地, $((x \to y) \rightsquigarrow y) \to ((y \to x) \rightsquigarrow x)=1$. 于是, $(x \to y) \rightsquigarrow y = (y \to x) \rightsquigarrow x$. 同理, $(x \rightsquigarrow y) \to y = (y \rightsquigarrow x) \to x$. 由引理 7.4.9 知 A 是 *psMV*–代数.

定理 7.4.42　设 A 是 *psBL*–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是 *psMV*–代数;

(2) A 的每一个滤子是 *psMV*–滤子;

(3) $\{1\}$是 A 的 *psMV*–滤子.

证明　(1)⇒(2). 假设 A 是 *psMV*–代数, 则对任意 $x, y \in A$ 有

$x \rightsquigarrow y = ((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow y$　(由命题 7.4.6)

$=((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y$　(由 (pMV1))

于是, 对于 A 的任意滤子 F 有 $x \rightsquigarrow y \in F$ 蕴涵 $((y \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow y \in F$. 同理, $x \to y \in F$ 蕴涵 $((y \to x) \rightsquigarrow x) \to y \in F$. 这说明 F 是 A 的 *psMV*–滤子.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 假设$\{1\}$是 A 的 *psMV*–滤子. 由定理 6.2.4(24) 得

$$x \rightsquigarrow ((x \rightsquigarrow y) \to y) = (x \rightsquigarrow y) \to (x \rightsquigarrow y) = 1 \in \{1\}.$$

应用 (MVF) 有 $((((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x) \rightsquigarrow ((x \rightsquigarrow y) \to y) \in \{1\}$, 即 $(((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x \leqslant (x \rightsquigarrow y) \to y$. 另一方面, 由 $psBL$–代数的性质有 $(x \rightsquigarrow y) \to y \leqslant (((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x$. 于是

$$(x \rightsquigarrow y) \to y = (((x \rightsquigarrow y) \to y) \rightsquigarrow x) \to x.$$

同理可证, $(x \to y) \rightsquigarrow y = (((x \to y) \rightsquigarrow y) \to x) \rightsquigarrow x$. 由定理 7.4.41 知 A 是 $psMV$–代数.

注 7.4.9 上述结果表明, 在 $psBL$–代数中滤子$\{1\}$并非 "平凡的", 它有重要价值.

定义 7.4.15 设 A 是 $psBL$–代数, 称 A 是伪 Gödel 代数 (简称 psG–代数), 如果对任意 $x \in A$, $x \otimes x = x$.

引理 7.4.10[78] 任意 psG–代数必是 G–代数, 即 psG–代数与 G–代数等价.

定理 7.4.43 设 A 是 $psBL$–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是 psG–代数;

(2) A 的每一个滤子是 psG–滤子;

(3) $\{1\}$是 A 的 psG–滤子.

证明 (1)⇒(2). 假设 A 是 psG–代数, 则对任意 $x, y \in A$ 有

$$x \rightsquigarrow y = x \otimes x \rightsquigarrow y = x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y), x \to y = x \otimes x \to y = x \to (x \to y).$$

从而, 对 A 的任意滤子 F, $x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) \in F$ 蕴涵 $x \rightsquigarrow y \in F$, 且 $x \to (x \to y) \in F$ 蕴涵 $x \to y \in F$. 这说明 F 是 A 的 psG–滤子.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 假设$\{1\}$是 A 的 psG–代数, 则对任意 $x, y \in A$ 有

$x \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow x \otimes x) = (x \otimes x) \rightsquigarrow (x \otimes x) = 1 \in \{1\}$. (由定理 6.2.4 (20))

应用 (GF) 得 $x \rightsquigarrow x \otimes x \in \{1\}$, 此即 $x \leqslant x \otimes x$. 另一方面, 由 $\otimes$ 的单调性得 $x \otimes x \leqslant x$. 所以 $x = x \otimes x$. 这说明是 psG–代数.

定理 7.4.44[269] 设 A 是 $psBL$–代数, 则以下条件等价:

(1) A 是 psG–代数;

(2) 对任意 $a \in A$, $G(a) = \{x \in A | a \leqslant x\}$ 是 A 的滤子.

推论 7.4.2[269] 设 H 是 $psBL$–代数 A 的正规 psG–滤子, 则对任意 $a \in A$, $G_a = \{x \in A | a \to x \in H\}$ 是包含 H 和 a 的最小滤子.

定理 7.4.45[269] 设 H 是 $psBL$–代数 A 的正规滤子, 则以下条件等价:

(1) H 是极大 Boole 滤子;

(2) H 是极大 psG–滤子;

(3) 对任意 $x, y \in A$, $(x \notin H, y \notin H) \Rightarrow (x \to y \in H, y \to x \in H)$.

推论 7.4.3[269] 设 A 是 psG–代数, H 是 A 的滤子, 则 H 是极大的当且仅当满足: $(x \notin H, y \notin H) \Rightarrow (x \to y \in H, y \to x \in H), \forall x, y \in A$.

7.5 BCC–代数的 Boole 滤子与强剩余 BCC–代数的正规滤子

7.2 节与 7.3 节的结果表明, 源于模糊逻辑的各种代数结构可以统一在 BCC–代数的框架下, 不论是可换的还是非可换的, 而且 $psBCK$–代数也是两种相容的 BCC–代数结构的 "结合体". 同时, $psBL$–代数、$psMTL$–代数或更一般的剩余格的滤子理论可以看成是 BCC–代数滤子的直接应用, BCC–代数滤子理论还可应用于其他相关代数结构上 (如伪 Hoop, 甚至与量子逻辑相关的代数结构 PD-poset). 本节将进一步展示 BCC–代数作为逻辑代数统一框架的优势, 其中, 7.5.1 小节在 BCC–代数中引入 Boole 滤子概念, 用以统一 MTL–代数、伪 Hoop、$psMTL$–代数等的对应概念; 7.5.2 小节引入剩余 BCC–代数的概念, 它是具有条件 (S) 的 BCK–代数的推广, 可作为各种基于 (伪)t–模逻辑系统的代数基础; 7.5.3 小节主要证明强剩余 BCC–代数的强正规素滤子定理, 它可以看成各种相关代数系统对应定理的一般化.

7.5.1 BCC–代数的 Boole 滤子

定义 7.5.1 设 F 是 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 的一个滤子, 称 F 是 A 的 Boole 滤子, 如果满足:

(BF) $\forall x, y \in A$, $(x \to y) \to x \in F \Rightarrow x \in F$.

如果 F 既是正规滤子又是 Boole 滤子, 则称为正规 Boole 滤子.

注 7.5.1 (1) 由于一般 BCC–代数未必是格, 故不能使用 $\vee$ 来定义 Boole 滤子.

(2) 由定理 7.4.1(3) 及定理 7.4.36(3) 知, 上述定义正是各种逻辑代数系统同一概念的一般化.

引理 7.5.1 设 F 是 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 的正规滤子, 则成立:

$$\forall x, y \in A, (x \to y) \to y \in F \Rightarrow (y \to x) \to ((x \to y) \to x) \in F.$$

证明 假设 $(x \to y) \to y \in F$, 由定义 7.2.3 (BCC1) 得

$$(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \to ((x \to y) \to x) = 1 \in F.$$

根据定义 7.2.10(2) 得 $(y \to x) \to ((x \to y) \to x) \in F$.

引理 7.5.2 设 F 是 BCC–代数 $(A;\geqslant,\to,1)$ 的正规 Boole 滤子, 则

$$\forall x,y\in A, x\to(x\to y)\in F\Rightarrow x\to y\in F.$$

证明 假设 $x\to(x\to y)\in F$, 由定义 7.2.3(BCC1) 得

$$((x\to y)\to y)\to((x\to(x\to y))\to(x\to y))=1\in F.$$

根据定义 7.2.10 (2) 得 $((x\to y)\to y)\to(x\to y)\in F$. 再应用定义 7.5.1 (BF) 得 $x\to y\in F$.

引理 7.5.3 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数, 对于 $a\in A$, 记 $S(a)=\{x\in A|a\leqslant x\}$. 如果 A 的滤子$\{1\}$是 A 的正规 Boole 滤子, 则对任意 $a\in A$ 有 $S(a)$ 是 A 的滤子.

证明 对任意 $a\in A$, 显然 $1\in S(a)$. 设 $x\to y\in S(a)$, $x\in S(a)$, 则 $a\leqslant x$, $a\leqslant x\to y$. 由 $a\leqslant x$, 应用命题 7.2.1(3) 得 $x\to y\leqslant a\to y$. 于是 $a\leqslant a\to y$, 即 $a\to(a\to y)=1\in\{1\}$. 由于$\{1\}$是 A 的正规 Boole 滤子, 根据引理 7.5.2 得 $a\to y\in\{1\}$. 这说明 $a\to y=1$, 即 $a\leqslant y$. 所以 $y\in S(a)$, 即 $S(a)$ 是 A 的滤子.

引理 7.5.4 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数. 如果 A 满足:

$(*)$ $(x\to y)\to x=x, \forall x,y\in A$,

则对于 A 的任何正规滤子 F 有: $\forall x,y\in A, (x\to y)\to y\in F\Rightarrow(y\to x)\to x\in F$.

证明 假设 $(x\to y)\to y\in F$, 由引理 7.5.1 知 $(y\to x)\to((x\to y)\to x)\in F$. 又由定义 7.2.3(BCC1) 得

$$((((x\to y)\to x))\to x)\to(((y\to x)\to((x\to y)\to x))\to((y\to x)\to x))=1\in F.$$

根据定义 7.2.10 (2) 得 $((((x\to y)\to x))\to x)\to((y\to x)\to x)\in F$. 由假设知 $(((x\to y)\to x))\to x=1$, 所以 $((y\to x)\to x)\in F$.

引理 7.5.5 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数, 则 A 为 BCK–代数当且仅当满足:

$$x\leqslant(x\to y)\to y,\quad \forall x,y\in A.$$

证明 由定义 7.1.13 知, 上述不等式在 BCK–代数中成立. 假设 BCC–代数 A 满足上述不等式, 则 $(\forall x,y,z\in A)$

$$x\to(y\to z)\leqslant((x\to(y\to z))\to(x\to z))\to(x\to z).$$

又, $y\leqslant(y\to z)\to z$ 且由定义 7.2.3 (BCC1) 得 $(y\to z)\to z\leqslant(x\to(y\to z))\to(x\to z)$, 故 $y\leqslant(x\to(y\to z))\to(x\to z)$. 应用命题 7.2.1 (3) 有

$$((x\to(y\to z))\to(x\to z))\to(x\to z)\leqslant y\to(x\to z).$$

所以, $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$. 类似地, $y \to (x \to z) \leqslant x \to (y \to z)$. 于是, $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$, $\forall x, y, z \in A$. 由命题 7.2.2 知 A 为 BCK–代数.

定理 7.5.1　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是有界 BCC–代数, 0 是其最小元, 则以下条件等价:

(1) A 是 Boole 代数;

(2) A 的每一个滤子均为正规 Boole 滤子.

证明　(1)⇒(2). 设 $(A; \leqslant)$ 是 Boole 代数, $'$ 是 A 的补运算, $\vee$, $\wedge$ 是其上确界和下确界运算, 1, 0 分别是其最大元和最小元, 则 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 按以下定义构成 BCC–代数:

$$x \to y = x' \vee y, \quad \forall x, y \in A.$$

容易验证,A 的每一个滤子均为正规 Boole 滤子.

(2)⇒(1). 假设 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 的每一个滤子均为正规 Boole 滤子.

首先证明在 A 中成立以下等式:

$(*)$ $(x \to y) \to x = x$, $\forall x, y \in A$.

由假设 $\{1\}$是 A 的正规 Boole 滤子, 由引理 7.5.3 知 $S((x \to y) \to x)$ 是 A 的滤子. 由于 A 的每一个滤子均为正规 Boole 滤子, 故 $S((x \to y) \to x)$ 是正规 Boole 滤子. 因为

$$(x \to y) \to x \in S((x \to y) \to x).$$

应用定义 7.5.1 (BF) 得 $x \in S((x \to y) \to x)$. 这说明 $(x \to y) \to x \leqslant x$. 另一方面, 由命题 7.2.1 (1) 有 $x \leqslant (x \to y) \to x$. 所以, 等式 $(*)$ 成立.

其次证明在 A 中成立以下等式:

$(**)$ $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$, $\forall x, y \in A$.

由假设 $\{1\}$是 A 的正规 Boole 滤子, 由引理 7.5.3 知 $S((x \to y) \to y)$ 是 A 的滤子. 由于 A 的每一个滤子均为正规 Boole 滤子, 故 $S((x \to y) \to y)$ 是正规 Boole 滤子. 因为

$$(x \to y) \to y \in S((x \to y) \to y).$$

应用引理 7.5.4 得 $(y \to x) \to x \in S((x \to y) \to x)$. 这说明 $(x \to y) \to y \leqslant (y \to x) \to x$. 同理可证相反的不等式成立. 所以, 等式 $(**)$ 成立.

下面证明在 A 中成立以下不等式:

$(***)$ $x \leqslant (x \to y) \to y$, $\forall x, y \in A$.

事实上, 由命题 7.2.1 (1) 知 $x \leqslant (y \to x) \to x$, 应用等式 $(**)$ 得 $x \leqslant (x \to y) \to y$. 由引理 7.5.5 知 A 为 BCK–代数.

现在, 在 A 中定义如下一元运算 $'$ 及二元运算 $\vee$, $\wedge$: $x' = x \to 0$, $x \vee y = (x \to y) \to y$, $x \wedge y = (x' \vee y')'$, 则容易验证 $(A; \vee, \wedge, 0, 1)$ 构成有界分配格, 且 $'$ 满

足 $x \vee x' = 1$, $x \wedge x' = 1$ (详细证明可参见文献 [249] 第 I 章第 6 节 Implicative BCK-algebras, 实际上此时 A 正好构成关联 BCK–代数). 所以, A 是 Boole 代数.

7.5.2 剩余 BCC–代数

定义 7.5.2 设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCC–代数, $a, b \in A$. 规定:

$$S_l(a,b) = \{x \in A | a \leqslant b \to x\},$$

$$S_r(a,b) = \{x \in A | b \leqslant a \to x\}.$$

显然, $1, a, b \in S_l\ (a, b)$ 及 $S_r(a, b)$. 如果对任意 $a, b \in A$, $S_l(a, b)$ 均有最小元 (记为 $a \otimes_l b$), 则称 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 具有条件 (S_l). 如果对任意 $a, b \in A$, $S_r(a, b)$ 均有最小元 (记为 $a \otimes_r b$), 则称 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 具有条件 (S_r).

根据定义, 容易证明:

$$a \otimes_l b \leqslant a, b; \quad a \otimes_r b \leqslant a, b; \quad a \otimes_l 1 = 1 \otimes_l a = a; \quad a \otimes_r 1 = 1 \otimes_r a = a.$$

且当 BCC–代数 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 有界 (即存在 $0 \in A$, 对任意 $a \in A$ 有 $0 \leqslant a$) 时, 有

$$a \otimes_l 0 = 0 \otimes_l a = 0, \quad a \otimes_r 0 = 0 \otimes_r a = 0.$$

例 7.5.1 设 $A=\{0, a, b, c, 1\}$, 其二元运算 $\to$ 见表 7.17(其序关系 $\geqslant$ 定义为 $x \geqslant y$ 当且仅当 $y \to x=1$), 则 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是一个 BCC–代数且具有条件 (S_l), 其对应的 $\otimes_l$ 如表 7.18 所示. 事实上, 可以使用数学软件 Mathematica 验证, 如图 7.10 所示.

表 7.17 运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	b	1	1	1	1
b	a	c	1	c	1
c	b	b	b	1	1
1	0	a	b	c	1

表 7.18 运算 "$\otimes_l$" 的定义

$\otimes_l$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	a	a	c	c
1	0	a	b	c	1

需要说明的是, 上述 BCC–代数不是一个 BCK–代数, 因为

$$b \to (c \to 0) \neq c \to (b \to 0).$$

而且, $\otimes_l$ 不是结合的, 因为

$$c \otimes_l (b \otimes_l b) \neq (c \otimes_l b) \otimes_l b.$$

定义 7.5.3 设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCC–代数, 称 A 具有条件 (S_lA), 如果 A 具有条件 (S_l) 且 $\otimes_l$ 满足结合律. 类似地, 称 BCC–代数 A 具有条件 (S_rA), 如果 A 具有条件 (S_r) 且 $\otimes_r$ 满足结合律.

```
bcc.nb
In[1]:= M1 = {{5, 5, 5, 5, 5}, {3, 5, 5, 5, 5}, {2, 4, 5, 4, 5}, {3, 3, 3, 5, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}};
a1 = 0;
For[i = 1, i < 6, i++,
   For[j = 1, j < 6, j++,
     For[k = 1, k < 6, k++, If[M1[[M1[[j, k]], M1[[M1[[i, j]], M1[[i, k]]]]]] != 5, a1++]]]];
a2 = 0;
For[i = 1, i < 6, i++, For[j = 1, j < 6, j++,
 If[M1[[i, j]] == 5 && M1[[j, i]] == 5 && i != j, a2++]]];
M2 = {{1, 1, 1, 1, 1}, {1, 1, 1, 1, 2}, {1, 1, 3, 1, 3}, {1, 2, 2, 4, 4}, {1, 2, 3, 4, 5}};
a3 = 0;
For[i = 1, i < 6, i++, For[j = 1, j < 6, j++, If[M1[[i, M1[[j, M2[[i, j]]]]]] != 5, a3++]]];
a4 = 0;
For[i = 1, i < 6, i++,
   For[j = 1, j < 6, j++,
     For[k = 1, k < 6, k++, If[M1[[i, M1[[j, k]]]] == 5 && M1[[M2[[i, j]], k]] != 5, a4++]]]];
If[a1 == 0 && a2 == 0 && a3 == 0 && a4 == 0, Print["true"], Print["false"]]
true
```

图 7.10　使用数学软件 Mathematica 验证具有条件 (S_l) 的 BCC–代数

引理 7.5.6　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是具有条件 (S_l) 的 BCC–代数, 则有

(1) $a \leqslant b \Rightarrow a \otimes_l c \leqslant b \otimes_l c$, $\forall a, b, c \in A$;

(2) $a \otimes_l b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \to c$, $\forall a, b, c \in A$.

证明　设 $a \leqslant b$, 对于任意 $c \in A$, 由 $\otimes_l$ 的定义知 $b \leqslant c \to (b \otimes_l c)$. 从而 $a \leqslant c \to (b \otimes_l c)$. 再次应用 $\otimes_l$ 的定义得 $a \otimes_l c \leqslant b \otimes_l c$, 即 (1) 成立.

如果 $a \otimes_l b \leqslant c$, 则由命题 7.2.1 (2) 得 $b \to (a \otimes_l b) \leqslant b \to c$. 又由 $\otimes_l$ 的定义知 $a \leqslant b \to (a \otimes_l b)$. 故 $a \leqslant b \to c$. 反之, 如果 $a \leqslant b \to c$, 由 $\otimes_l$ 的定义知 $a \otimes_l b \leqslant c$, 即 (2) 成立.

同理可证

引理 7.5.7　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是具有条件 (S_r) 的 BCC–代数, 则有

(1) $a \leqslant b \Rightarrow c \otimes_r a \leqslant c \otimes_r b$, $\forall a, b, c \in A$;

(2) $a \otimes_r b \leqslant c$ 当且仅当 $b \leqslant a \to c$, $\forall a, b, c \in A$.

定理 7.5.2　设 $(A; \geqslant, \to, 1)$ 是 BCC–代数, 则 A 具有条件 (S_lA) 的充要条件是存在二元运算 $\otimes$ 使得对任意 $a, b, c \in A$ 成立:

(S1) $a \to (b \to c)=(a \otimes b) \to c$,

且 $\otimes$ 正好是 $\otimes_l$.

证明　假设存在二元运算 $\otimes$ 满足 (S1). 对任意 $a, b \in A$, 由 (S1) 得

$$a \to (b \to (a \otimes b)) = (a \otimes b) \to (a \otimes b) = 1,$$

故 $a \leqslant b \to (a \otimes b)$. 另一方面, 若 $a \leqslant b \to c$, 则 $(a \otimes b) \to c = a \to (b \to c)=1$, 即 $a \otimes b \leqslant c$. 这说明 $a \otimes b$ 是 $S_l(a, b)$ 中的最小元, 即 A 具有条件 (S_l).

又, 对任意 $a, b, c, x \in A$, 根据 (S1) 可得

$$
\begin{aligned}
(a\otimes(b\otimes c))\to x &= a\to((b\otimes c)\to x)=a\to(b\to(c\to x))\\
&=(a\otimes b)\to(c\to x)=((a\otimes b)\otimes c)\to x.
\end{aligned}
$$

在上述等式中分别取 x 为 $a\otimes(b\otimes c)$ 及 $(a\otimes b)\otimes c$, 即可得到 $(a\otimes(b\otimes c))\to((a\otimes b)\otimes c)=1$ 及 $((a\otimes b)\otimes c)\to(a\otimes(b\otimes c))=1$, 所以 $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$, 即 $\otimes$ 是结合的, 这说明 A 具有条件 $(\mathrm{S_l}A)$.

反之, 假设 A 具有条件 $(\mathrm{S_l}A)$. 对任意 $a, b, c\in A$. 由 $a\leqslant b\to(a\otimes_l b)$, 应用命题 7.2.1 (3) 得 $(b\to(a\otimes_l b))\to(b\to c)\leqslant a\to(b\to c)$. 而据定义 7.2.3 (BCC1) 得

$$(a\otimes_l b)\to c\leqslant(b\to(a\otimes_l b))\to(b\to c).$$

于是, $(a\otimes_l b)\to c\leqslant a\to(b\to c)$. 另一方面, 由 $b\to c\leqslant b\to c$ 及 $\otimes_l$ 的定义得 $(b\to c)\otimes_l b\leqslant c$. 应用命题 7.2.1 (2), $(a\otimes_l b)\to((b\to c)\otimes_l b)\leqslant(a\otimes_l b)\to c$.

又由 $a\to(b\to c)\leqslant a\to(b\to c)$, 应用引理 7.5.6 (2) 得 $(a\to(b\to c))\otimes_l a\leqslant b\to c$. 再应用引理 7.5.6 (1) 得 $((a\to(b\to c))\otimes_l a)\otimes_l b\leqslant(b\to c)\otimes_l b$. 由 $\otimes_l$ 的结合性得

$$(a\to(b\to c))\otimes_l(a\otimes_l b)\leqslant(b\to c)\otimes_l b.$$

于是, 由引理 7.5.6 (2) 得 $a\to(b\to c)\leqslant(a\otimes_l b)\to((b\to c)\otimes_l b)$. 故 $a\to(b\to c)\leqslant(a\otimes_l b)\to c$.

综上所述, $a\to(b\to c)=(a\otimes_l b)\to c$, 即 (S1) 成立.

同理可证

定理 7.5.3 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数, 则 A 具有条件 $(\mathrm{S_r}A)$ 的充要条件是存在二元运算有 $\otimes$ 使得对任意 $a, b, c\in A$ 成立:

(S2) $a\to(b\to c)=(b\otimes a)\to c$,

且 $\otimes$ 正好是 $\otimes_r$.

定义 7.5.4 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数, 若 A 具有定理 7.5.2 中所述条件, 则称 A 是左剩余的. 同样, 若 A 具有定理 7.5.3 中所述条件, 则称 A 是右剩余的.

注 7.5.2 上述定义表明, 左、右剩余 BCC–代数分别等价于具有条件 $(\mathrm{S_l}A)$, $(\mathrm{S_r}A)$ 的 BCC–代数, 使用左 (右) 剩余 BCC–代数的概念强调它们带有运算 $\otimes_l(\otimes_r)$.

定义 7.5.5 设 $(A;\geqslant,\to,1)$ 是 BCC–代数, 称 A 具有条件 $(\mathrm{S_l}A\mathrm{LB_l})$, 如果 A 具有条件 $(\mathrm{S_l}A)$ 且满足:

(L) $(A;\leqslant)$ 是格;

$(\mathrm{B_l})$ $a\wedge b=(a\to b)\otimes_l a$, $\forall a, b\in A$.

同样, 称 A 具有条件 $(\mathrm{S_r}A\mathrm{LB_r})$, 如果 A 具有条件 $(\mathrm{S_r}A)$ 且满足:

(L) $(A;\leqslant)$ 是格;

$(\mathrm{B_r})$ $a\wedge b=a\otimes_r(a\to b)$, $\forall a, b\in A$.

至此, 可以利用 BCC–代数给出 $psBL$–代数的特征性质了：

定理 7.5.4　代数结构 $(A; \vee, \wedge, \otimes, \rightsquigarrow, \rightarrow, 0, 1)$ 是一个 $psBL$–代数, 当且仅当满足：

(1) $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是具有条件 $(\mathrm{S_lALB_l})$ 的有界 BCC–代数 (0 是最小元);

(2) $(A; \geqslant, \rightsquigarrow, 1)$ 是具有条件 $(\mathrm{S_rALB_r})$ 的有界 BCC–代数 (0 是最小元);

(3) $a \otimes_l b = a \otimes_r b = a \otimes b, \forall a, b \in A$.

定义 7.5.6　设 $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是 BCC–代数, 称 A 具有条件 $(\mathrm{S_lALM})$, 如果 A 具有条件 (S_lA) 且满足：

(L) $(A; \leqslant)$ 是格;

(M) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$=1, $\forall a, b \in A$.

同样, 称 A 具有条件 $(\mathrm{S_rALM})$, 如果 A 具有条件 (S_rA) 且满足上述条件 (L) 及 (M).

容易证明 $psMTL$–代数的如下特征性质.

定理 7.5.5　代数结构 $(A; \vee, \wedge, \otimes, \rightsquigarrow, \rightarrow, 0, 1)$ 是一个 $psMTL$–代数, 当且仅当满足：

(1) $(A; \geqslant, \rightarrow, 1)$ 是具有条件 $(\mathrm{S_lALM})$ 的有界 BCC–代数 (0 是最小元);

(2) $(A; \geqslant, \rightsquigarrow, 1)$ 是具有条件 $(\mathrm{S_rALM})$ 的有界 BCC–代数 (0 是最小元);

(3) $a \otimes_l b = a \otimes_r b = a \otimes b, \forall a, b \in A$.

7.5.3　强剩余 BCC–代数及其强正规素滤子定理

由定义 7.5.4 知, 左剩余 BCC–代数一定是右剩余的 (只需将 $\otimes$ 运算反序即可), 右剩余 BCC–代数一定是左剩余的. 对于左剩余 BCC–代数的所有结果, 在右剩余 BCC–代数中有类似结果. 故本节仅讨论左剩余 BCC–代数 (未指明时均指左剩余), 且将 $\otimes_l$ 简记为 $\otimes$. 本节内容来自文献 [315](注意, 原文中的 “正规滤子” 是这里的强正规滤子), 部分结果的证明省略了.

定理 7.5.6　设 $(A; \rightarrow, 1)$ 为是剩余 BCC–代数, 则 $\forall x, y, z \in A$ 有

(1) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$;

(2) $x \otimes y = \wedge\{a \in A | x \leqslant y \rightarrow a\}$;

(3) $x \otimes 1 = x = 1 \otimes x$;

(4) 若 $x \leqslant y$, 则 $x \otimes z \leqslant y \otimes z$;

(5) $x \leqslant y \rightarrow z$ 当且仅当 $x \otimes y \leqslant z$;

(6) 若 $x \leqslant y$, 则 $z \otimes x \leqslant z \otimes y$;

(7) $x \otimes y \leqslant x$, $x \otimes y \leqslant y$;

(8) $x \rightarrow y \leqslant x \otimes z \rightarrow y \otimes z$;

(9) $z \leqslant (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z \otimes y)$.

定理 7.5.7 设 $(A;\to,1)$ 为是剩余 BCC–代数, F 是 A 的正规滤子, 则

(1) 若 $x\leqslant y$ 且 $x\in F$, 则 $y\in F$;

(2) 若 $x\in F$, 则 $\forall y\in A$ 有 $y\to x\in F$;

(3) 若 $x\to y\in F$ 且 $x\in F$, 则 $y\in F$;

(4) 若 $x,y\in F$, 则 $x\otimes y\in F$;

(5) 若 $z\leqslant x\to y$ 且 $x\in F$, 则 $z\to y\in F$.

定义 7.5.7 设 F 是剩余 BCC–代数 $(A;\to,1)$ 的滤子. 称 F 是素滤子, 如果满足:

(PF) $\forall x,y\in A$, $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$.

定理 7.5.8 设 $(A;\to,1)$ 为是剩余 BCC–代数, F 是 A 的正规滤子. 在 A 上定义二元关系 $\sim_F$ 如下:

$$x\sim_F y \text{ 当且仅当 } x\to y\in F \text{ 且 } y\to x\in F,$$

则

(1) $\sim_F$ 是 A 上关于 $\to,\otimes$ 的同余关系, 且商代数 $A/F=A/\sim_F=\{[a]_F|a\in A\}$ 是剩余 BCC–代数, 其中的偏序由下式确定: $[x]_F\leqslant[y]_F$ 当且仅当 $x\to y\in F$.

(2) 若 F 是素滤子, 则 A/F 是全序剩余 BCC–代数.

证明 (1) 由定理 7.2.15 知 $\sim_F$ 是 A 上等价关系且关于 $\to$ 同余. 下证 $\sim_F$ 关于 $\otimes$ 同余. 设 $x\sim_F y$, $u\sim_F v$, 则由定理 7.5.6 (8) 得 $x\to y\leqslant x\otimes u\to y\otimes u$, 由此及 $x\to y\in F$, 应用定理 7.5.7 (1) 得 $x\otimes u\to y\otimes u\in F$. 另一方面, 由定理 7.5.6 (9) 得 $y\leqslant(u\to v)\to(u\to y\otimes v)$, 由此及 $u\to v\in F$, 应用定理 7.5.7 (5) 得 $y\to(u\to y\otimes v)\in F$. 再由剩余 BCC–代数的定义得, $y\otimes u\to y\otimes v=y\to(u\to y\otimes v)\in F$. 而由定义 7.2.3 (BCC1) 得

$$y\otimes u\to y\otimes v\leqslant(x\otimes u\to y\otimes u)\to(x\otimes u\to y\otimes v),$$

于是, 根据 $y\otimes u\to y\otimes v\in F$, $x\otimes u\to y\otimes u\in F$, 并应用定理 7.5.7 (1), (3) 即得 $x\otimes u\to y\otimes v\in F$. 同理可证, $y\otimes v\to x\otimes u\in F$, 即 $x\otimes u\sim_F y\otimes v\in F$, 这说明 $\sim_F$ 关于 $\otimes$ 同余.

容易验证 $A/F=A/\sim_F=\{[a]_F|a\in A\}$ 是剩余 BCC–代数.

(2) 设 $[x]_F,[y]_F\in A/F$. 若 F 是素滤子, 则 $x\to y\in F$ 或 $y\to x\in F$. 从而 $[x]_F\leqslant[y]_F$ 或 $[y]_F\leqslant[x]_F$, 这说明 A/F 是全序剩余 BCC–代数.

在剩余 BCC–代数中, 对自然数 n, x^n 被归纳定义为 $x^1=x$, $x^n=x^{n-1}\otimes x$, 即

$$x^n=((\cdots((x\otimes x)\otimes x)\cdots)\otimes x)\otimes x.$$

定义 7.5.8 设 F 是剩余 BCC–代数 $(A;\to,1)$ 的正规滤子, 称 F 是强的, 如果它满足:

(NF1) 对任意 $y \in x \otimes F=\{x \otimes f | f \in F\}$, 存在 $z \in F \otimes x=\{f \otimes x | f \in F\}$使得 $y \geqslant z$;

(NF2) 对任意 $y \in F \otimes x=\{f \otimes x | f \in F\}$, 存在 $z \in x \otimes F=\{x \otimes f | f \in F\}$使得 $y \geqslant z$.

注 7.5.3 由定理 7.4.31 知, 剩余 BCC–代数强正规滤子的概念来源于 $psMTL$–代数的正规滤子.

命题 7.5.1 设 F 是剩余 BCC–代数 $(A; \to, 1)$ 的强正规滤子, 则

(1) 对任意 $f_1 \in F, a \in A$ 及自然数 n, 必存在 $f_2 \in F$ 使得 $a^n \otimes f_2 \leqslant f_1 \otimes a^n$;

(2) 对任意 $f_1 \in F, a \in A$ 及自然数 n, 必存在 $f_2 \in F$ 使得 $f_2 \otimes a^n \leqslant a^n \otimes f_1$.

证明 (1) 对自然数 n 施行数学归纳法. 当 n=1 时, 由 (NF2) 知结论成立. 假设 $n=k$ 时结论成立, 则对任意 $f_1 \in F, a \in A$, 必存在 $f_2 \in F$ 使得 $a^k \otimes f_2 \leqslant f_1 \otimes a^k$. 应用定理 7.5.6 (4) 得 $(a^k \otimes f_2) \otimes a \leqslant (f_1 \otimes a^k) \otimes a$, 即

$$a^k \otimes (f_2 \otimes a) \leqslant f_1 \otimes a^{k+1}.$$

而由 (NF2) 知, 必存在 $f_3 \in F$ 使得 $a \otimes f_3 \leqslant f_2 \otimes a$. 应用定理 7.5.6 (6) 得 $a^k \otimes (a \otimes f_3) \leqslant a^k \otimes (f_2 \otimes a)$, 即 $a^{k+1} \otimes f_3 \leqslant a^k \otimes (f_2 \otimes a)$. 于是, 结合上述两个结果得 $a^{k+1} \otimes f_3 \leqslant f_1 \otimes a^{k+1}$, 即 $n=k+1$ 时结论成立.

(2) 类似 (1) 可证明 (2) 成立.

定理 7.5.9 设 F 是剩余 BCC–代数 $(A; \to, 1)$ 的强正规滤子, $a \in A$, 且对任意 $f \in F$ 及自然数 n 有

(*) $a^n \leqslant (a^n \to f) \to f$,

则 $F_a=\{x \in A | \exists y \in F$ 及自然数 n 使得 $y \leqslant a^n \to x\}$是 A 的正规滤子.

证明 (1) 显然 $1 \in F_a$.

(2) 设 $x \to y \in F_a$, $x \in F_a$, 则由 F_a 的定义知, 存在自然数 n, m 及 f_1, $f_2 \in F$ 使得 $f_1 \leqslant a^n \to (x \to y)$, $f_2 \leqslant a^m \to x$. 于是, 由定理 7.5.6 (5) 有 $f_1 \otimes (a^n \otimes x) \leqslant y$, $f_2 \otimes a^m \leqslant x$. 再应用定理 7.5.6 (6) 得, $(f_1 \otimes a^n) \otimes (f_2 \otimes a^m) \leqslant y$, $f_1 \otimes (a^n \otimes f_2) \otimes a^m \leqslant y$. 根据命题 7.5.1 (2), 必存在 $f_3 \in F$ 使得 $f_3 \otimes a^n \leqslant a^n \otimes f_2$. 所以, $f_1 \otimes (f_3 \otimes a^n) \otimes a^m \leqslant f_1 \otimes (a^n \otimes f_2) \otimes a^m \leqslant y$, 即

$$(f_1 \otimes f_3) \otimes a^{n+m} \leqslant y.$$

而由 $f_1, f_3 \in F$ 得 $f_1 \otimes f_3 \in F$(由定理 7.5.7 (4)). 这说明 $f_1 \otimes f_3 \leqslant a^{n+m} \to y$, 即 $y \in F_a$.

(3) 设 $x \in F_a$, $y \in A$. 下证 $(x \to y) \to y \in F_a$. 由 $x \in F_a$ 知, 存在自然数 n 及 $f_1 \in F$ 使得 $f_1 \leqslant a^n \to x$, 即 $f_1 \otimes a^n \leqslant x$. 由命题 7.2.1 (3) 得, $(f_1 \otimes a^n \to y) \to y \leqslant$

$(x\to y)\to y$. 故由刚证明的结果 (2) 知, 只要证明 $(f_1\otimes a^n\to y)\to y\in F_a$, 即证明了 $(x\to y)\to y\in F_a$. 而

$$\begin{aligned} a^n &\leqslant (a^n\to y)\to y && \text{(由 (*))}\\ &\leqslant [f_1\to(a^n\to y)]\to(f_1\to y) && \text{(由定义 7.2.3 (BCC1))}\\ &=(f_1\otimes a^n\to y)\to(f_1\to y) && \text{(剩余 BCC–代数的定义)}\end{aligned}$$

于是, $a^n\leqslant(f_1\otimes a^n\to y)\to(f_1\to y)$, $a^n\otimes(f_1\otimes a^n\to y)\leqslant f_1\to y$. 应用命题 7.2.1 (3) 得

$$(f_1\to y)\to y\leqslant a^n\otimes(f_1\otimes a^n\to y)\to y=a^n\to[(f_1\otimes a^n\to y)\to y].$$

由 $f_1\in F$ 得 $(f_1\to y)\to y\in F$(应用定理 7.2.16), 从而由上式知 $(f_1\otimes a^n\to y)\to y\in F_a$.

定义 7.5.9 设 $(A;\to,1)$ 是剩余 *BCC*–代数, A 称为是强的, 如果满足以下条件:

(S1) 对任意自然数 n, $(x\to y)^n\to z\leqslant[(y\to x)^n\to z]\to z$, $\forall x, y, z\in A$;

(S2) 对 A 的任意强正规滤子 F 及任意 $a\in A$, $F_a=\{x\in A|\exists y\in F$ 及自然数 n 使得 $y\leqslant a^n\to x\}$均是 A 的强正规滤子.

注 7.5.4 强剩余 *BCC*–代数是存在的, 如对于任意 *BL*–代数 $(A;\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$, 其对应的蕴涵结构 $(A;\to,1)$ 是强剩余 *BCC*–代数.

定理 7.5.10(强正规素滤子定理) 设 $(A;\to,1)$ 是强剩余 *BCC*–代数, $a\in A$ 且 $a\neq1$, 则存在 A 的强正规素滤子 F 使得 $a\notin F$.

证明 设 $\wp$ 是 A 的所有不包含 a 的强正规滤子组成的集合. 因为$\{1\}\in\wp$, 故 $\wp\neq\varnothing$. 容易验证, $(\wp,\subseteq)$ 是一个偏序集, 且 $\wp$ 中的每一个滤子链$\{F_i\}_{i\in I}$ 有上界 $\cup_{i\in I}F_i$. 从而, 由 Zorn 引理知, $\wp$ 有极大元, 记为 F. 显然 $a\notin F$. 下证 F 是素滤子.

如果 F 不是素滤子, 则一定存在 $b, c\in A$ 使得 $b\to c\notin F$ 且 $c\to b\notin F$. 记

$$F_1=\{x\in A|\exists y\in F \text{ 及自然数 } n \text{ 使得 } y\leqslant(b\to c)^n\to x\},$$

$$F_2=\{x\in A|\exists y\in F \text{ 及自然数 } n \text{ 使得 } y\leqslant(c\to b)^n\to x\}.$$

由定义 7.5.9 (S2) 知 F_1,F_2 均是 A 的强正规滤子. 显然, $b\to c\in F_1$, $c\to b\in F_2$, $F\subseteq F_1$, $F\subseteq F_2$. 这样, 我们只需要证明 $F_1\in\wp$ 或 $F_2\in\wp$ 即可, 即需证明 $a\notin F_1$ 或 $a\notin F_2$.

事实上, 如果 $a\in F_1$ 且 $a\in F_2$, 则 $\exists y, v\in F$, 及自然数 n, m 使得

$$y\leqslant(b\to c)^n\to a, v\leqslant(c\to b)^m\to a.$$

不失一般性, 设 $m\leqslant n$, 则由定理 7.5.6 (4) 得 $(c\to b)^n\leqslant(c\to b)^m$. 再应用命题 7.2.1(3) 得 $(c\to b)^m\to a\leqslant(c\to b)^n\to a$. 于是, $v\leqslant(c\to b)^n\to a$. 进而有

$y \leqslant (b \to c)^n \to a$

$\leqslant ((c \to b)^n \to a) \to a$ 　　(由定义 7.5.9 (S1))

$\leqslant v \to a,$ 　　(命题 7.2.1 (3) 及 $v \leqslant (c \to b)^n \to a$)

所以, 由定理 7.5.7 (1), (3) 及 $y, v \in F$ 得 $a \in F$. 这是一个矛盾, 从而说明 $a \notin F_1$ 或 $a \notin F_2$, 这又与 F 是 $\wp$ 的极大元矛盾, 因而假设 “F 不是素滤子” 是错误的.

7.6 强 De Morgan 代数与 DR_0–代数

早在 1935 年, Moisil 就研究了 De Morgan 格; 而在 20 世纪 50 年代, Bialynicki Birula, Rasiowa 和 Kalman 开始研究 De Morgan 代数 (即没有补余律的 Boole 代数, 又称拟 Boole 代数 [316,317], 而模糊集理论的创立为 De Morgan 代数找到了强大的实际应用背景 (需要指出的是, 文献 [320] 中提到的 fuzzy 格, 是一类特殊的 De Morgan 代数, 因为它要求是完备的完全分配格). 由于剩余格和 De Morgan 代数都有模糊逻辑的实际背景, 研究它们之间的关系就是非常自然的问题了, 文献 [319], [320] 就此作了深入的探讨, 本节将介绍这些结果.

本节旨在解决两个方面的问题, 其一是研究剩余格 (本节的剩余格均指可换剩余格) 在什么情况下构成 De Morgan 代数, 即在仅考虑剩余格的序结构及非运算 “$\neg$”(其含义是 $\neg a = a \to 0$) 的情况下, 剩余格成为 De Morgan 代数的充要条件. 其二是研究 De Morgan 代数在什么情况下构成剩余格, 由于 De Morgan 代数本身并没有蕴涵运算 $\to$ 和相应的 $\otimes$ 运算, 故需要基于 De Morgan 代数的序结构构造出恰当的 $\to$ 和 $\otimes$, 以使产生的新代数结构成为剩余格.

7.6.1 正则剩余格与 De Morgan 代数的关系

定义 7.6.1[177] 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个可换剩余格 (本节的剩余格均指可换剩余格, 以下不再每次说明). 若 L 满足条件

(C1) $(x \to 0) \to 0 = x, \forall x \in L,$

则称 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 为正则剩余格. 若 L 满足 (C1) 及

(C2) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z), \forall x, y, z \in L,$

则称 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 为强正则剩余格.

可以证明, 强正则剩余格与 $IMTL$–代数等价 [182,298].

De Morgan 代数的中点 (也称不动点) 是指满足以下条件的元素 $x \in L$: $x' = x$.

需要指出的是一般剩余格并不要求分配性, 而 De Morgan 代数要求是分配格. 同时, 作为特殊剩余格的 MTL–代数是分配的, 但分配剩余格并不一定是 MTL–代数, 下面给出一个分配剩余格的例子, 它不是 MTL–代数.

例 7.6.1 设 $L = \{0, a, b, c, 1\}$, 其上的二元运算 $\to$ 及 $\otimes$ 按表 7.19、表 7.20 的

方式定义, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.11 所示, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是剩余格, 且 $\wedge$, $\vee$ 满足分配律, 但 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 不是 MTL–代数, 因为 $(b \to c) \vee (c \to b) \neq 1$.

表 7.19 运算 "$\to$"

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	a	1	a	a	1
b	a	1	1	a	1
c	a	1	a	1	1
1	0	a	b	c	1

表 7.20 运算 "$\otimes$"

$\otimes$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	a
b	0	0	0	0	b
c	0	0	0	0	c
1	0	a	b	c	1

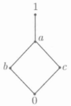


图 7.11 序关系图

定理 7.6.1 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个剩余格, 规定 $x' = x \to 0$, 则 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 构成一个 De Morgan 代数当且仅当 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是分配的正则剩余格.

证明 如果 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 构成一个 De Morgan 代数, 则 L 是分配格, 且对合律成立, 即 $(x \to 0) \to 0 = x'' = x$. 这说明 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是分配的正则剩余格.

反之, 如果 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是分配的正则剩余格, 则 "$'$" 是 L 上的对合映射. 下面证明 De Morgan 对偶律成立. 而由定理 2.2.1 (7) 知 $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $\forall a, b \in L$. 故只需再证 $(a \wedge b)' = a' \vee b' (\forall a, b \in L)$ 成立即可. 事实上, 根据 "$'$" 的对合性可得 $a' \vee b' = (a' \vee b')'' = ((a' \vee b')')' = (a'' \wedge b'')' = (a \wedge b)'$. 所以 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 构成一个 De Morgan 代数.

命题 7.6.1 设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是一个剩余格, 则在 L 中成立

(C3) $\forall a, b \in L, a \to b \geqslant a' \vee b$;

(C4) $\forall a, b \in L, a' \vee b = 1 \Rightarrow a \leqslant b$.

证明 由于 $a' = a \to 0 \leqslant a \to b$, $b = 1 \to b \leqslant a \to b$. 所以 $a' \vee b \leqslant a \to b$, 即 (C3) 成立.

根据 (C3) 及剩余格的性质得 $a' \vee b = 1 \Rightarrow a \to b \geqslant 1 \Rightarrow a \leqslant b$, 即 (C4) 成立.

注 7.6.1 条件 (C4) 只涉及序关系, 它反映了剩余格的序结构的特点, 而下面的例子表明, 在 De Morgan 代数中条件 (C4) 未必成立.

例 7.6.2 设 $L = \{0, a, b, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义为 $0 < a \| b < 1$(即 a 与 b 不可比), L 上的一元运算 "$'$" 定义为 $0' = 1$, $1' = 0$, $a' = a$, $b' = b$. 容易验证 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数, 但 (C4) 不成立, 因 $a' \vee b = 1$ 而 $a \nleqslant b$.

命题 7.6.1 表明, 要从一个 De Morgan 代数出发构造剩余格 (保持 "$'$" 的通常含义), 它必须满足条件 (C4). 为了后面讨论的方便, 引入强 De Morgan 代数的概念, 并研究它的一些基本性质.

定义 7.6.2　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个 De Morgan 代数. 如果对任意 $a, b, c \in L$ 成立

(C5) 若 $a \leqslant b' \vee c$ 且 $a \nleqslant c$, 则 $b \leqslant a' \vee c$,

则称 L 为强 De Morgan 代数.

定理 7.6.2　Boole 代数及全序 De Morgan 代数均是强 De Morgan 代数.

证明　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 为 Boole 代数, 若 $a \leqslant b' \vee c$ 且 $a \nleqslant c$, 则 $(b' \vee c)' \leqslant a'$, $(b' \vee c)' \vee c \leqslant a' \vee c$. 而

$$(b' \vee c)' \vee c = (b'' \wedge c') \vee c = c \vee (b \wedge c') = (c \vee b) \wedge (c \vee c') = (c \vee b) \wedge 1 = c \vee b.$$

所以 $b \leqslant c \vee b = (b' \vee c)' \vee c \leqslant a' \vee c$, 即 (C5) 成立.

设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是全序 De Morgan 代数, 若 $a \leqslant b' \vee c$ 且 $a \nleqslant c$, 则据全序条件知 $b' \leqslant c$ 或 $b' > c$. 若 $b' \leqslant c$, 则 $a \leqslant b' \vee c = c$, 这与 $a \nleqslant c$ 矛盾. 故 $b' > c$, 从而 $a \leqslant b' \vee c = b'$, $b \leqslant a' \leqslant a' \vee c$, 即 (C5) 成立.

例 7.6.2 中的 De Morgan 代数不是强的, 因为 $1 \leqslant a' \vee b$ 且 $1 \nleqslant b$, 但 $a \leqslant 1' \vee b$ 不成立.

定理 7.6.3　设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个强 De Morgan 代数, 则

(1) 条件 (C4) 成立, 即 $\forall a, b \in L$, $a' \vee b=1 \Rightarrow a \leqslant b$;

(2) L 为 Kleene 代数, 即 $\forall a, b \in L$, $a \wedge a' \leqslant b \vee b'$;

(3) 若 a 是 L 的中点, 则对任意 $b \in L$, $a \vee b = 1$ 蕴涵 $b = 1$;

(4) 若 L 有中点, 则中点是唯一的.

证明　(1) 设 $a' \vee b = 1$, $a, b \in L$. 如果 $b = 1$, 显然有 $a \leqslant b$. 如果 $b \neq 1$, 则 $1 \leqslant a' \vee b$ 且 $1 \nleqslant b$, 应用 (C5) 即得 $a \leqslant 1' \vee b = b$.

(2) 对任意 $a, b \in L$, 分以下几种情况讨论:

若 $a \leqslant b'$, 则 $a \wedge a' \leqslant a \leqslant b' \leqslant b \vee b'$.

若 $a \nleqslant b'$, 则根据 $a \leqslant (a \wedge a')' \vee b'$, 应用定义 7.6.2 (C5) 得 $a \wedge a' \leqslant a' \vee b'$. 当 $a' \vee b' \leqslant b \vee b'$ 时有 $a \wedge a' \leqslant a' \vee b' \leqslant b \vee b'$. 当 $a' \vee b' \nleqslant b \vee b'$ 时, 根据 $a' \vee b' \leqslant a' \vee (b \vee b')$, 应用定义 7.6.2 (C5) 得

$$a \leqslant (a' \vee b')' \vee (b \vee b') = (a \wedge b) \vee (b \vee b') = ((a \wedge b) \vee b) \vee b' = b \vee b',$$

进而得 $a \wedge a' \leqslant a \leqslant b \vee b'$. 总之, 条件 (2) 成立.

(3) 设 a 是 L 的中点, $a \vee b = 1$, $b \in L$, 则由中点及条件 (C4) 即得 $a' \vee b = a \vee b = 1 \Rightarrow a \leqslant b$. 于是, $a \vee b = b$. 从而有 $b = a \vee b = 1$.

(4) 若 a, b 是 L 的任意两个中点, 即 $a' = a$, $b' = b$, 则由 (2) 得 $a = a \wedge a' \leqslant b \vee b' = b$. 同理有 $b = b \wedge b' \leqslant a \vee a' = a$. 所以 $a = b$. 这说明 (4) 成立.

例 7.6.3 设 $L=\{0, a, b, c, d, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.12 所示, L 上的一元运算 “$'$” 定义为 $0'=1$, $1'=0$, $a'=d$, $d'=a$, $b'=b$, $c'=c$. 容易验证 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数, 但不是强 De Morgan 代数, 因为 $d\leqslant c'\vee b$ 且 $d\nleqslant b$, 而 $c\leqslant d'\vee b$ 不成立. 另外, 容易验证 L 中条件 (C4) 成立.

例 7.6.4 设 $L=\{0, a, b, c, d, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.12 所示, L 上的一元运算 “$'$” 定义为 $0'=1$, $1'=0$, $a'=d$, $d'=a$, $b'=c$, $c'=b$. 容易验证 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数, 而 L 中没有中点.

由定理 7.6.3 (2) 知: 强 De Morgan 代数必是 Kleene 代数. 下面的例子表明 Kleene 代数未必是强 De Morgan 代数.

例 7.6.5 设 $L=\{0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17}, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.13 所示, L 上的一元运算 “$'$” 定义为 $0'=1$, $1'=0$, $a_1'=a_{17}$, $a_{17}'=a_1$, $a_2'=a_{16}$, $a_{16}'=a_2$, $a_3'=a_{15}$, $a_{15}'=a_3$, $a_4'=a_{14}$, $a_{14}'=a_4$, $a_5'=a_{13}$, $a_{13}'=a_5$, $a_6'=a_{12}$, $a_{12}'=a_6$, $a_7'=a_{11}$, $a_{11}'=a_7$, $a_8'=a_{10}$, $a_{10}'=a_8$, $a_9'=a_9$. 容易验证 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 Kleene 代数, 但 L 不是强 De Morgan 代数, 因为 $a_6\leqslant a_{17}'\vee a_5$ 且 a_6 不小于 a_5, 而 $a_{17}\leqslant a_6'\vee a_5$ 不成立, 即 L 不满足条件 (C5).

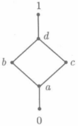


图 7.12 序关系图

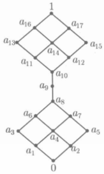


图 7.13 一个 19 阶的非强 De Morgan 代数

7.6.2 由强 De Morgan 代数导出的正则剩余格

定义 7.6.3 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数, 在 L 上定义 $\to$ 如下:

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b, ,\\ a'\vee b, & \text{其他},\end{cases}$$

则称上述定义的运算 $\to$ 为 L 上的广义 R_0 蕴涵.

显然, 上述定义是 R_0 蕴涵的自然拓广, 且易于验证 $a'=a\to 0$, $\forall a\in L$.

定理 7.6.4 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数, $\to$ 为 L 上的广义 R_0 蕴涵, 则对任意 $x, y, z\in L$ 成立

(1) $x \leqslant y \Leftrightarrow x \to y$=1;

(2) $x' \to y' = y \to x$;

(3) $1\to x = x$, $x \to x = 1$;

(4) $x \to y \geqslant x' \vee y$;

(5) $x \leqslant y \Rightarrow y \to z \leqslant x \to z$;

(6) $x \leqslant y \Rightarrow z \to x \leqslant z \to y$;

(7) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(8) $(x \to y)\vee((x \to y) \to x' \vee y)$=1.

证明　(1) 由定义 7.6.3 可知 $x \leqslant y \Rightarrow x \to y = 1$. 反之, 当 $x \to y = 1$ 时, 如果 $x \nleqslant y$, 则由定义 7.6.3 可得 $x \to y = x' \vee y$. 从而 $x' \vee y = 1$. 由强 De Morgan 代数的定义得 $x \leqslant y$(由定理 7.6.3(1)), 这是一个矛盾. 从而说明 (1) 成立.

(2) 当 $x' \leqslant y'$ 时有 $y \leqslant x$, 从而 $x' \to y'$=1=$y \to x$. 当 $x' \leqslant y'$ 不成立时, 则 $y \leqslant x$ 也不成立, 于是 $x' \to y'$=$(x')' \vee y' = x \vee y'$, $y \to x = y' \vee x$. 所以 $x' \to y' = y \to x$.

(3) 当 $x = 1$ 时显然有 $1\to x = x$. 当 $x \neq$1 时, $1\to x$=$1' \vee x = x$ 成立. 总之, 对任意 $x \in L$ 均有 $1\to x = x$. 而 $x \to x$=1 是显然成立.

(4) 由定义 7.6.3 直接得到.

(5) 设 $x \leqslant y$, 分以下两种情况讨论：当 $x \leqslant z$ 时, 由 (1) 得 $x \to z$=1, 故 $y \to z \leqslant x \to z$.

当 $x \nleqslant z$, 则 $y \nleqslant z$(否则, 由 $y \leqslant z$ 及假设条件 $x \leqslant y$ 可得 $x \leqslant z$, 矛盾). 于是由广义 R_0 蕴涵的定义得, $y \to z = y' \vee z$, $x \to z = x' \vee z$. 而由 $x \leqslant y$ 及 “′” 的逆序性得 $y' \leqslant x'$, 从而 $y' \vee z \leqslant x' \vee z$, 进而有 $y \to z \leqslant x \to z$.

总之, (5) 普遍成立.

(6) 设 $x \leqslant y$, 则 $y' \leqslant x'$. 应用 (5) 得 $x' \to z' \leqslant y' \to z'$, 再应用 (2) 即得 $z \to x \leqslant z \to y$.

(7) 由对称性只需证明 $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$. 分 4 种情况讨论：

如果 $x \leqslant y \to z$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \to (y \to z)$=1, 且由 $y \leqslant z$ 得 $y \leqslant x' \vee z$. 而应用 (4) 得 $x' \vee z \leqslant x \to z$, 故 $y \leqslant x \to z$. 进而得 $y \to (x \to z)$=1, 即 $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$.

如果 $x \leqslant y \to z$ 且 $x \leqslant z$, 则 $x \to (y \to z)$=1, 且 $y \to (x \to z) = y \to$1=1, 即 $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$.

如果 $x \leqslant y \to z$ 且 $y \nleqslant z$, $x \nleqslant z$, 则 $x \leqslant y \to z = y' \vee z$. 根据强 De Morgan 代数定义中的 (C5) 得 $y \leqslant x' \vee z$. 于是由 (1) 得 $y \to (x \to z) = y \to x' \vee z$=1, 即 $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$.

如果 $x \nleqslant y \to z$, 则 $y \nleqslant z$(否则, 若 $y \leqslant z$, 由 (1) 可得 $y \to z=1$, 这与 $x \nleqslant y \to z$ 矛盾), 且 $x \nleqslant z$(否则, 若 $x \leqslant z$, 由 (1) 及 (5) 可得 $x \leqslant z=1\to z \leqslant y \to z$, 这与 $x \nleqslant y \to z$ 矛盾), 从而 $x \to (y \to z) = x' \vee (y \to z) = x' \vee (y' \vee z) = y' \vee (x' \vee z)$. 而由 (4) 得 $y' \vee (x' \vee z) \leqslant y \to (x' \vee z) = y \to (x \to z)$, 即 $x \to (y \to z) \leqslant y \to (x \to z)$.

总之, (7) 普遍成立.

(8) 分两种情况讨论: 如果 $x \leqslant y$, 则 $x \to y=1$, 故

$$(x \to y) \vee ((x \to y) \to x' \vee y) = 1 \vee ((x \to y) \to x' \vee y) = 1.$$

如果 $x \nleqslant y$, 则 $x \to y = x' \vee y$, 故 $(x \to y)\vee((x \to y) \to x' \vee y)=(x \to y)\vee 1=1$. 总之, (8) 成立.

定理 7.6.5 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数, $\to$ 为 L 上的广义 R_0 蕴涵. 定义 L 上的 $\otimes$ 运算如下: $x \otimes y = (x \to y')'$, $x, y \in L$, 则对任意 $x, y, z \in L$ 成立

(1) $x \otimes y = y \otimes x$, $x\otimes 1=x$;

(2) $x \otimes (y \otimes z)=(x \otimes y) \otimes z$;

(3) $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \to z$.

证明 (1) 由定理 7.6.4 (2) 知 $x \otimes y = y \otimes x$. 而 $x\otimes 1=x$ 是显然成立的.

(2) 应用定理 7.6.4 (2) 及 (7) 得

$$\begin{aligned}
x \otimes (y \otimes z) &= (x \to (y \otimes z)')' \\
&= ((y \otimes z) \to x')' \\
&= ((y \to z')' \to x')' \\
&= (x \to (y \to z'))' \\
&= (x \to (z \to y'))' \\
&= (z \to (x \to y'))' \\
&= ((x \to y')' \to z')' \\
&= (x \otimes y \to z')' \\
&= (x \otimes y) \otimes z.
\end{aligned}$$

(3) 设 $x \otimes y \leqslant z$, 则 $(x \to y')' \leqslant z$, 应用 “$'$” 的逆序对合性质得 $z' \leqslant x \to y'$. 据定理 7.6.4 (1) 及 (7) 得 $x \leqslant z' \to y'$. 再应用定理 7.6.4(2) 得 $x \leqslant y \to z$. 又, 相反的推理也成立. 所以 $x \otimes y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \to z$, 即 (3) 成立.

定理 7.6.6 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数, $\to$ 为 L 上的广义 R_0 蕴涵, L 上的 $\otimes$ 运算定义如下: $x \otimes y=(x \to y')'$, $x, y \in L$, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 构成剩余格当且仅当 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数.

证明　如果 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是强 De Morgan 代数, 则由定理 7.6.5 知 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 构成一个剩余格.

反之, 如果按上述定义在 De Morgan 代数 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 中引入 $\to,\otimes$ 后, $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 构成一个剩余格, 则据定理 2.2.1 (4) 知, $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$ 对任意 $x,y,z\in L$ 成立.

假设有 $x,y,z\in L$ 满足 $x\leqslant y'\vee z$ 且 $x\nleqslant z$. 如果 $y\leqslant z$, 则显然有 $y\leqslant x'\vee z$. 如果 $y\nleqslant z$, 则由广义 R_0 蕴涵的定义得, $x\to(y\to z)=x\to y'\vee z=1$, 而 $y\to(x\to z)=y\to x'\vee z$. 于是, $y\to x'\vee z=1$, 即 $y\leqslant x'\vee z$. 这说明 (C5) 成立, 即 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是强 De Morgan 代数.

从定理 7.6.4 及定理 7.6.6 中可看出, 经强 De Morgan 代数诱导出的剩余格与 R_0–代数具有类似的结构特点, 为此引入如下 DR_0–代数的概念.

定义 7.6.4　设 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是强 De Morgan 代数, $\to$ 为 L 上的广义 R_0 蕴涵, L 上的 $\otimes$ 运算定义为 $x\otimes y=(x\to y')'$, $x,y\in L$, 则称剩余格 $(L;\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$ 为 DR_0–代数.

由定理 7.6.2 知, Boole 代数及全序 De Morgan 代数均是 DR_0–代数.

前面从广义 R_0 蕴涵的角度研究了 De Morgan 代数扩张问题, 与之对应, 还可以从广义 R_0 t 模的角度展开相关讨论.

定义 7.6.5　设 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是 De Morgan 代数, 在 L 上定义 T 算子如下:

$$T(a,b)=\begin{cases}0, & a\leqslant b',\\ a\wedge b, & \text{其他}.\end{cases}$$

称算子 T 为 L 上的广义 R_0 算子, 记为 $\otimes_0^L$.

容易看出, 上述定义是 R_0 t–模的自然推广. 但 De Morgan 代数 L 上的广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$ 未必构成 t–模 (这里指格上 t–模), 比如在例 7.6.3 中, 按定义 7.6.5 容易计算出 $L=\{0,a,b,c,d,1\}$上的广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$(以下用 $\otimes$ 表示), 且

$$d\otimes(b\otimes c)=d\otimes a=0,\quad (d\otimes b)\otimes c=b\otimes c=a,$$

即 $d\otimes(b\otimes c)\neq(d\otimes b)\otimes c$. 这说明 $\otimes_0^L$ 不满足结合律, 即 $\otimes_0^L$ 不是 L 上的 t–模.

自然的问题是广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$ 在什么情况下构成 De Morgan 代数 L 上的 t–模? 此问题的答案是强 De Morgan 代数.

定理 7.6.7　设 $(L;\wedge,\vee,',0,1)$ 是强 De Morgan 代数, $\otimes_0^L$ 为 L 上的广义 R_0 算子 (如定义 7.6.5), 则对任意 $a,b,c\in L$ 成立:

(1) $a\otimes_0^L b=b\otimes_0^L a$;

(2) $a\otimes_0^L 1=a$;

(3) 若 $a \leqslant c, b \leqslant d$, 则 $a \otimes_0^L b \leqslant c \otimes_0^L d$;

(4) $a \otimes_0^L 0 = 0$;

(5) $(a \otimes_0^L b) \otimes_0^L c = a \otimes_0^L (b \otimes_0^L c)$;

(6) $a \otimes_0^L b = 0 \Leftrightarrow a \leqslant b'$.

上述结果表明, 强 De Morgan 代数上的广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$ 是一个 t–模 (以下称其为广义 R_0 t–模). 同时可以验证, 定理 7.6.5、定理 7.6.6 中定义的 $\otimes$ 运算正好是广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$.

定理 7.6.8 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数, $\otimes_0^L$ 是 L 上的广义 R_0 t–模, $\rightarrow$ 是 L 上的广义 R_0 蕴涵, 则 $(\otimes_0^L, \rightarrow)$ 为 L 上的伴随对.

可以证明以下结果.

定理 7.6.9 设 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数, $\otimes_0^L$ 是 L 上的广义 R_0 算子, 若 L 满足条件:

(C0) $a \otimes_0^L b = 0 \Rightarrow a \leqslant b', a, b \in L$,

则 L 上的广义 R_0 算子 $\otimes_0^L$ 成为 t–模的充要条件是 L 为强 De Morgan 代数.

下面的例子表明, 上述定理中的条件 (C0) 不可缺少.

例 7.6.6 设 L=$\{0, a, b, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义为 $0 < a \| b < 1$(即 a 与 b 不可比), L 上的一元运算 “′” 定义为 $0'$=1, $1'$=0, $a' = a$, $b' = b$, 则 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是 De Morgan 代数. 容易计算 L 上的广义 R_0 算子如表 7.21 所示.

表 7.21

$\otimes_0^L$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	0	0	b
1	0	a	b	1

显然, $\otimes_0^L$ 是 L 上的 t–模, 但 L 不是强 De Morgan 代数, 因 $1 \leqslant a' \vee b$ 且 $1 \nleqslant b$ 而 $a \leqslant 1' \vee b$ 不成立.

7.6.3 DR_0–代数与 R_0–代数的关系

首先需要指出的是由定理 7.6.1 知 DR_0–代数是分配的正则剩余格, 但下面的例子说明 DR_0–代数未必是强正则剩余格.

例 7.6.7 设 L=$\{0, a, b, c, d, 1\}$, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.12 (例 7.6.4) 所示, L 上的一元运算 “′” 定义为 $0'$=1, $1'$=0, $a' = d$, d'=a, $b' = c$, $c' = b$, 则 $(L; \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是强 De Morgan 代数, 且可计算得到 L 上的广义 R_0 蕴涵 $\rightarrow$ 及 $\otimes$ 运算如表 7.22、表 7.23. 于是, $(L; \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 构成 DR_0–代数、分配的正则剩余格. 但 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ 不是强正则剩余格 (从而不是 R_0–代数, 这也说明 DR_0–代数

未必是 R_0–代数), 因为定义 7.6.1 中的条件 (C2) 不成立:

$$d \to (b \vee c) = d \to d = 1, \quad (d \to b) \vee (d \to c) = b \vee c = d,$$
$$d \to (b \vee c) \neq (d \to b) \vee (d \to c).$$

表 7.22　运算 "→"

→	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	1	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1
c	b	b	b	1	1	1
d	a	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

表 7.23　运算 "⊗"

⊗	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	b	0	b	b
c	0	0	0	c	c	c
d	0	0	b	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

定理 7.6.10　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是 DR_0–代数, 则 $(L; \vee, ', \to)$ 构成 R_0–代数当且仅当 L 满足预线性条件, 即 $(x \to y) \vee (y \to x) = 1, \forall x, y \in L$.

证明　如果 $(L; \vee, ', \to)$ 构成 R_0–代数, 则由命题 3.4.2 (P6) 知 L 中预线性条件成立.

反之, 如果 DR_0–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 中预线性条件成立, 则此时 (C2) 成立, 即 $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z), \forall x, y, z \in L$(注意, 在剩余格中, 预线性条件与条件 (C2) 等价, 参见文献 [182], [298]). 从而由定理 7.6.4 知, 只需证明定义 3.4.1 中的 (M3) 及 (M5) 中的 $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ 成立即可. 而据定理 2.2.1 及定理 2.2.5 知, (M3) 及 (M5) 成立, 所以 $(L; \vee, ', \to)$ 构成 R_0–代数.

定理 7.6.11　全序 DR_0–代数与全序 R_0–代数等价.

证明　由于全序 DR_0–代数满足预线性条件, 故由定理 7.6.10 知: 全序 DR_0–代数必是全序 R_0–代数. 反之, 设 L 为全序 R_0–代数, 则由命题 3.4.1 知 L 为全序 DR_0–代数.

由于 MTL–代数、MV–代数均满足预线性条件, 故由定理 7.6.11 可得结论.

推论 7.6.1　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是 DR_0–代数, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 构成 MTL–代数当且仅当 L 满足预线性条件, 即 $(x \to y) \vee (y \to x) = 1, \forall x, y \in L$.

推论 7.6.2　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是 DR_0–代数, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 构成 MV–代数当且仅当 L 既是 R_0–代数又是 MV–代数.

容易验证, 3 阶 DR_0–代数只有一个, 即$\{0, a, 1\}$, 序定义为 $0 \leqslant a \leqslant 1$, 逆合对应 "$'$" 定义为 $0'=1, 1'=0, a'=a$. 以下称此 DR_0–代数为 R_{03}, 它是一个 MV–代数, 也是一个 R_0–代数.

定理 7.6.12　设 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是 DR_0–代数, 且 L 无中点, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 构成 BL–代数当且仅当 L 是 Boole 代数.

证明 如果 L 是 Boole 代数, 则 L 是 BL–代数.

反之, 如果 DR_0–代数 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是 BL–代数, 且 L 无中点. 对任意 $x \in L$, 由 DR_0 代数的定义知, $x \otimes x=(x \to x')'$.

如果 $x \not\leqslant x'$, 则 $x \otimes x=(x \to x')'=(x' \vee x')' = x'' = x$.

如果 $x \leqslant x'$, 则 $x \otimes x=(x \to x')'=1'=0$. 而在 MV–代数中成立 $(a \to b) \to b=(b \to a) \to a$, 所以 $x' = 1 \to x'=(x \to x') \to x'=(x' \to x) \to x$. 而由广义 R_0 蕴涵 $\to$ 的定义得

$$(x' \to x) \to x = (x'' \vee x) \to x = x \to x = 1.$$

(这里应用了 "L 无中点", 即 $x \neq x'$). 于是, $x'=1$, 即 $x=0$. 从而此时仍有 $x \otimes x = x$.

综上所述, L 中的每一个元素都是幂等的. 据文献 [22] 中 Theorem 4.3.9 (1) 知 L 是 Boole 代数.

下面的例子表明, 存在非 DR_0–代数的 R_0–代数, 结合例 7.6.7 及定理 7.6.6 得到结论: DR_0–代数与 R_0–代数是两类互不包含的分配的正则剩余格.

例 7.6.8 设 $W_7=\{0, 1/5, 2/5, 1/2, 3/5, 4/5, 1\}$, 在其上蕴涵 $\to$ 如下定义: 若 $x \leqslant y$, $x \to y = 1$; 若 $x > y$, $x \to y = (1-x) \vee y$, 则 W_7 构成 R_0–代数. 令 L 是 $W_7 \times W_7$ 的一个子代数, 其结构如图 7.14 所示 (见文献 [319] 中例 3.1). 对于此 R_0–代数 L, 容易验证

$$(1,3/5) \to (4/5,4/5) = (4/5,1),$$
$$(1,3/5)' \vee (4/5,4/5) = (0,2/5) \vee (4/5,4/5) = (4/5,4/5).$$

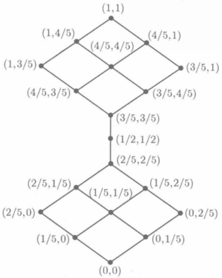


图 7.14 非 DR_0–代数的 R_0–代数

这说明 $(1, 3/5)\to(4/5, 4/5) \neq (1, 3/5)'\vee(4/5, 4/5)$, 即 L 中的蕴涵 $\to$ 并非广义 R_0 蕴涵, L 不是 DR_0–代数.

下面的例子表明：正则剩余格未必是分配格.

例 7.6.9　设 $L=\{0, a, b, c, d, e, 1\}$, 其上的二元运算 $\to$, $\otimes$ 按表 7.24、表 7.25 的方式定义, 其序 $\leqslant$ 的定义如图 7.15 所示, 则 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是正则剩余格, 但 L 不是分配格, 因为 $d\vee(b\wedge c)\neq(d\vee b)\wedge(d\vee c)$.

事实上, 可以借用数学软件 Mathematica 验证 $(L; \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1)$ 是剩余格, 如图 7.16 所示 (程序中仅验证结合律和伴随性, 其余条件是显然成立的).

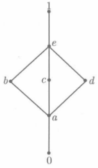


图 7.15　序关系图

表 7.24　运算 "$\to$" 的定义

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1
b	b	e	1	e	e	1	1
c	c	e	e	1	e	1	1
d	d	e	e	e	1	1	1
e	a	e	e	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

表 7.25　运算 "$\otimes$" 的定义

$\otimes$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	a
b	0	0	0	a	a	a	b
c	0	0	a	0	a	a	c
d	0	0	a	a	0	a	d
e	0	0	a	a	a	a	e
1	0	a	b	c	d	e	1

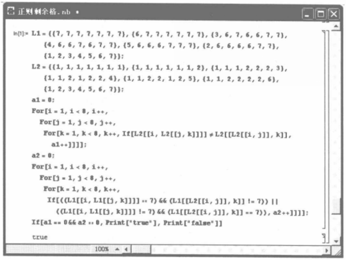


图 7.16　用 Mathematica 软件验证剩余格

注 7.6.2　本节深入研究了剩余格与 De Morgan 代数之间的关系, 并通过推广著名的 R_0 蕴涵由强 De Morgan 代数诱导出一类重要的正则剩余格 ——DR_0–代

数, 得到许多有趣而重要的结果. 依据前述的研究结论, 可以用图 7.17 来总结相关代数结构之间的关系. 从图中可以看出, DR_0–代数是一类突破 MTL–代数范畴的正则剩余格.

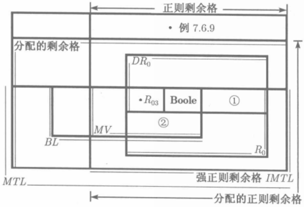


图 7.17 DR_0–代数与各种正则剩余格的关系图

7.7 蕴涵格及其滤子理论

1999 年, 王国俊教授在文献 [322] 中引入蕴涵格的概念, 阐明了它的模糊逻辑背景并得到若干重要性质. 容易验证, MV–代数、R_0–代数及 $IMTL$–代数均是蕴涵格的特例. 因此, 深入研究蕴涵格的代数性质很有意义. 近年对于蕴涵格的研究, 尽管已有一些成果发表 [323~325], 然而遗憾的是, 像蕴涵格的一般滤子理论这样重要的内容至今还没有建立起来. 注意, 这里特别强调 "一般滤子", 原因是一些文献虽涉及蕴涵格的滤子问题 (如文献 [323] 提出的蕴涵滤子), 但并非是通常意义下 MP–滤子 (与 MP 推理规则相对应) 的推广. 蕴涵格的 "一般滤子" 的基本要求是当蕴涵格特化为 $IMTL$–代数、R_0–代数、MV–代数时,"一般滤子" 能正好特化为相应代数结构上的 MP–滤子. 在文献 [326] 中, 通过对传统 MP–滤子的定义进行改造, 在蕴涵格中引入 MP^*–滤子的概念, 并由此构作了完整的同余关系和商代数结构; 同时, 引入优蕴涵格的概念, 证明了优蕴涵格的素滤子定理, 从而完满地建立了蕴涵格的一般滤子理论, 也大幅度扩展了相应逻辑代数滤子理论的系列已有结果.

需要特别说明的是本节所得的结论表面上看与 $IMTL$–代数、R_0–代数、MV–代数的相应结果类似, 但由于在蕴涵格中一条重要性质 $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ 不再成立, 因此主要概念必须重新定义, 相关结论要也重新证明且均需较高技巧. 此外, 尽管可以在蕴涵格中引入 $\otimes$ 运算, 但在蕴涵格中 $\otimes$ 一般不满足结合律, 因此蕴涵格不是通常意义下的剩余格, 它是一般 "模糊与" 算子的抽象. 事实上, 非交换、

非结合的 "模糊与" 算子是有一定意义和实用价值的, 如文献 [69], [70], [327] 中就对此作了论述. 因此, 研究基于蕴涵格和非结合 "模糊与" 算子的模糊逻辑形式系统是值得进一步深入研究的问题.

7.7.1 蕴涵格及其性质

定义 7.7.1[322] 设 M 是有界分配格 (即有最大元 1 与最小元 0 的分配格). 称 M 为蕴涵格, 如果满足以下条件:

(1) M 上有逆序对合对应 $'$: $M \to M$;

(2) M 上有二元运算 $\to$: $M \times M \to M$, 且对任意 $a, b, c, x \in M$ 成立:

(i) $1 \to a = a$;

(ii) 若 $a \leqslant b \to c$, 则 $b \leqslant a \to c$;

(iii) $a \to b = b' \to a'$;

(iv) $a \to x$ 关于 x 保非空有限交与有限并, 即 $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$, $a \to (b \vee c) = (a \to b) \vee (a \to c)$.

命题 7.7.1[322,325] 设 M 是蕴涵格, $a, b, c \in M$, 则

(1) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$;

(2) $a \to b = 1$ 当且仅当 $a \leqslant b$;

(3) $(a \wedge b) \to c = (a \to c) \vee (b \to c)$, $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$;

(4) $a' \vee b \leqslant a \to b$;

(5) $a \to b \leqslant a \vee c \to b \vee c$, $a \to b \leqslant a \wedge c \to b \wedge c$;

(6) $a \to b \leqslant (a \to c) \vee (c \to b)$;

(7) 若 $b \leqslant c$, 则 $a \to b \leqslant a \to c$, $c \to a \leqslant b \to a$;

(8) $a' = a \to 0$, $(a \to 0) \to 0 = a$;

(9) $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$.

命题 7.7.2[325] 设 M 是蕴涵格, 在 M 上引入一个新的运算 $\otimes$ 如下:

$$a \otimes b = (a \to b')', \quad \forall a, b \in M,$$

则 $\forall a, b, c \in M$, 有

(1) $a \otimes b = b \otimes a$;

(2) $a \otimes 1 = 1 \otimes a$;

(3) $\otimes$ 关于两个变量都是单调递增的;

(4) $(\to, \otimes)$ 是 M 上的伴随对, 即 $a \leqslant b \to c$ 当且仅当 $a \otimes b \leqslant c$;

(5) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ 当且仅当 $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$;

(6) $a \leqslant b \to a \otimes b$;

(7) $a \otimes b \leqslant a \wedge b$;

(8) $a \otimes a' = 0$;

(9) $a \otimes (b \vee c) = (a \otimes b) \vee (a \otimes c)$.

例 7.7.1[325] 设 $M=\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}$, M 按自然序构成有界分配格. 规定 M 上的运算如表 7.26, 表 7.27 所示, 则 M 是蕴涵格, 但 M 不是 *IMTL*–代数.

表 7.26

	$'$
0	1
1/5	4/5
2/5	3/5
3/5	2/5
4/5	1/5
1	0

表 7.27

$\rightarrow$	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
0	1	1	1	1	1	1
1/5	4/5	1	1	1	1	1
2/5	3/5	4/5	1	1	1	1
3/5	2/5	2/5	3/5	1	1	1
4/5	1/5	2/5	2/5	4/5	1	1
1	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1

顺便指出, 文献 [322] 中的例 5 是错误的, 因为那里的 M 并不是蕴涵格, 它不满足定义 7.7.1 (2) (iv):

$$d \rightarrow (a \vee b) = d \rightarrow d = 1,$$

$$(d \rightarrow a) \vee (d \rightarrow b) = d' \vee a \vee d' \vee b = c \vee a \vee c \vee b = d \neq d \rightarrow (a \vee b).$$

定理 7.7.1[324] 蕴涵格 M 是 *IMTL*–代数 (或剩余格) 当且仅当 M 满足以下条件:

(IO) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$, $\forall a, b, c \in M$.

为叙述方便, 称上述条件为里外律 (in-out). 例 7.7.1 中的蕴涵格确实不满足里外律, 因为

$$\frac{4}{5} \rightarrow \left(\frac{3}{5} \rightarrow \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} \neq \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \rightarrow \left(\frac{4}{5} \rightarrow \frac{2}{5}\right).$$

命题 7.7.3 蕴涵格定义 7.7.1 中的条件 (2)(ii) 可用下述两个条件替代:

(1) $(a \wedge b) \rightarrow c=(a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$, $\forall a, b, c \in M$;

(2) $a \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow b$, $\forall a, b \in M$.

证明 容易验证, 上述条件 (1), (2) 确在蕴涵格中成立. 下面证明 (1)(2) $\Rightarrow$ 定义 7.7.1 中条件 (2)(ii).

若 $a \leqslant b \rightarrow c$, 则 $a \wedge (b \rightarrow c) = a$. 从而由上述两条件得

$$a \rightarrow c = [a \wedge (b \rightarrow c)] \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee [(b \rightarrow c) \rightarrow c] \geqslant (a \rightarrow c) \vee b \geqslant a \rightarrow c.$$

所以 $(a \rightarrow c) \vee b = a \rightarrow c$, 即 $b \leqslant a \rightarrow c$.

由命题 7.7.1(2) 知命题 7.7.3(2) 可改写为等式. 于是, 命题 7.7.3 表明定义 7.7.1 中条件 (2)(ii) 可用等式表达. 这样, 蕴涵格可由一组等式刻画, 所以下述结论成立.

定理 7.7.2 全体蕴涵格构成一个代数簇, 从而蕴涵格类关于子代数、同态象和直积封闭.

7.7.2 蕴涵格的 MP^*–滤子及其同余关系

定义 7.7.2[326] 设 M 是蕴涵格, $F\subseteq M$, 称 F 是 M 的 MP^*–滤子, 如果:

(1) $1\in F$;

(2) 若 $a, b\in F$, 则 $\forall c\in M$ 有 $[a\to(b\to c)]\to c\in F$.

如果 $F\neq M$, 则称 F 是 M 的真 MP^*–滤子. M 的真 MP^*–滤子 F 称为素 MP^*–滤子, 如果 $\forall a, b\in M$, 有 $a\to b\in F$ 或 $b\to a\in F$.

注 7.7.1 定义 7.7.2 与文献 [328] 的相关概念类似.

命题 7.7.4 设 M 是蕴涵格, F 是 M 的 MP^*–滤子, 则

(1) 若 $a\leqslant b$ 且 $a\in F$, 则 $b\in F$;

(2) 若 $a\in F$, 则 $\forall b\in M$ 有 $b\to a\in F$;

(3) 若 $a\to b\in F$ 且 $a\in F$, 则 $b\in F$;

(4) 若 $a, b\in F$, 则 $a\otimes b\in F$;

(5) 若 $a, b\in F$, 则 $a\wedge b\in F$.

证明 (1) 若 $a\leqslant b$ 且 $a\in F$, 则由定义 7.7.2 得 $[1\to(a\to b)]\to b\in F$. 再据 $a\leqslant b$, 应用定义 7.7.1(2)(i) 及命题 7.7.1 (2) 即得 $b=1\to b=(1\to 1)\to b=[1\to(a\to b)]\to b\in F$.

(2) 由定义 7.7.1 及命题 7.7.1(2) 有, $b\leqslant 1=a\to a$, $a\leqslant b\to a$. 故若 $a\in F$, 则应用本命题 (1) 得 $b\to a\in F$, $\forall b\in M$.

(3) 若 $a\to b\in F$ 且 $a\in F$, 则由定义 7.7.2 (2) 得 $[(a\to b)\to(a\to b)]\to b\in F$. 再应用定义 7.7.1(2)(i) 及命题 7.7.1 (2) 即得 $b=1\to b=[(a\to b)\to(a\to b)]\to b\in F$.

(4) 由命题 7.7.2 (6) 有 $a\leqslant b\to a\otimes b$. 故, 若 $a, b\in F$, 则由本命题 (1) 得 $b\to a\otimes b\in F$. 再应用本命题 (3) 及 $b\in F$ 得 $a\otimes b\in F$.

(5) 若 $a, b\in F$, 则由本命题 (4) 得 $a\otimes b\in F$. 再应用命题 7.7.2 (7) 得 $a\otimes b\leqslant a\wedge b$, 于是由本命题 (1) 得 $a\wedge b\in F$.

以下结论表明, *IMTL*–代数作为特殊的蕴涵格, 其中的 MP^*–滤子与 MP–滤子是同一个概念, 这也说明定义 7.7.2 作为 MP–滤子的推广是恰当的.

定理 7.7.3 设 M 是 *IMTL*–代数, $F\subseteq M$, 则 F 是 M 的 MP^*–滤子当且仅当 F 是 M 的 MP–滤子.

证明 由命题 7.7.4 (3) 知 MP^*–滤子必是 MP–滤子.

假设 F 是 M 的 MP–滤子, 以下证明 F 是 MP^*–滤子, 这只需证明 F 满足定义 7.7.2 (2). 若 $a, b\in F$, 则由定理 7.7.1 的里外律 (IO) 得

$$\begin{aligned} & a\to\{b\to\{[a\to(b\to c)]\to c\}\}\\ &=a\to\{[a\to(b\to c)]\to(b\to c)\}\\ &=[a\to(b\to c)]\to[a\to(b\to c)]\\ &=1\in F. \end{aligned}$$

由于 $a, b\in F$ 及 $a\to\{b\to\{[a\to(b\to c)]\to c\}\}\in F$, 故两次应用 MP–滤子的定义即得 $[a\to(b\to c)]\to c\in F$.

定义 7.7.3[323] 设 M 是蕴涵格, $F\subseteq M$, 称 F 是 M 的蕴涵滤子, 如果

(1) $1\in F$;

(2) 若 $a\to b\in F$, $a\to(b\to c)\in F$, 则 $a\to c\in F$.

定理 7.7.4 设 M 是蕴涵格, $F\subseteq M$. 若 F 是 M 的蕴涵滤子, 则 F 是 M 的 MP^*–滤子.

证明 只需证明 F 满足定义 7.7.2(2). 首先证明蕴涵格中成立以下不等式:

$(*)$ $b\leqslant[a\to(b\to c)]\to[(b\to c)\to c]$, $\forall a, b, c\in M$.

事实上, 由 $b\to c\leqslant b\to c$, 应用定义 7.7.1 (2) (ii) 得 $b\leqslant(b\to c)\to c$, 再由命题 7.7.1 (2) 得 $b\to[(b\to c)\to c]=1$. 于是

$$a\to(b\to c)\leqslant 1=b\to[(b\to c)\to c].$$

对于上式应用定义 7.7.1(2)(ii) 得 $b\leqslant[a\to(b\to c)]\to[(b\to c)\to c]$, 即 $(*)$ 式成立.

现设 $a, b\in F$, 由 $a\to(b\to c)\leqslant a\to(b\to c)$ 得 $a\leqslant[a\to(b\to c)]\to(b\to c)$, 据此及 $a\in F$ 有 $[a\to(b\to c)]\to(b\to c)\in F$(注意, 蕴涵滤子必是上集). 又, 据 $b\in F$ 及 $(*)$ 式有 $[a\to(b\to c)]\to[(b\to c)\to c]\in F$. 于是 $[a\to(b\to c)]\to(b\to c)\in F$, $[a\to(b\to c)]\to[(b\to c)\to c]\in F$. 此时应用定义 7.7.3 (2) 可得 $[a\to(b\to c)]\to c\in F$. 这说明 F 满足定义 7.7.2 (2), 即 F 是 M 的 MP^*–滤子.

下面的例子表明, 定理 7.7.4 的逆不成立, 因此 "蕴涵滤子" 没有一般性, 不能作为蕴涵格的一般滤子对待.

例 7.7.2 设 $M=\{0, a, b, c, d, 1\}$, 其序结构如图 7.18 所示. 规定 M 上的运算如表 7.28, 表 7.29 所示, 则 M 是蕴涵格. 取 $F=\{1\}$, 可验证 F 是 M 的 MP^*–滤子, 但不是 M 的蕴涵滤子:

$$a\to d\in F,\ a\to(d\to 0)\in F,\ \text{而}\ a\to 0\notin F.$$

以下结论表明通过蕴涵格的任一 MP^*–滤子, 可以构作蕴涵格的同余关系, 进而得到商结构.

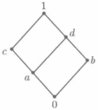


图 7.18

表 7.28

	$'$
0	1
a	d
b	c
c	b
d	a
1	0

表 7.29

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	d	1	d	1	1	1
b	c	c	1	c	1	1
c	b	d	b	1	d	1
d	a	c	d	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

定理 7.7.5 设 F 是蕴涵格 M 的 MP^*–滤子. 在 M 上定义二元关系 $\sim_F$ 如下：

$$a \sim_F b \text{ 当且仅当 } a \to b \in F \text{ 且 } b \to a \in F,$$

则

(1) $\sim_F$ 是 M 上关于 $'$, $\to$, $\vee$, $\wedge$ 的同余关系, 且商代数 $M/F = M/{\sim_F}=\{[a]_F|a \in M\}$是蕴涵格, 其中的偏序由下式确定: $[a]_F \leqslant [b]_F$ 当且仅当 $a \to b \in F$;

(2) 若 F 是素 MP^*–滤子, 则 M/F 是全序蕴涵格.

证明 (1) 首先证明二元关系 $\sim_F$ 是等价关系. 显然, $\sim_F$ 具有自反性和对称性. 对任意 $a, b, c \in M$, 由蕴涵格的定义易得 $b \leqslant (b \to c) \to c$. 应用命题 7.7.1(7) 得 $a \to b \leqslant a \to[(b \to c) \to c]$, 再应用定义 7.7.1 (2)(ii) 得 $a \leqslant (a \to b) \to[(b \to c) \to c]$, 再次应用命题 7.7.1 (7) 得

(∗∗) $\{(a \to b) \to [(b \to c) \to c]\} \to c \leqslant a \to c.$

现设 $a \sim_F b$, $b \sim_F c$, 则 $a \to b \in F$, $b \to c \in F$. 由定义 7.7.2(2) 得$\{(a \to b) \to[(b \to c) \to c]\} \to c \in F$. 由此, 并应用 (∗∗) 及命题 7.7.4 (1) 得 $a \to c \in F$. 同理可证 $c \to a \in F$. 这说明 $a \sim_F c$, 即 $\sim_F$ 具有传递性, 所以 $\sim_F$ 是等价关系.

下证 $\sim_F$ 是 M 上关于 $'$, $\to$, $\vee$, $\wedge$ 的同余关系. 注意到蕴涵格中 De Morgan 律成立, 故只需证明 $\sim_F$ 关于 $'$, $\to$, $\vee$ 同余即可.

设 $a \sim_F b$, 则 $a \to b \in F$, $b \to a \in F$. 由于 $a' \to b' = b \to a \in F$, $b' \to a' = a \to b \in F$, 故 $a' \sim_F b'$, 即 $\sim_F$ 关于 $'$ 同余.

设 $a \sim_F b$, $c \sim_F d$, 则由定义 7.7.1 (2) (iv) 及命题 7.7.4 (1) 得

$$a \to b \vee d = (a \to b) \vee (a \to d) \in F,$$

$$c \to b \vee d = (c \to b) \vee (c \to d) \in F.$$

再据命题 7.7.1 (3) 及命题 7.7.4 (5) 得 $a \vee c \to b \vee d=(a \to b \vee d)\wedge(c \to b \vee d) \in F$, 即 $\sim_F$ 关于 $\vee$ 同余.

再证 $\sim_F$ 关于 $\to$ 同余: 设 $a \sim_F b$, $c \sim_F d$. 应用蕴涵格的定义及性质可得

$$a \to b \leqslant (b \to c) \to (a \to b),$$

$$a \to b \leqslant [(a \to b) \to (a \to c)] \to (a \to c).$$

由 $a \to b \in F$ 并应用命题 7.7.4 (1) 得, $(b \to c) \to (a \to b) \in F$, $[(a \to b) \to (a \to c)] \to (a \to c) \in F$. 再应用定义 7.7.2 (2) 有

$$\{[(b \to c) \to (a \to b)] \to \{[(a \to b) \to (a \to c)] \to (a \to c)\}\} \to (a \to c) \in F.$$

又由前面已证明的 (**) 得

$$\begin{aligned}&\{[(b \to c) \to (a \to b)] \to \{[(a \to b) \to (a \to c)] \to (a \to c)\}\} \to (a \to c)\\ &\leqslant (b \to c) \to (a \to c).\end{aligned}$$

结合上面两个结果并应用命题 7.7.4(1) 得 $(b \to c) \to (a \to c) \in F$. 类似地, 可证 $(a \to c) \to (b \to c) \in F$. 从而 $(a \to c) \sim_F (b \to c)$. 同理可证, $(b \to c) \sim_F (b \to d)$. 这说明 $\sim_F$ 关于 $\to$ 同余.

总之, $\sim_F$ 是 M 上关于 $'$, $\to$, $\vee$, $\wedge$ 的同余关系. 由此可知, M/F 上关系 $\leqslant$ 的定义是合理, 且易证 $\leqslant$ 是 M/F 上的偏序, $[1]_F$, $[0]_F$ 是最大元和最小元. 同时, 容易验证 M/F 是蕴涵格.

(2) 设 $[a]_F, [b]_F \in M/F$. 若 F 是素 MP^*–滤子, 则 $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$. 从而 $[a]_F \leqslant [b]_F$ 或 $[b]_F \leqslant [a]_F$, 这说明 M/F 是全序蕴涵格.

7.7.3 蕴涵格的素 MP^*–滤子定理

关于蕴涵格的素 MP^*–滤子有如下基本结论:

定理 7.7.6 设 M 是蕴涵格, F 是 M 的 MP^*–滤子, 则 F 是 M 的素 MP^*–滤子当且仅当 F 满足以下条件:

(PF) $\forall a, b \in M$, 若 $a \vee b \in F$, 则 $a \in F$ 或 $b \in F$.

证明 设 F 是 M 的 MP^*–滤子且满足条件 (PF), 则由命题 7.7.1 (9) 得 $(a \to b) \vee (b \to a) = 1 \in F$, 应用 (PF) 即得 $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$. 这说明 F 是 M 的素 MP^*–滤子.

反之, 设 F 是 M 的素 MP^*–滤子, 则 $\forall a, b \in M$ 有 $a \to b \in F$ 或 $b \to a \in F$. 不妨设 $a \to b \in F$. 若 $a \vee b \in F$, 由于

$$a \vee b \to b = (a \to b) \wedge (b \to b) = (a \to b) \wedge 1 = a \to b \in F,$$

(应用命题 7.7.1 (3), (2))

这样, 由 $a \vee b \to b \in F$ 及 $a \vee b \in F$, 应用命题 7.7.4 (3) 得 $b \in F$. 同理, 当 $b \to a \in F$ 时可推出 $a \in F$. 所以, F 满足条件 (PF).

为了证明蕴涵格的素滤子定理, 需要证明蕴涵格的若干新性质, 它们反映在下述两个定理中. 注意, 对自然数 n, a^n 被归纳定义为 $a^1 = a$, $a^n = a^{n-1} \otimes a = a \otimes a^{n-1}$.

由于蕴涵格中 $\otimes$ 的结合律不成立, 因此 a^n 实际上是指按顺序 (或反序) 运算的结果 (注意, $\otimes$ 满足交换律), 即

$$a^n = ((\cdots((a\otimes a)\otimes a)\cdots)\otimes a)\otimes a = a\otimes(\cdots(a\otimes\cdots(a\otimes(a\otimes a)))).$$

引理 7.7.1　设 M 是蕴涵格, $a, b\in M$, 则

(1) $a\otimes(a\vee b)\leqslant a\otimes b\to a^2$;

(2) 对任意自然数 n, $a^n\otimes(a^n\vee b^n)\leqslant a^n\otimes b^n\to a^{n+1}$.

证明　(1) 由命题 7.7.2 (1), (4) 可得 $a\otimes b=b\otimes a\leqslant a$. 再应用命题 7.7.2 (3) 有, $(a\otimes b)\otimes(a\otimes b)\leqslant a^2$. 于是, 两次应用命题 7.7.2 (4) 得 $a\otimes b\leqslant(a\otimes b)\to a^2$, $a\leqslant b\to[(a\otimes b)\to a^2]$. 又由定义 7.7.1 (2) (ii), (i) 得 $a\otimes a=a^2\leqslant(a\otimes b)\to a^2$. 应用命题 7.7.2 (4) 得 $a\leqslant a\to[(a\otimes b)\to a^2]$. 结合这两个结果得 $a\leqslant\{a\to[(a\otimes b)\to a^2]\}\wedge\{b\to[(a\otimes b)\to a^2]\}$. 由此, 应用命题 7.7.1(3) 得 $a\leqslant(a\vee b)\to[(a\otimes b)\to a^2]$. 再应用命题 7.7.2(4) 得 $a\otimes(a\vee b)\leqslant a\otimes b\to a^2$.

(2) 由命题 7.7.2 (1), (4) 可得 $a^n\otimes b^n=b^n\otimes a^n\leqslant a^n$. 再应用命题 7.7.2 (3) 有, $(a^n\otimes b^n)\otimes(a^n\otimes b^n)\leqslant a^n\otimes a^n\leqslant a^n\otimes a=a^{n+1}$. 于是, 两次应用命题 7.7.2 (4) 得 $a^n\otimes b^n\leqslant(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}$, $a^n\leqslant b^n\to[(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}]$. 又由定义 7.7.1 (2) (ii), (1) 得 $a^n\otimes a^n\leqslant a^n\otimes a=a^{n+1}\leqslant(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}$. 应用命题 7.7.2 (4) 得 $a^n\leqslant a^n\to[(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}]$. 结合这两个结果得

$$a^n\leqslant\{a^n\to[(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}]\}\wedge\{b^n\to[(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}]\}.$$

由此, 应用命题 7.7.1 (3) 得 $a^n\leqslant(a^n\vee b^n)\to[(a^n\otimes b^n)\to a^{n+1}]$. 再应用命题 7.7.2 (4) 得 $a^n\otimes(a^n\vee b^n)\leqslant a^n\otimes b^n\to a^{n+1}$.

定理 7.7.7　设 M 是蕴涵格, $a, b\in M$, 且 $a\vee b=1$, 则

(1) $a\otimes b\leqslant a^2\vee b^2$;

(2) $a^2\vee b^2=1$;

(3) 对任意自然数 n, $a^n\vee b^n=1$.

证明　(1) 由 $a\vee b=1$ 并应用命题 7.7.2 (1), (2), (9) 可得

$$a=a\otimes 1=a\otimes(a\vee b)=a^2\vee(a\otimes b),$$

$$b=b\otimes 1=b\otimes(a\vee b)=(b\otimes a)\vee b^2=b^2\vee(a\otimes b).$$

于是

$$\begin{aligned}a\otimes b&=[a^2\vee(a\otimes b)]\otimes[b^2\vee(a\otimes b)]\\&=\{[a^2\vee(a\otimes b)]\otimes b^2\}\vee\{[a^2\vee(a\otimes b)]\otimes(a\otimes b)\}&&(\text{应用命题 7.7.2 (9)})\\&=\{[a^2\vee(a\otimes b)]\otimes b^2\}\vee\{[a\otimes(a\vee b)]\otimes(a\otimes b)\}&&(\text{应用命题 7.7.2 (9)})\end{aligned}$$

注意到, $[a^2 \vee (a\otimes b)]\otimes b^2 \leqslant b^2$; 而由引理 7.7.1 (1) 有 $a\otimes(a\vee b)\leqslant a\otimes b\to a^2$, 即

$$[a\otimes(a\vee b)]\otimes(a\otimes b)\leqslant a^2, \qquad (\text{应用命题 7.7.2 (4)})$$

所以$\{[a^2\vee(a\otimes b)]\otimes b^2\}\vee\{[a\otimes(a\vee b)]\otimes(a\otimes b)\}\leqslant a^2\vee b^2$. 从而, $a\otimes b\leqslant a^2\vee b^2$.

(2) 由本定理 (1) 及命题 7.7.2(1), (9) 得

$$\begin{aligned}a^2\vee b^2 &= (a\otimes b)\vee(a^2\vee b^2) = (a\otimes a)\vee(a\otimes b)\vee(b\otimes a)\vee(b\otimes b)\\ &= (a\vee b)\otimes(a\vee b) = 1\otimes 1 = 1.\end{aligned}$$

(3) 对自然数 n 施行数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论已得到证明. 现设 $a^k\vee b^k=1$, 下证 $a^{k+1}\vee b^{k+1}=1$.

由 $a^k\vee b^k=1$ 并应用命题 7.7.2 (1), (2), (9) 可得

$$a^k = a^k\otimes 1 = a^k\otimes(a^k\vee b^k) = (a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k),$$

$$b^k = b^k\otimes 1 = b^k\otimes(a^k\vee b^k) = (b^k\otimes a^k)\vee(b^k\otimes b^k)\leqslant(b^k\otimes a^k)\vee b^{k+1} = b^{k+1}\vee(a^k\otimes b^k).$$

于是

$$\begin{aligned}a^k\otimes b^k \leqslant&[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes[b^{k+1}\vee(a^k\otimes b^k)]\\ =&\{[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes b^{k+1}\}\vee\{[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes(a^k\otimes b^k)\}\\ &\qquad(\text{由命题 7.7.2 (9)})\\ =&\{[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes b^{k+1}\}\vee\{[a^k\otimes(a^k\vee b^k)]\otimes(a^k\otimes b^k)\}.\\ &\qquad(\text{由命题 7.7.2 (9)})\end{aligned}$$

注意到, $[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes b^{k+1}\leqslant b^{k+1}$; 而由引理 7.7.1 (2) 有 $a^k\otimes(a^k\vee b^k)\leqslant a^k\otimes b^k\to a^{k+1}$, 即 $[a^k\otimes(a^k\vee b^k)]\otimes(a^k\otimes b^k)\leqslant a^{k+1}$(应用命题 7.7.2 (4)). 所以$\{[(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)]\otimes b^{k+1}\}\vee\{[a^k\otimes(a^k\vee b^k)]\otimes(a^k\otimes b)^k\}\leqslant a^{k+1}\vee b^{k+1}$. 从而, $a^k\otimes b^k\leqslant a^{k+1}\vee b^{k+1}$.

于是, 由上述结果及命题 7.7.2 (1), (9) 得

$$\begin{aligned}a^{k+1}\vee b^{k+1} &= (a^k\otimes b^k)\vee(a^{k+1}\vee b^{k+1})\\ &\geqslant(a^k\otimes b^k)\vee(a^k\otimes a^k)\vee(b^k\otimes b^k)\\ &=(a^k\otimes a^k)\vee(a^k\otimes b^k)\vee(b^k\otimes a^k)\vee(b^k\otimes b^k)\\ &=(a^k\vee b^k)\otimes(a^k\vee b^k)\\ &=1\otimes 1=1,\end{aligned}$$

即 $a^{k+1}\vee b^{k+1}=1$, 故 $n=k+1$ 时结论成立. 由数学归纳法知, 对任意自然数 n, $a^n\vee b^n=1$.

定理 7.7.8 设 M 是蕴涵格, 则 $\forall a, b, c \in M$ 成立

(1) 对任意自然数 n, $(a \to b)^n \vee (b \to a)^n = 1$;

(2) $(b \to c) \to a \leqslant [(c \to b) \to a] \to a$;

(3) 对任意自然数 n, $(b \to c)^n \to a \leqslant [(c \to b)^n \to a] \to a$.

证明 (1) 由命题 7.7.1 (9) 及定理 7.7.7 (3) 即知 (1) 成立.

(2) 由命题 7.7.1 (9), (3) 可得

$$a = 1 \to a = [(b \to c) \vee (c \to b)] \to a = [(b \to c) \to a] \wedge [(c \to b) \to a].$$

再应用命题 7.7.2 (7) 有

$$[(b \to c) \to a] \otimes [(c \to b) \to a] \leqslant [(b \to c) \to a] \wedge [(c \to b) \to a] = a.$$

于是, 据命题 7.7.2 (4) 得 $(b \to c) \to a \leqslant [(c \to b) \to a] \to a$, 即 (2) 成立.

(3) 对任意自然数 n, 由本定理及命题 7.7.1 (3) 可得

$$a = 1 \to a = [(b \to c)^n \vee (c \to b)^n] \to a = [(b \to c)^n \to a] \wedge [(c \to b)^n \to a].$$

再应用命题 7.7.2 (7) 有

$$[(b \to c)^n \to a] \otimes [(c \to b)^n \to a] \leqslant [(b \to c)^n \to a] \wedge [(c \to b)^n \to a] = a.$$

于是, 据命题 7.7.2 (4) 得 $(b \to c)^n \to a \leqslant [(c \to b)^n \to a] \to a$, 即 (3) 成立.

定义 7.7.4 设 M 是蕴涵格, 若对 M 的任意 MP^*–滤子 F 及任意 $a \in M$, 以下的

$$F_a = \{x \in M | \exists y \in F \text{ 及自然数 } n \text{ 使得 } y \leqslant a^n \to x\}$$

均是 M 的 MP^*–滤子, 则称蕴涵格 M 是优的.

容易验证, *IMTL*–代数作为特殊的蕴涵格是优的. 同时, 非 *IMTL*–代数的优蕴涵格也是存在的, 如例 7.7.1 中的蕴涵格 M, 可计算其 $\otimes$ 运算如表 7.30 所示.

表 7.30

$\otimes$	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
0	0	0	0	0	0	0
1/5	0	0	0	0	0	1/5
2/5	0	0	0	0	1/5	2/5
3/5	0	0	0	2/5	3/5	3/5
4/5	0	0	1/5	3/5	3/5	4/5
1	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1

M 仅有一个真 MP^*-滤子 $F=\{1\}$, 经检验对任意 $a\in M$, F_a 均是 M 的 MP^*-滤子, 故 M 是优蕴涵格 (但 M 不是 $IMTL$-代数).

另外, 非优的蕴涵格也是存在的, 见例 7.7.3.

例 7.7.3 设 $M=\{0,a,b,c,d,e,1\}$, M 的序规定为: $0<a<b<c<d<e<1$. 规定 M 上的运算如表 7.31, 表 7.32 所示, 则可用图 7.19 所示的 Mathematica 程序验证 M 是蕴涵格 (此程序还检验了该蕴涵格不是 $IMTL$-代数). 取 $F=\{1\}$, 则 F 是 M 的 MP^*-滤子, 而 $F_e=\{x\in M|\exists y\in F$ 及自然数 n 使得 $y\leqslant e^n\to x\}=\{x\in M|\exists$ 自然数 n 使得 $e^n\leqslant x\}$. 由于

$$e^1=1, e^2=e\otimes e=(e\to e')'=c,$$
$$e^3=e^2\otimes e=c\otimes e=(c\to e')'=c,\cdots,e^k=c\otimes e=c(k\geqslant 2).$$

表 7.31

	$'$
0	1
a	e
b	d
c	c
d	b
e	a
1	0

表 7.32

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	e	1	1	1	1	1	1
b	d	d	1	1	1	1	1
c	c	c	c	1	1	1	1
d	b	c	c	c	1	1	1
e	a	c	c	c	d	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

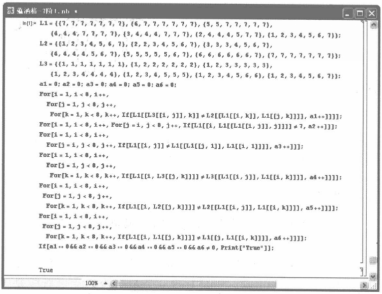


图 7.19 验证蕴涵格的 Mathematica 程序

所以 $F_e=\{1, e,d, c\}$. 但 F_e 不是 M 的 MP^*–滤子, 因为 F_e 不满足定义 7.7.2 (2):

$$[c \to (c \to a)] \to a = a \notin F_e.$$

故 M 是非优的蕴涵格.

定理 7.7.9(优蕴涵格的素 MP^*–滤子定理)　设 M 是优蕴涵格, $a \in M$ 且 $a \neq 1$, 则存在 M 的素 MP^*–滤子 F 使得 $a \notin F$.

证明　设 $\wp$ 是 M 的所有不包含 a 的 MP^*–滤子组成的集合. 因为$\{1\}\in \wp$, 故 $\wp \neq \varnothing$. 容易验证, $(\wp, \subseteq)$ 是一个偏序集, 且 $\wp$ 中的每一个滤子链$\{F_i\}_{i\in I}$ 有上界 $\cup_{i\in I}F_i$. 从而, 由 Zorn 引理知, $\wp$ 有极大元 F. 显然 $a \notin F$. 下证 F 是素 MP^*–滤子.

如果 F 不是素 MP^*–滤子, 则一定存在 $b, c \in M$ 使得 $b \to c \notin F$ 且 $c \to b \notin F$. 记

$$F_1 = \{x \in M | \exists y \in F \text{ 及自然数 } n \text{ 使得 } y \leqslant (b \to c)^n \to x\},$$

$$F_2 = \{x \in M | \exists y \in F \text{ 及自然数 } n \text{ 使得 } y \leqslant (c \to b)^n \to x\}.$$

由定义 7.7.4 知 F_1, F_2 均是 M 的 MP^*–滤子. 显然, $b \to c \in F_1$, $c \to b \in F_2$, $F \subseteq F_1$, $F \subseteq F_2$. 这样, 只需要证明 $F_1 \in \wp$ 或 $F_2 \in \wp$ 即可, 即需证明 $a \notin F_1$ 或 $a \notin F_2$.

事实上, 如果 $a \in F_1$ 且 $a \in F_2$, 则 $\exists y, v \in F$, 及自然数 n, m 使得

$$y \leqslant (b \to c)^n \to a, \quad v \leqslant (c \to b)^m \to a.$$

不失一般性, 设 $m \leqslant n$, 则由命题 7.7.2 (3) 得 $(c \to b)^n \leqslant (c \to b)^m$. 再应用命题 7.7.1 (7) 得 $(c \to b)^m \to a \leqslant (c \to b)^n \to a$. 于是, $v \leqslant (c \to b)^n \to a$. 进而有

$$\begin{aligned} y &\leqslant (b \to c)^n \to a \\ &\leqslant ((c \to b)^n \to a) \to a && \text{(由定理 7.7.8 (3))} \\ &\leqslant v \to a && \text{(命题 7.7.1(7) 及 } v \leqslant (c \to b)^n \to a) \end{aligned}$$

所以, 由命题 7.7.4 (1), (3) 及 $y, v \in F$ 得 $a \in F$. 这是一个矛盾, 从而说明 $a \notin F_1$ 或 $a \notin F_2$, 这又与 F 是 $\wp$ 的极大元矛盾, 因而假设 "F 不是素 MP^*–滤子" 是错误的.

7.8　量子效应代数与模糊逻辑代数系统

20 世纪 30 年代, Birkhoff 和 von Neumann 等杰出科学家致力于建立量子力学的数学基础, 将可分复 Hilbert 空间中的每个正交投影算子看成是一个量子效应, 而将该空间中的所有闭子空间做成的格看成是整个量子力学的命题系统, 通过

研究这个命题系统的逻辑关系来解决量子力学数学公理化问题. 1989 年, Giuntini, Greuling 等开始将 Hilbert 空间中每个不大于恒等算子的正算子看作是一个量子效应, 这种方法极大地扩展了所描述的物理现象. 1994 年, 美国数学家 Foulis 和 Bennet 进一步引进了抽象的效应代数 (effect algebra, 也可翻译为有效代数) 的概念, 以此作为建立量子力学数学基础的一般框架. 目前, 效应代数作为量子逻辑的基本数学结构受到广泛关注, 已有一批重要研究成果相继发表 (见文献 [329]~[337]).

有趣的是, 2004 年前后, Vetterlein 在文献 [336], [337] 中研究了效应代数与 BL-代数的联系, 这是一个很有意义的研究动向, 其实质是将量子逻辑与模糊逻辑这两个看似不相干的非经典逻辑的研究结合起来, 这有助于揭示两个有重要背景的逻辑理论之间的深层次关系. 在文献 [336], [337] 的基础上, 我们在文献 [338] 中讨论了伪效应代数与 $psBL$-代数的联系, 本节将介绍这些内容. 实际上, 此方向已有许多新成果, 读者可进一步阅读文献 [339]~[343] 等.

7.8.1 伪弱效应代数

在文献 [333] 中, Dvurečenskij 和 Vetterlein 引入一种非交换的量子逻辑结构, 即伪效应代数.

定义 7.8.1[333] 一个代数结构 $(E; +, 0, 1)$ 称为伪效应代数, 如果 "+" 是一种部分二元运算, 0 和 1 是常元, 且对于所有 $a, b, c \in E$ 下述条件成立:

(PE1) $a+b$ 和 $(a+b)+c$ 是有定义的当且仅当 $b+c$ 和 $a+(b+c)$ 是有定义的, 且有 $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(PE2) 存在唯一的 $d \in E$ 和唯一的 $e \in E$ 使得 $a+d=e+a=1$.

(PE3) 如果 $a+b$ 是有定义的, 那么存在 $d, e \in E$ 使得 $a+b=d+a=b+e$.

(PE4) 如果 $1+a$ 或 $a+1$ 是有定义的, 那么有 $a=0$.

下面是伪效应代数的一个等价定义, 其证明过程略去.

引理 7.8.1 代数结构 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是伪效应代数当且仅当它满足以下条件:

(PEA1) $(L; \leqslant, 0, 1)$ 是一个具有最小元 0 和最大元 1 的偏序集.

(PEA2) + 是一个部分二元运算, $\forall a, b, c \in L$,

(a) $(a+b)+c$ 有定义当且仅当 $a+(b+c)$ 有定义, 且 $(a+b)+c = a+(b+c)$;

(b) 对于所有 $a \in L$, $a+0=0+a=a$;

(c) 如果 $a+b$ 有定义, 则存在 $d, e \in L$ 使得 $a+b=d+a=b+e$.

(PEA3) (a) 对于 $a, b, c \in L$, 如果 $a+c$ 和 $b+c$ 有定义, 那么 $a \leqslant b$ 当且仅当 $a+c \leqslant b+c$;

(b) 对于 $a, b, c \in L$, 如果 $c+a$ 和 $c+b$ 有定义, 那么 $a \leqslant b$ 当且仅当 $c+a \leqslant c+b$.

(PEA4) 对于 $a, b \in L$, $a \leqslant b$ 当且仅当存在 $x, y \in L$ 使得 $a+x=y+a=b$.

下面的弱伪效应代数的概念是文献 [336], [337] 中弱效应代数的非可换推广.

定义 7.8.2[338] 一个代数结构 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 称为伪弱效应代数 (pseudo weak effect algebra), 如果它满足 (PEA1), (PEA2) 和 (PEA3) 以及下述条件:

(PEA4′) 对任意 $a, b\in L$, 如果 $a\leqslant b$, 那么存在最大元 $\bar{a}\in L$, 使得 $\bar{a}\leqslant a$ 且对于某个 $x\in L$ 有 $\bar{a}+x=b$.

命题 7.8.1 若 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 是一个伪弱效应代数, 那么对于 $\forall a, b\in L$, 如果 $a\leqslant b$, 存在最大元 $a^*\in L$, 使得 $a^*\leqslant a$ 且对于某个 $x\in L$ 有 $x+a^*=b$.

证明 如果 $a\leqslant b$, 由 (PEA4′) 可知存在最大元 $\bar{a}\in L$, 使得 $\bar{a}\leqslant a$ 且对于某个 $y\in L$ 有 $\bar{a}+y=b$. 对于任意 $a'\in L$, 若 $a'\leqslant a$ 且对于某个 $s\in L$ 有 $s+a'=a$, 从 (PEA2) (c) 可知存在 $t\in L$ 使得 $a'+t=b$. 由于 $\bar{a}$ 是一个最大元, 因此, $a'\leqslant\bar{a}$. 这说明 $\bar{a}$ 也是满足条件 "$\bar{a}\leqslant a$ 且对于某个 $x\in L$ 有 $x+\bar{a}=b$" 的最大元.

定义 7.8.3[338] 一个伪弱效应代数 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 称为伪弱 MV–效应代数, 如果以下条件成立:

(PEA5) 对于任意 $a_1, a_2, b_1, b_2\in L$, 如果 $a_1, a_2\leqslant b_1, b_2$, 那么存在元素 $c\in L$ 使得 $a_1, a_2\leqslant c\leqslant b_1, b_2$.

(PEA6) 对于任意 $a, b, c\in L$, 如果 $c\leqslant a+b$, 那么存在 $a_1\leqslant a$ 和 $b_1\leqslant b$ 使得 (α) $c=a_1+b_1$, 且 (β) 当 $a\leqslant c$ 时有 $a_1=a$.

(PEA7) (a) 对于任意 $a, b\in L$, 存在 $a_1, a_2, b_1, b_2\in L$ 使得 $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$ 且 $a_1\leqslant b$, $b_1\leqslant a$, $a_2\wedge b_2=0$.

(b) 对于任意 $a, b\in L$, 存在 $a_1, a_2, b_1, b_2\in L$ 使得 $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$ 且 $a_1\leqslant b$, $b_1\leqslant a$, $a_2\wedge b_2=0$.

定义 7.8.4[336,337] 伪弱 MV–效应代数 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 称为弱 MV–效应代数, 如果 $+$ 是可交换的.

定理 7.8.1 如果 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 是一个伪弱效应代数, 那么有

(1) (PEA6) 成立当且仅当下面的 (PEA6′) 成立:

(PEA6′) 对于任意 $a, b, c\in L$, 如果 $c\leqslant b+a$, 那么存在 $b_1\leqslant b$ 和 $a_1\leqslant a$ 使得 (α′)$c=b_1+a_1$, 且 (β′) 当 $a\leqslant c$ 时有 $a_1=a$.

(2) 如果 $(L;\leqslant)$ 是全序集, 且对于任意 $a\leqslant c\leqslant a+b$, 存在 b_1 使得 $c=a+b_1$, 那么 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 是一个伪弱 MV–效应代数.

(3) 如果 (PEA6) 成立, 且对于 $a, b, c, d\in L$, $a+b=c+d$, 那么 $a\leqslant c$ 当且仅当 $d\leqslant b$.

证明 (1) 假设 (PEA6) 成立, 仅需考虑 (β′) 成立. 如果 $a\leqslant c\leqslant b+a$, 由 (PEA2) (c) 可知存在 $d\in L$ 使得 $a+d=b+a$. 从而 $a\leqslant c\leqslant a+d$. 再由 (PEA6) 可知, 对于某个 $e\in L$, $e\leqslant d$ 且 $c=a+e$. 因此, 据 (PEA2)(c) 可知对于某个 $f\in L$

有 $c=f+a$. 由于 $c\leqslant b+a$, 故 $f+a\leqslant b+a$, 再由 (PEA3) (a) 即得 $f\leqslant b$. 可见 (PEA6$'$) 成立.

类似地, 由 (PEA6$'$) 可得 (PEA6).

(2) 由于 L 是全序的, 很容易得到 (PEA5) 和 (PEA7). 这里仅证明 (PEA6) 成立. 对于任意 $a, b, c\in L$, 如果 $c\leqslant a+b$, 只存在以下两种情形:

(i) $c\leqslant a$. 令 $a_1=c, b_1=0$. 那么 $c=a_1+b_1$, 且 $a_1\leqslant a$, $b_1\leqslant b$.

(ii) $a\leqslant c$, 即 $a\leqslant c\leqslant a+b$. 此时, 由条件可知, 存在 b_1 使得 $c=a+b_1$. 因此, $a+b_1\leqslant a+b$, 再由 (PEA3) (b) 可得 $b_1\leqslant b$. 因此 (PEA6) 成立.

(3) 若 $a, b, c, d\in L$ 满足 $a+b=c+d$. 如果 $a\leqslant c$, 那么 $a\leqslant c\leqslant c+d=a+b$. 由 (PEA6) 可知, 存在 $e\in L$ 使得 $c=a+e$. 从 $a+b=c+d$ 可得 $a+b=c+d=(a+e)+d=a+(e+d)$. 再据 (PEA3) 可得 $b=e+d$. 因此, $d\leqslant b$. 反之, 如果 $d\leqslant b$, 那么 $d\leqslant b\leqslant a+b=c+d$. 由于 (PEA6) 等价于 (PEA6$'$), 故存在 $m\in L$ 有 $b=m+d$. 从而 $(a+m)+d=a+(m+d)=a+b=c+d$. 再由 (PEA3) 可得 $a+m=c$. 因此, $a\leqslant c$.

7.8.2 对偶伪 BL–代数

为了引述方便, 这里重述一下伪 BL–代数的定义. 一个代数结构 $(L;\leqslant,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 称为伪 BL–代数, 如果下面条件成立:

(PBL1) $(L;\leqslant,0,1)$ 具有最小元 0 和最大元 1 的有界格;

(PBL2) $(L;\otimes,1)$ 是一个幺半群, 即 $\otimes$ 是一个满足结合律的二元运算, 且对于 $\forall x\in L$ 有 $x\otimes 1=1\otimes x=x$;

(PBL3) $x\otimes y\leqslant z$ 当且仅当 $x\leqslant y\to z$ 当且仅当 $y\leqslant x\rightsquigarrow z$;

(PBL4) $\forall x, y, z\in L$, $x\wedge y=(x\to y)\otimes x=x\otimes(x\rightsquigarrow y)$;

(PBL5) $\forall x, y\in L$, $(x\to y)\vee(y\to x)=1=(x\rightsquigarrow y)\vee(y\rightsquigarrow x)$.

定义 7.8.5 一个代数结构 $(L;\leqslant,\oplus,\ominus,-,0,1)$ 称为对偶伪 BL–代数, 如果 $(L;\leqslant_{\mathrm{BL}},\otimes,\to,\rightsquigarrow,0_{\mathrm{BL}},1_{\mathrm{BL}})$ 是一个伪 BL–代数, 其中, $a\leqslant b$ 当且仅当 $b\leqslant_{\mathrm{BL}} a$, $a\oplus b=a\otimes b$, $a\ominus b=b\to a$, $a-b=b\rightsquigarrow a$, $0=1_{\mathrm{BL}}$, $1=0_{\mathrm{BL}}$.

下面的引理实际上给出了对偶伪 BL–代数的直接定义 (不借助于伪 BL–代数).

引理 7.8.2 一个代数结构 $(L;\leqslant,\oplus,\ominus,-,0,1)$ 是一个对偶伪 BL–代数, 当且仅当它满足以下条件:

(DPBL1) $(L;\leqslant,0,1)$ 具有最小元 0 和最大元 1 的有界格;

(DPBL2) $(L;\oplus,0)$ 是一个幺半群, 即 $\oplus$ 是一个满足结合律的二元运算, 且对于 $\forall x\in L$ 有 $x\oplus 0=0\oplus x=x$;

(DPBL3) $z\leqslant x\oplus y$ 当且仅当 $z\ominus y\leqslant x$ 当且仅当 $z-x\leqslant y$;

(DPBL4) 对于任意 $x, y, z\in L$, $x\vee y=(y\ominus x)\oplus x=x\oplus(y-x)$;

(DPBL5) 对于任意 $x, y \in L$, $(y \ominus x) \wedge (x \ominus y) = 0 = (y - x) \wedge (x - y)$.

在文献 [71] 中, 伪 BL–代数和对偶伪 BL–代数分别被称为左伪 BL–代数和右伪 BL–代数.

关于对偶伪 BL–代数, 有以下结果.

命题 7.8.2 如果 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个对偶伪 BL–代数, 那么对于任意 $a, b, c \in L$ 有

(1) $(a \ominus b) - c = (a - c) \ominus b$;

(2) $(c \ominus a) \ominus b = c \ominus (b \oplus a)$, $(c - a) - b = c - (a \oplus b)$;

(3) 如果 $a \leqslant b$, 那么 $(b \ominus a) \oplus a = a \oplus (b - a) = b$;

(4) $a \ominus a = a - a = 0$;

(5) 如果 $a \oplus b = c$, 那么 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$;

(6) 如果 $a \leqslant b \leqslant c$, 那么 $b - a \leqslant c - a$, $b \ominus a \leqslant c \ominus a$, $c - b \leqslant c - a$, $c \ominus b \leqslant c \ominus a$;

(7) 如果 $a \leqslant b \leqslant c$, 那么 $(c \ominus b) \oplus (b \ominus a) = c \ominus a$, $(b - a) \oplus (c - b) = c - a$.

证明 (1) 令 $t = (a \ominus b) - c$, 则 $(a \ominus b) - c \leqslant t$. 由 (DPBL3) 得 $a \ominus b \leqslant c \oplus t$. 再由 (DPBL3) 可知 $a \leqslant (c \oplus t) \oplus b = c \oplus (t \oplus b)$, $a - c \leqslant t \oplus b$. 因此 $(a - c) \ominus b \leqslant t$, 从而 $(a - c) \ominus b \leqslant (a \ominus b) - c$. 类似地, 令 $m = (a - c) \ominus b$. 由 (DPBL3) 可得 $(a \ominus b) - c \leqslant m = (a - c) \ominus b$. 因此 $(a \ominus b) - c = (a - c) \ominus b$.

(2) 令 $(c \ominus a) \ominus b = t$, 则由 (DPBL3) 可得

$$(c \ominus a) \ominus b \leqslant t, \quad c \ominus a \leqslant t \oplus b, \quad c \leqslant (t \oplus b) \oplus a = t \oplus (b \oplus a),$$
$$c \ominus (b \oplus a) \leqslant t = (c \ominus a) \ominus b.$$

反之, 令 $m = c \ominus (b \oplus a)$, 则由 (DPBL3) 可得

$$c \ominus (b \oplus a) \leqslant m, \quad c \leqslant m \oplus (b \oplus a), \quad c \ominus a \leqslant m \oplus b,$$
$$(c \ominus a) \ominus b \leqslant m = c \ominus (b \oplus a).$$

所以 $(c \ominus a) \ominus b = c \ominus (b \oplus a)$.

同理可证, $(c - a) - b = c - (a \oplus b)$.

(3) 如果 $a \leqslant b$, 则由 (DPBL4) 得 $(b \ominus a) \oplus a = a \oplus (b - a) = b \vee a = b$.

(4) 根据 (DPBL5) 知, 结论成立.

(5) 假设 $a \oplus b = c$. 由 (DPBL3), 从 $a - a = 0 \leqslant b$ 可推得 $a \leqslant a \oplus b = c$. 类似地, $b \leqslant c$.

(6) 如果 $a \leqslant b \leqslant c$, 则由前面已证的 (3) 得 $c = (c \ominus a) \oplus a$, 从而 $b \leqslant c = (c \ominus a) \oplus a$. 再据 (DPBL3) 可得 $b \ominus a \leqslant c \ominus a$. 类似地, $b - a \leqslant c - a$.

由前面已证的 (5) 可知 $(c \ominus a) \oplus a \leqslant ((c \ominus a) \oplus a) \oplus (b - a)$. 再由 (3) 得

$$c = (c \ominus a) \oplus a \leqslant ((c \ominus a) \oplus a) \oplus (b - a) = (c \ominus a) \oplus (a \oplus (b - a)) = (c \ominus a) \oplus b.$$

应用 (DPBL3) 即得 $c \ominus b \leqslant c \ominus a$.

类似地, $c = a \oplus (c-a) \leqslant (b-a) \oplus (a \oplus (c-a)) = b \oplus (c-a)$, 因此, $c-b \leqslant c-a$.

(7) 如果 $a \leqslant b \leqslant c$, 则由 (3) 得 $(b \ominus a) \oplus a = b$. 再据前述 (2) 可得

$$c \ominus b = c \ominus ((b \ominus a) \oplus a) = (c \ominus a) \ominus (b \ominus a).$$

从而 $(c \ominus b) \oplus (b \ominus a) = ((c \ominus a) \ominus (b \ominus a)) \oplus (b \ominus a)$. 由 (6) 有 $b \ominus a \leqslant c \ominus a$, 从而

$$((c \ominus a) \ominus (b \ominus a)) \oplus (b \ominus a) = c \ominus a \qquad (由\ (3)).$$

因此, $(c \ominus b) \oplus (b \ominus a) = c \ominus a$.

类似地,

$$(b-a) \oplus (c-b) = (b-a) \oplus ((c-(a \oplus (b-a)))) = (b-a) \oplus ((c-a)-(b-a)) = c-a.$$

伪 BL–代数和伪效应代数中的运算是不同的. 伪 BL–代数中的二元运算是全部的, 但伪效应代数中的二元运算是部分的. 因此考虑伪 BL–代数和弱伪 MV–效应代数之间的关系, 最重要的是全部运算和部分运算之间的相互转化. 为此, 引入以下概念 ("导出部分和" 及 "导出全和"), 以刻画伪 BL–代数和伪效应代数之间的关系.

定义 7.8.6 (1) 设 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个对偶伪 BL–代数, 且 $a, b \in L$. 如果 $a = \min\{x \in L | x \oplus b = a \oplus b\}$, 则称 a 在 $a \oplus b$ 中最小. 类似地, 如果 $b = \min\{y \in L | a \oplus y = a \oplus b\}$, 则称 b 在 $a \oplus b$ 中最小. 部分和 "+" 的定义如下: $\forall a, b \in L$, $a + b = a \oplus b$, 如果 a 和 b 在 $a \oplus b$ 中最小; 其他情况 + 不定义. 运算 "+" 称为由 $\oplus$ 导出的部分和.

(2) 设 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个伪弱 MV–效应代数. 如果对于任意 $a, b \in L$, 最大元 $a \oplus b \cong \max\{a' + b' \colon a' \leqslant a, b' \leqslant b$ 且 $a' + b'$ 有定义$\}$存在, 则称 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 为具有 (Ex) 条件的伪弱 MV–效应代数, 且运算 $\oplus$ 称为由 + 导出的全和.

注 7.8.1 (1) 在交换情形下, 上面的定义与文献 [336] 中 4.1 的定义一致.

(2) 在下文中, 对于伪弱 MV–效应代数, 若提到 $\oplus$ 是由 + 导出的全和时, 已经隐含了全和存在, 即伪弱 MV–效应代数满足 (Ex) 条件.

命题 7.8.3 设 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个对偶伪 BL–代数, 且 + 是由 $\oplus$ 导出的部分和. 那么对任意 $a, b \in L$, 下面条件等价:

(1) $a + b$ 有定义且 $a + b = c$;

(2) $c \ominus b = a$ 且 $c - a = b$.

证明 (1)⇒(2). 若 $a + b = c$, 那么 $a \oplus b = c$, 从而 $c \leqslant a \oplus b$. 因此由 (DPBL3) 可得 $c \ominus b \leqslant a$, $c - a \leqslant b$. 由命题 7.8.2 (5) 从 $a \oplus b = c$ 可得 $a \leqslant c$ 和 $b \leqslant c$. 因此由命题 7.8.2 (3) 可得以下结果:

$$c = (c \ominus b) \oplus b, \quad c = a \oplus (c-a).$$

由于 a 和 b 是 $a\oplus b$ 的最小元, 从而有 $a\leqslant c\ominus b$ 和 $b\leqslant c-b$. 总之, $c\ominus b=a$ 且 $c-a=b$.

(2)⇒(1). 由 $b=c-a$ 可得 $b=c-a\leqslant c$(应用 7.8.2 (5) 可得 $c\leqslant a\oplus c$, 再由 (DPBL3) 可得 $c-a\leqslant c$). 于是, 从 $c\ominus b=a$ 和 $b\leqslant c$ 得 $a\oplus b=(c\ominus b)\oplus b=c$. 对于满足 $x\oplus b=c$ 和 $a\oplus y=c$ 的任意 $x, y\in L$, 由 (DPBL3) 可得 $c\ominus b\leqslant x$, $c-a\leqslant y$, 从而 $a\leqslant x$, $b\leqslant y$. 因此, a 和 b 在 $a\oplus b$ 中最小. 这说明 $a+b$ 有定义且等于 c.

命题 7.8.4　设 $(L;\leqslant,+,0,1)$ 是一个伪弱 MV–效应代数, $\oplus$ 是由 $+$ 导出的全和, 那么下面的结论成立:

(1) $\forall a, b\in L$, 若 $a\leqslant b$, 则 $a\oplus c\leqslant b\oplus c$ 且 $c\oplus a\leqslant c\oplus b$;

(2) $\forall a, b\in L$, 若 $a\leqslant b$, 则分别存在最小元 $x\in L$ 和 $y\in L$ 使得 $a\oplus x=b$, $y\oplus a=b$;

(3) $\forall a, b, c\in L$, 若 $c\leqslant a\oplus b$, 则存在 $a_1\leqslant a$ 和 $b_1\leqslant b$ 使得 (α) $c=a_1\oplus b_1$ 且 (β) 当 $a\leqslant c$ 时有 $a_1=a$, 或当 $b\leqslant c$ 时有 $b_1=b$;

(4) $\forall a, b\in L$, 存在 $a_1, b_1, c\in L$ 使得 $a=a_1\oplus c$, $b=b_1\oplus c$, 且 $a_1\wedge b_1=0$.

证明　(1) $\forall a, b\in L$, 假设 $a\leqslant b$. 对于满足条件 "$m\leqslant a$, $n\leqslant c$, $m+n$ 有定义" 的任意 m 和 n, 有 $m\leqslant a\leqslant b$ 和 $n\leqslant c$. 由 $\oplus$ 的定义可得 $m+n\leqslant b\oplus c$. 因此, $a\oplus c\leqslant b\oplus c$. 类似地, $c\oplus a\leqslant c\oplus b$.

(2), (3), (4): 证明过程见文献 [336] 中定理 4.3 的证明, 它们对于非交换情形也成立.

7.8.3　伪 BL–代数与伪弱 MV–效应代数

定义 7.8.7　称伪 BL–代数 $(L;\leqslant,\otimes,\rightarrow,\rightsquigarrow,0,1)$ 是具有 (W) 条件的, 如果满足以下条件:

(W) $\forall x, y\in L$, $x=(x\rightarrow y)\rightsquigarrow y$ 当且仅当 $x=(x\rightsquigarrow y)\rightarrow y$.

定义 7.8.8　称对偶伪 BL–代数 $(L;\leqslant,\oplus,\ominus,-,0,1)$ 是具有条件 (W) 的, 如果满足以下条件:

(W) $\forall a, b\in L$, $a=c\ominus(c-a)$ 当且仅当 $a=c-(c\ominus a)$.

注 7.8.2　(1) 定义 7.8.7 中的 (W) 条件与定义 7.8.8 中的 (W) 条件是对偶的, 因此用同一符号 "W" 表示, 其中, "W" 是 "well" 的简写.

(2) (W) 条件在下面定理 7.8.2 的证明过程中将用到 (详见定理 7.8.2 中 (PEA2) (c) 的证明).

(3) 事实上, (W) 条件在其他文献中也提到过. 例如, 在 quantale 理论中 (quantale 概念是由 Mulvey 引入的, 其目的在于把 locale 概念推广到非交换情形), 有如下定义 (见文献 [344] 中定义 1.3 或文献 [345] 中定理 1 前面的定义, 也可见 Grzegorz Bancerek 在 "Quantales" 中的定义 17, mizar.org/JFM/Vol16/quantal1.html): 一个

代数系统 $(A;\vee,\otimes)$ 称为 quantale, 如果 $(A;\vee)$ 是一个完备格, $(A;\otimes)$ 是一个半群, $\otimes$ 关于 $\vee$ 的双边分配律均成立. quantale A 中的元 d 称为具有二重性 (dualizing), 如果对任意 $x\in A$ 有

$$(x\to_r d)\to_l d=x=(x\to_l d)\to_r d,$$

其中, $-\to_r d$(或 $-\to_l d$) 表示与 $d\otimes -$(或 $-\otimes d$) 右伴随 (或左伴随) 的运算. 容易看出 "(W) 条件" 与 "二重性" 相似.

(4) 进一步, 在文献 [241] 中 "good pseudo-*BL* algebras" 的定义以及在文献 [292], [293] 中 "pseudo-BCK lattice with condition (pC)" 的定义也与这里 (W) 条件相似.

下面给出两个例子, 以说明具有条件 (W) 的 (对偶) 伪 *BL*–代数是存在的.

例 7.8.1[72] 设 $NS[0,1]$ (非标准实数区间 $[0,1]$) 是一个有序集, 其中的元素是实数对 (a,b), 满足条件 $a=0$ 且 $b\geqslant 0$, 或 $0<a<1$ 且 b 是任意的, 或 $a=1$ 且 $b\leqslant 0$(b 为实数). 其中的序关系是字典序: $(a,b)\leqslant(c,d)$ 当且仅当 $a<c$ 或 ($a=c$ 且 $b\leqslant d$). 在序集 $NS[0,1]$ 上定义运算如下:

$$(a,b)\otimes(c,d)=\max\left\{(0,\ 0),\left(\frac{1}{2}(a+c-1+ac),\ \frac{b(c+1)}{2}+d\right)\right\};$$

当 $(a,b)\leqslant(c,d)$ 时, $(a,b)\to(c,d)=(a,b)\rightsquigarrow(c,d)=1$; 否则:

$$(a,b)\to(c,d)=\left(\frac{2c-a+1}{1+a},\ \frac{2d-2b}{1+a}\right),$$

$$(a,b)\rightsquigarrow(c,d)=\left(\frac{2c-a+1}{1+a},\ \frac{-b(c+1)}{1+a}+d\right).$$

那么 $(NS[0,1];\leqslant,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 是一个伪 *BL*–代数. 容易证明对任意 (a,b), $(c,d)\in NS[0,1]$, $(a,b)=[(a,b)\to(c,d)]\rightsquigarrow(c,d)$ 当且仅当 $(a,b)=[(a,b)\rightsquigarrow(c,d)]\to(c,d)$. 因此, $(NS[0,1];\leqslant,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 是具有条件 (W) 的伪 *BL*–代数.

注 7.8.3 前面的注解说明 "(W) 条件" 与 "二重性" 的性质是类似的. 然而, "二重性" 的定义比 "(W) 条件" 要求更强. 事实上, 令 $(NS[0,1];\leqslant,\otimes,\to,\rightsquigarrow,0,1)$ 表示例 7.8.1 中的伪 *BL*–代数, 它满足 (W) 条件, 但是对于某些 $d\in NS[0,1]$, $(x\to d)\rightsquigarrow d=x=(x\rightsquigarrow d)\to d$ 并非对任意 $x\in NS[0,1]$ 成立. 例如, 令 $d=(1,-0.5)$, 有以下结果:

$[(1,\ -0.5)\to(0.5,\ 0.5)]\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)=(1,\ -0.5)=[(1,\ -0.5)\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)]\to(0.5,\ 0.5)$;

$[(0,\ 1)\to(0.5,\ 0.5)]\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)\neq(0,\ 1)\neq[(0,\ 1)\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)]\to(0.5,\ 0.5)$, 但是 $[(0,\ 1)\to(0.5,\ 0.5)]\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)=[(0,\ 1)\rightsquigarrow(0.5,\ 0.5)]\to(0.5,\ 0.5)$;

$[(0.6, 1)\to(0.5, 0.5)]\rightsquigarrow(0.5, 0.5) \neq (0, 1) \neq [(0.6, 1)\rightsquigarrow(0.5, 0.5)]\to(0.5, 0.5)$, 并且 $[(0.6, 1)\to(0.5, 0.5)]\rightsquigarrow(0.5, 0.5)\neq[(0.6, 1)\rightsquigarrow(0.5, 0.5)]\to(0.5, 0.5)$.

可见, 条件 (W) 与以前文献中出现的相关条件并不相同, 它是一种新的条件.

例 7.8.2[71] 设 $(G; \vee, \wedge, +, -, 0)$ 是任意一个格群, 且 "$\perp$" 是一个不同于 G 中任何元的符号. 令 $G^-=\{x' \in G|x' \leqslant 0\}$, 那么在 $G_L=\{\perp\}\cup G^-$ 上可定义如下代数运算:

$$x' \otimes y' = \begin{cases} x' + y', & x', y' \in G^-, \\ \perp, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$x' \to y' = \begin{cases} (y' - x') \wedge 0, & x',\ y' \in G^-, \\ \perp, & x' \in G^-, y' = \perp, \\ 0, & x' = \perp. \end{cases}$$

$$x' \rightsquigarrow y' = \begin{cases} (-x' + y') \wedge 0, & x',\ y' \in G^-, \\ \perp, & x' \in G^-,\ \ y' = \perp, \\ 0, & x' = \perp. \end{cases}$$

对任意 $x' \in G_L$, 令 $\perp \leqslant x'$, 则 $(G_L; \leqslant)$ 构成具有最大元 "$\perp$" 和最小元 "0" 的格. 可以验证, 代数结构 $(G_L; \vee_L = \vee, \wedge_L = \wedge, \otimes, \to, \rightsquigarrow, 0_L = \perp, 1_L = 0)$ 是一个伪 *BL*–代数, 代数结构 $(G_L; \leqslant_L, \oplus, \ominus, -, 0, \perp)$ 是一个对偶伪 *BL*–代数, 其中, $a \leqslant_L b$ 当且仅当 $b \leqslant a$, $a \oplus b = a \otimes b$, $a \ominus b = b \to a$, $a - b = b \rightsquigarrow a$. 进一步, 能够证明 $(G_L; \leqslant_L, \oplus, \ominus, -, 0, \perp)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶伪 *BL*–代数.

定理 7.8.2 设 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶伪 *BL*–代数, $+$ 是由 $\oplus$ 导出的部分和. 那么 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪弱 *MV*–效应代数, 且由 $+$ 导出的全和就是 $\oplus$.

证明 首先, 证明由 $+$ 导出的全和存在且就是 $\oplus$. 为了方便, 用 $\oplus'$ 表示由 $+$ 导出的全和. $\forall a, b \in L$. 令集合 $A = \{a' + b'|a' \leqslant a,\ b' \leqslant b$ 且 $a' + b'$ 有定义$\}$. 称 $a\oplus' b$ 是有定义的, 如果集合 A 有最大元存在. 设 $a \oplus b = c$, 令 $a' = c \ominus (c - a)$, $b' = c - a$. 由 (DPBL3), 从 $c - a \leqslant c - a$ 可得 $c \leqslant a \oplus (c - a)$, 从而 $c \ominus (c - a) \leqslant a$. 因此, $a' \leqslant a$. 由于 $a \oplus b = c$, $c \leqslant a \oplus b$, 再由 (DPBL3) 得 $c - a \leqslant b$. 于是 $b' \leqslant b$. 一方面, 由 $a' \leqslant a \leqslant c$ 和命题 7.8.2 (6) 可得 $b' = c - a \leqslant c - a'$. 另一方面, 从 $c \ominus b' \leqslant c \ominus b'$ 得 $c \leqslant (c \ominus b') \oplus b'$, 从而 $c - (c \ominus b') \leqslant b'$. 进而 $c - a' \leqslant b'$. 所以 $c - a' = b'$, 再由命题 7.8.3 可知 $a' + b'$ 有定义且等于 c. 显然, $\forall a'' \leqslant a$, $b'' \leqslant b$, $a'' + b'' = a'' \oplus b'' \leqslant a \oplus b = c = a' + b'$. 因此, $a' + b'$ 是集合 A 的最大值. 这说明 $\oplus'$ 存在且就是 $\oplus$.

(PEA1) 由 (DPBL1) 可直接得到.

(PEA2) (a) 设 $(a+b)+c$ 有定义. 令 $d=a+b$, $e=(a+b)+c$. 由命题 7.8.3 得 $b=d-a$, $a=d\ominus b$, $d=e\ominus c$, $c=e-d$. 于是, 由命题 7.8.2 可得

$$b=(e\ominus c)-a=(e-a)\ominus c,\quad c=e-(a+b)=e-(a\oplus b)=(e-a)-b.$$

由命题 7.8.3 可知 $b+c$ 有定义, 从而 $b+c=e-a$. 下面说明 $a+(b\oplus c)$ 是有定义的. 事实上, 由命题 7.8.2 (2) 可推出 $e\ominus(b\oplus c)=(e\ominus c)\ominus b=d\ominus b=a$. 应用命题 7.8.2 (2), 由 $b\oplus c=e-a$ 和 $a=e\ominus(b\oplus c)$ 可推得 $a+(b\oplus c)$ 有定义且等于 e.

假设 $b+c$ 和 $a+(b+c)$ 有定义. 现证明 $a+b$ 和 $(a+b)+c$ 有定义. 令 $b+c=d$, $a+d=e$. 由命题 7.8.3 可得 $b=d\ominus c$, $c=d-b$, $d=e-a$, $a=e\ominus d$. 由此, 并应用命题 7.8.2 得 $b=d\ominus c=(e-a)\ominus c=(e\ominus c)-a$, $a=e\ominus d=e\ominus(b\oplus c)=(e\ominus c)-b$. 所以 $a+b$ 有定义且等于 $e\ominus c$. 于是, $e-(a\oplus b)=(e-a)-b=d-b=c$. 从 $a\oplus b=e\ominus c$ 及 $c=e-(a\oplus b)$ 可知 $(a\oplus b)+c$ 有定义且等于 e.

上述结果表明, (PEA2) (a) 成立.

(PEA2) (b) 由 (DPBL2) 和定义 7.8.6 (1) 知, (PEA2) (b) 成立.

(PEA2) (c) 令 $a+b=c$, 则有 $b=c-a$ 且 $a=c\ominus b$. 从而, $b=c-(c\ominus b)$, $a=c\ominus(c-a)$. 由 (W) 条件得 $b=c\ominus(c-b)$ 且 $a=c-(c\ominus a)$. 令 $e=c-b$, $d=c\ominus a$, 则 $b=c\ominus e$ 且 $a=c-d$. 应用命题 7.8.3 即得 $b+e=c=d+a$.

(PEA3) (a) 设 $a, b, c\in L$, $a+c$ 及 $b+c$ 有定义, 且 $a\leqslant b$. 由 (DPBL4) 有 $b=b\vee a=(b\ominus a)\oplus a$, 从而 $b+c=b\oplus c=((b\ominus a)\oplus a)\oplus c=(b\ominus a)\oplus(a\oplus c)=(b\ominus a)\oplus(a+c)$. 由此并应用命题 7.8.2 (5) 得 $a+c\leqslant b+c$. 反之, 设 $a+c\leqslant b+c$, 则有 $a\oplus c\leqslant b\oplus c$. 从而, 由 (DPBL3) 得 $(a\oplus c)\ominus c\leqslant b$. 应用命题 7.8.3 可得 $(a\oplus c)\ominus c=(a+c)\ominus c=a$. 所以, $a\leqslant b$.

同理可证 (PEA3) (b) 成立.

(PEA4′) 设 $a\leqslant b$. 令 $\bar{a}=b\ominus(b-a)$, $x=b-a$, 则 $\bar{a}=b\ominus x$. 根据 (DPBL3), 由 $b-a\leqslant b-a$ 可推出 $b\leqslant a\oplus(b-a)$, 进而 $b\ominus(b-a)\leqslant a$. 于是, $\bar{a}\leqslant a$. 由 $b\ominus(b-a)\leqslant b\ominus(b-a)$ 可得 $b-\bar{a}=b-(b\ominus(b-a))\leqslant b-a=x$. 应用命题 7.8.2 (6) 及 $\bar{a}\leqslant a\leqslant b$ 可得 $x=b-a\leqslant b-\bar{a}$, 于是 $b-\bar{a}=x$. 所以, $\bar{a}+x=b$. 对任意满足条件 "$a'\leqslant a$ 且存在 $y\in L$ 使得 $a'+y=b$" 的 a', 由 $b-a\leqslant b-a'$ 及命题 7.8.2 (6) 可得 $a'=b\ominus y=b\ominus(b-a')\leqslant b\ominus(b-a)=\bar{a}$. 因此, $\bar{a}$ 是满足条件 "$\bar{a}\leqslant a$ 且 $\bar{a}+x=b$" 的最大元.

(PEA5) 设 $a_1, a_2\leqslant b_1, b_2$. 由于 L 是一个格, 故 $a_1\vee a_2$ 存在. 令 $c=a_1\vee a_2$. 显然 $a_1, a_2\leqslant c\leqslant b_1, b_2$.

(PEA6) 设 $a, b, c\in L$ 满足 $c\leqslant a+b$. 令 $a_1'=a\wedge c$. 那么 $a_1'\leqslant a$, $a_1'\leqslant c$. 令 $a_1=c\ominus(c-a_1')$ 且 $b_1=c-a_1'$. 由上面 (PEA4′) 的证明知 $a_1+b_1=c$. 由 $c-a_1'\leqslant c-a_1'$ 可得 $c\leqslant a_1'\oplus(c-a_1')$, 从而 $c\ominus(c-a_1')\leqslant a_1'$. 于是, $a_1\leqslant a_1'\leqslant a$. 由

文献 [337] Theorem 3.3 中 RDP 的证明过程可知 $b_1 \leqslant b$. 当 $a \leqslant c$ 时, 由 $a_1' = a \wedge c$ 可得 $a_1' = a$. 所以, $a_1 = c \ominus (c - a)$. 令 $d = a + b$, 应用命题 7.8.2 可得

$$a = d \ominus (d - a) = d \ominus ((c - a) \oplus (d - c)) = (d \ominus (d - c)) \ominus (c - a) \leqslant c \ominus (c - a) = a_1 \leqslant a.$$

这说明 $c = a + b_1$.

(PEA7) (a) 对任意 $a, b \in L$, 令 $a_2 = a - b$, $a_1 = a \ominus a_2$, $b_2 = b - a$, $b_1 = b \ominus b_2$, 则由命题 7.8.2 (3), 根据 $a - b \leqslant a$ 可得 $a_1 \oplus a_2 = (a \ominus (a - b)) \oplus (a - b) = a$. 于是, $a_1 \oplus' a_2 = a_1 \oplus a_2 = a$. 从而, 由上面的证明过程可知存在 $a_1' \leqslant a_1$ 和 $a_2' \leqslant a_2$ 使得 $a_1' + a_2' = a$ 且 $a_1 = a \ominus (a - b) \leqslant b$. 类似地, 存在 $b_1' \leqslant b_1$ 和 b_2' 使得 $b_1' + b_2' = b$. 总之, $a_1' \leqslant a_1 \leqslant b$, $b_1' \leqslant b_1 \leqslant a$, 且 $a_2' \wedge b_2' \leqslant a_2 \wedge b_2 = (a - b) \wedge (b - a) = 0$.

同理可证 (PEA7) (b) 成立.

定理 7.8.3　设 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪弱 MV–效应代数, 且 $\oplus$ 是由 $+$ 导出的全和. 那么 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶伪 BL–代数且由 $\oplus$ 导出的部分和就是 $+$, 其中 $(\forall a, b \in L)$,

$$a \ominus b \cong \min\{x | x \oplus b = a \vee b\}, \quad a - b \cong \min\{x | b \oplus x = a \vee b\}.$$

证明　由命题 7.8.4 (2) 及下面关于格的证明知, $\ominus$ 及 $-$ 的定义是恰当的.

(DPBL1) 先证明 L 是一个格. $\forall a, b \in L$, 由命题 7.8.4 (4) 可知存在 $a_1, b_1, c \in L$ 使得 $a = a_1 \oplus c$, $b = b_1 \oplus c$ 且 $a_1 \wedge b_1 = 0$. 由 $\oplus$ 的定义, $c = 0 + c \leqslant a_1 \oplus c = a$ 且 $c = 0 + c \leqslant b_1 \oplus c = b$. 设 $x \leqslant a, b$. 应用命题 7.8.4 (3), 从 $x \leqslant a = a_1 \oplus c$ 可得 $x = m \oplus n$ 且 $m \leqslant a_1$, $n \leqslant c$. 应用命题 7.8.4 (2), 从 $n \leqslant x$ 可知存在一个最小元 m' 使得 $m' \oplus n = x$. 于是, $m' \leqslant m$. 再由命题 7.8.4 (2) 及 $n \leqslant c$ 可知存在 $r \in L$ 使得 $c = r \oplus n$. 从而, $n \leqslant x \leqslant b = b_1 \oplus c = b_1 \oplus r \oplus n$. 再应用命题 7.8.4 (3), 存在 $y \leqslant b_1 \oplus r$ 使得 $x = y \oplus n$. 由 m' 的最小性可得 $m' \leqslant y$. 从 $m' \leqslant y \leqslant b_1 \oplus r$ 可知, 存在 $b_1' \leqslant b_1$ 及 $r' \leqslant r$ 使得 $m' = b_1' \oplus r'$. 由 $b_1' \leqslant b_1$ 和 $b_1' \leqslant m' \leqslant a_1$ 可得 $b_1' \leqslant a_1 \wedge b_1 = 0$. 于是, $b_1' = 0$ 且 $m' = 0 \oplus r' = r' \leqslant r$. 应用命题 7.8.4 (1) 得 $x = m' \oplus n \leqslant r \oplus n = c$. 所以, $c = a \wedge b$.

应用命题 7.8.4 (2), 由 $b = b_1 \oplus c$ 可知存在最小元 $\bar{b}_1$ 使得 $b = \bar{b}_1 \oplus c$. 现证明 $a \vee b = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c$. 令 $d = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c$. 由 $d = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c = \max\{u + v + t\colon u \leqslant \bar{b}_1, v \leqslant a_1, t \leqslant c\}$可得 $b, c \leqslant d$. 设 $a, b \leqslant y$. 由命题 7.8.4 (2) 可知存在 $s \in L$ 使得 $y = s \oplus a = s \oplus a_1 \oplus c$. 从 $c \leqslant b \leqslant s \oplus a_1 \oplus c$ 可知 $b = b_1' \oplus c$ 且 $b_1' \leqslant s \oplus a_1$. 再根据 $\bar{b}_1$ 的最小性得 $\bar{b}_1 \leqslant b_1' \leqslant s \oplus a_1$. 由 $\bar{b}_1 \leqslant b_1$ 及 $a_1 \wedge b_1 = 0$ 可得 $\bar{b}_1 \wedge a_1 = 0$. 由 $b_1' \leqslant s \oplus a_1$ 知, 存在 $s' \leqslant s$ 及 $a_1' \leqslant a_1$ 使得 $\bar{b}_1 = s' \oplus a_1'$. 于是, 由 $a_1' \leqslant a_1$ 及 $a_1' \leqslant \bar{b}_1$ 可得 $a_1' \leqslant \bar{b}_1 \wedge a_1 = 0$. 进而 $\bar{b}_1 = s' \oplus 0 = s' \leqslant s$. 从而, 由命题 7.8.4 (1) 可得 $d = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c \leqslant c \leqslant s \oplus a_1 \oplus c = y$. 所以, $a \vee b = d = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c$.

上述结果表明, L 是一个格.

(DPBL2) $\forall a, b, c \in L$. 设集合 $A = \{u+z|u \leqslant a \oplus b, z \leqslant c$, 且 $u+z$ 有定义$\}$, 集合 $B = \{x+y+z|x \leqslant a, y \leqslant b, z \leqslant c$, 且 $x+y+z$ 有定义$\}$. 由 $\oplus$ 的定义, 若 $x \leqslant a$, $y \leqslant b$ 且 $x+y$ 有定义, 则 $x+y \leqslant a \oplus b$. 进而, $\forall m \in B$, $m = x+y+z$. 令 $x+y=u$, 则 $m=u+z$ 且 $u \leqslant x+y \leqslant a \oplus b$, $z \leqslant c$. 因此, $m \in A$, 这说明 $B \subseteq A$.

反之, $\forall n \in A$, $n = u+z$ 满足 $u \leqslant a \oplus b$, $z \leqslant c$, 则由 $\oplus$ 的定义, 存在 $a' \leqslant a$ 和 $b' \leqslant b$ 使得 $a'+b' = a \oplus b$. 从而, $u \leqslant a'+b'$. 由 (PEA6) 可知存在 a_1 和 b_1 使得 $a_1 \leqslant a'$, $b_1 \leqslant b'$ 且 $u = a_1+b_1$. 于是, $n = u+z = a_1+b_1+z$, 从而 $n \in B$. 这说明 $A \subseteq B$. 所以, $A = B$.

同理可证, B 等于 $C = \{x+u|x \leqslant a, u \leqslant y \oplus z$, 且 $x+u$ 有定义$\}$. 因此, $A=C$. 这说明 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

同时, 由 $\oplus$ 的定义易得 $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

(DPBL3) 设 $z \leqslant x \oplus y$. 令 $z \ominus y = u$. 由 $\ominus$ 的定义可知 u 是满足 $u \oplus y = y \vee z$ 的最小元. 令 $d = y \vee z$, 则 $y \leqslant d \leqslant x \oplus y$. 由命题 7.8.4 (3) 可知, 存在 $x' \leqslant x$ 使得 $d = x' \oplus y$. 再由 u 的最小性得 $u \leqslant x' \leqslant x$. 于是, $z \ominus y \leqslant x$. 反之, 如果 $z \ominus y \leqslant x$, 那么由命题 7.8.4 (1) 得 $u \oplus y \leqslant x \oplus y$. 于是, $z \leqslant y \vee z = u \oplus y \leqslant x \oplus y$.

同理可证, $z \leqslant x \oplus y$ 当且仅当 $z - x \leqslant y$.

(DPBL4) 由 $\ominus$ 及 $-$ 的定义, $a \vee b = (a \ominus b) \oplus b$ 且 $a \vee b = b \oplus (a-b)$.

(DPBL5) 由 (DPBL1) 的证明过程知, $a \vee b = \bar{b}_1 \oplus a_1 \oplus c = \bar{b}_1 \oplus a$. 从而, 由 $\ominus$ 的定义得 $b \ominus a \leqslant \bar{b}_1 \leqslant b_1$. 类似于 (DPBL1), 存在 $\bar{a}_1 \leqslant a_1$ 使得 $a \vee b = \bar{a}_1 \oplus b$. 于是, $a \ominus b \leqslant \bar{a}_1 \leqslant a_1$. 进而, 由 $a_1 \wedge b_1 = 0$ 得 $(b \ominus a) \wedge (a \ominus b) = 0$. 同理可证, $(b-a) \wedge (a-b) = 0$.

以下证明 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 满足 (W) 条件.

首先证明 $a+b=c$ 当且仅当 $c \ominus b = a$ 且 $c - a = b$.

如果 $a+b=c$, 由 (PEA3) 有 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$. 对于任意 $x \oplus b = c \vee b = c$ 及 $a \oplus y = c \vee a = c$, 由 $\oplus$ 的定义可知, 存在 $x' \leqslant x$, $b' \leqslant b$, $a' \leqslant a$ 及 $y' \leqslant y$ 使得 $x'+b' = c$ 且 $a'+y' = c$. 再由命题 7.8.4 (3) 可得 $a \leqslant x$ 及 $b \leqslant y$. 于是, 由 $\ominus$ 和 $-$ 的定义有 $a = c \ominus b$ 且 $b = c-a$.

假设 $c \ominus b = a$ 且 $c - a = b$. 由 (DPBL3) 的证明过程, 从 $c \ominus (c-a) = a$ 和 $c - (c \ominus b) = b$ 得 $a \leqslant c$ 且 $b \leqslant c$. 再由 (DPBL4) 的证明知 $a \oplus b = (c \ominus b) \oplus b = c$. 由 $\oplus$ 的定义可知, 存在 $a' \leqslant a$ 及 $b' \leqslant b$ 使得 $a'+b' = c$. 于是, $a' \oplus b = c = a \oplus b'$. 从 $c \ominus b = a$ 及 $c - a = b$ 可得 $a \leqslant a'$ 且 $b \leqslant b'$. 因此, $a' = a$, $b' = b$, 所以 $a+b=c$.

现在证明 (W) 成立. 如果 $a = c \ominus (c-a)$. 令 $d = c-a$, 则有 $a = c \ominus d$, $d = c-a$. 于是, $a+d=c$. 由 (PEA2) 可知, 存在 e 使 $e+a=c$. 从而, $a = c-e$, $e = c-a$. 进而, $a = c-(c \ominus a)$. 反之, 用类似的方法可由 $a = c-(c \ominus a)$ 得到 $a = c \ominus (c-a)$.

总之, (W) 条件成立.

最后证明由 $\oplus$ 导出的部分和就是 $+$. 用 $+'$ 表示由 $\oplus$ 导出的部分和. 首先说明: $\forall a, b \in L$, 若 $a+b$ 有定义, 则 $a+'b$ 也有定义且 $a+b=a+'b$. 令 $a+b=c$, 由 $\oplus$ 的定义知 $a \oplus b = a+b=c$. 如果 $a^* \oplus b = c$, 则存在 $\bar{a}^* \leqslant a^*$, $\bar{b} \leqslant b$ 使得 $\bar{a}^* + \bar{b} = c$. 由命题 7.8.1 (3) 有 $a \leqslant \bar{a}^* \leqslant a^*$. 这说明 a 是 $a \oplus b$ 的最小元. 类似地, b 也是 $a \oplus b$ 的最小元. 总之, $a+'b$ 有定义且等于 $a+b$. 接下来证明: $\forall a, b \in L$, 若 $a+'b$ 有定义, 则 $a+b$ 也有定义且 $a+b=a+'b$. 令 $a+'b=c$. 由于 $+'$ 是由 $\oplus$ 导出的部分和, 故 a 和 b 是 $a \oplus b$ 的最小元. 再由 $\oplus$ 的定义知 $a_1+b_1=c$. 于是, 由 a 和 b 的最小性得 $a \leqslant a_1$ 及 $b \leqslant b_1$. 总之, $a_1=a$ 且 $b_1=b$, 也就是说, $a+b$ 有定义且等于 $c=a+'b$. 由以上证明可见, $+'$ 和 $+$ 是相同的运算.

由定理 7.8.2 和 7.8.3 可得到以下结果.

定理 7.8.4　设 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个对偶伪 BL–代数, 那么 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪弱 MV–效应代数当且仅当 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 满足 (W) 条件, 其中, $+$ 的定义如同定义 7.8.6 (1). 反之, 设 $(L; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个弱 MV–伪效应代数, 那么 $(L; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶伪 BL–代数当且仅当由 $+$ 导出的全和存在, 其中, $\oplus$, $\ominus$ 及 $-$ 的定义如同定理 7.8.3.

7.8.4　伪 MV–代数与伪 MV–效应代数

为了引述方便, 这里重述伪 MV–代数的定义. 伪 MV–代数是一个 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 型代数结构 $(M; \otimes, \boxplus, ^-, ^\sim, 0, 1)$, 且满足以下条件 $(\forall x, y, z \in M)$:

(PM1) $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$;

(PM2) $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x$;

(PM3) $x \otimes 0 = 0 \otimes x = 0$;

(PM4) $0^- = 1, 0^\sim = 1$;

(PM5) $(x^- \otimes y^-)^\sim = (x^\sim \otimes y^\sim)^-$;

(PM6) $x \otimes (x^\sim \boxplus y) = y \otimes (y^\sim \boxplus x) = (x \boxplus y^-) \otimes y = (y \boxplus x^-) \otimes x$;

(PM7) $x \boxplus (x^- \otimes y) = (x \otimes y^\sim) \boxplus y$;

(PM8) $(x^-)^\sim = x$,

其中, $y \boxplus x \cong (x^- \otimes y^-)^\sim$.

对偶伪 MV–代数是一个 (2, 2, 1, 1, 0, 0) 型代数结构 $(M; \oplus, *, ^-, ^\sim, 0, 1)$ 且满足以下条件 $(\forall x, y, z \in M)$:

(DPM1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;

(DPM2) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;

(DPM3) $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$;

(DPM4) $1^\sim = 0, 1^- = 0$;

(DPM5) $(x^- \oplus y^-)^\sim = (x^\sim \oplus y^\sim)^-$;

(DPM6) $x \oplus (x^\sim * y) = y \oplus (y^\sim * x) = (x * y^-) \oplus y = (y * x^-) \oplus x$;

(DPM7) $x * (x^- \oplus y) = (x \oplus y^\sim) * y$;

(DPM8) $(x^-)^\sim = x$,

其中, $y * x \cong (x^- \oplus y^-)^\sim$.

注 7.8.4 本节中的伪 MV–代数和对偶伪 MV–代数, 又分别称为左伪 MV–代数和右伪 MV–代数.

引理 7.8.3 (1) 设 $(M;\ \oplus,\ *,\ ^-,\ ^\sim,\ 0,\ 1)$ 是一个对偶伪 MV–代数. 那么 $(M;\ \leqslant,\ \oplus,\ \ominus,\ -,\ 0,\ 1)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶伪 BL–代数, 其中, $\forall x,\ y \in M$, $y \ominus x \cong y * x^-$, $y - x \cong x^\sim * y$.

(2) 设 $(M;\ \otimes,\ \boxplus,\ ^-,\ ^\sim,\ 0,\ 1)$ 是一个伪 MV–代数. 那么 $(M;\ \leqslant,\ \otimes,\ \rightarrow,\ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ 是一个具有 (W) 条件的伪 BL–代数, 其中, $\forall x,\ y \in M$, $x \rightarrow y \cong y \boxplus x^-$, $x \rightsquigarrow y \cong x^\sim \boxplus y$.

证明 由文献 [71] 中命题 7.7 和 7.8, 仅需证明 $(M;\ \leqslant,\ \oplus,\ \ominus,\ -,\ 0,\ 1)$ 和 $(M;\ \leqslant,\ \otimes,\ \rightarrow,\ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ 满足 (W) 条件即可.

$\forall x,\ y \in M$, 从文献 [71] 中命题 6.2 (2) 可推得

$$\begin{aligned} x \ominus (x - y) &= x * (y^\sim * x)^- = x * (x^- \oplus y) = (y \oplus x^\sim) * x \\ &= (x * y^-)^\sim * x = x - (x \ominus y). \end{aligned}$$

因此, $(M;\ \leqslant,\ \otimes,\ \rightarrow,\ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ 满足 (W) 条件.

$\forall x,\ y \in M$, 从文献 [71] 中命题 6.7 可推得

$$\begin{aligned} (x \rightarrow y) \rightsquigarrow y &= (y \boxplus x^-)^\sim \boxplus y = (x \otimes y^\sim) \boxplus y = y \boxplus (y^- \otimes x) \\ &= y \boxplus (x^\sim \boxplus y)^- = (x \rightsquigarrow y) \rightarrow y. \end{aligned}$$

因此, $(M;\ \leqslant,\ \otimes,\ \rightarrow,\ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ 满足 (W) 条件.

定义 7.8.9[334] 设 $(E;\ \leqslant,\ +,\ 0,\ 1)$ 是一个伪效应代数.

(a) 称 E 满足弱 Riesz 分解性质, 简称 (RDP_0), 如果 $\forall a,\ b_1,\ b_2 \in E$, $a \leqslant b_1 + b_2$, 存在 $d_1,\ d_2 \in E$ 使得 $d_1 \leqslant b_1$, $d_2 \leqslant b_2$ 且 $a = d_1 + d_2$.

(b) 称 E 满足强 Riesz 分解性质, 简称 (RDP_2), 如果 $\forall a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in E$, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, 存在 $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4 \in E$ 使得 (i) $d_1 + d_2 = a_1$, $d_3 + d_4 = a_2$, $d_1 + d_3 = b_1$, $d_2 + d_4 = b_2$, 且 (ii)$d_2 \wedge d_3 = 0$.

命题 7.8.5 设 $(E;\ \leqslant,\ +,\ 0,\ 1)$ 是一个伪效应代数, 那么

(1) 如果 E 是格序的, 那么 E 满足 (PEA5);

(2) E 满足 RDP_0 当且仅当 E 满足 (PEA6);

(3) 如果 E 满足 RDP_2, 那么 E 满足 (PEA7).

证明　(1) $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in E$, $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$. 令 $c = a_1 \vee a_2$, 则有 $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$.

(2) 仅需证明对于任意 $a \leqslant c \leqslant a+b$, 存在 $b_1 \in E$ 使得 $c = a + b_1$ 且 $b_1 \leqslant b$. 如果 $a \leqslant c$, 则由 (PEA4) 可知存在 $b_1 \in E$ 使得 $c = a + b_1$. 因此, $a + b_1 = c \leqslant a + b$. 再由 (PEA3) 得 $b_1 \leqslant b$.

(3) $\forall a, b \in E$, 存在 m 和 n 使得 $a + m$=1=$b + n$. 由 RDP_2 可知, 存在 $d_1, d_2, d_3, d_4 \in E$ 使得 $a = d_1 + d_2$, $b = d_1 + d_3$ 且 $d_2 \wedge d_3$ =0, $d_1 \leqslant a$, $d_1 \leqslant b$.

定义 7.8.10　一个伪效应代数 $(E; \leqslant, +, 0, 1)$ 称为伪 MV–效应代数, 如果它满足 (PEA5)~(PEA7).

据伪弱 MV–效应代数的定义知, 伪 MV–效应代数必是伪弱 MV–效应代数.

定理 7.8.5　设 $(E; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪 MV–效应代数, $\oplus$ 是由 + 导出的全和. 那么 $(E; \oplus, *, ^-, ^\sim, 0, 1)$ 是对偶伪 MV–代数, 其中, $\forall x, y \in E$, 如果 $u + x = 1$, 则定义 $x^- \cong u$; 如果 $x + v = 1$, 则定义 $x^\sim \cong v$; 而 $x \oplus y \cong x + (x^\sim \wedge y)$, $y * x \cong (x^- \oplus y^-)^\sim$.

证明　由定理 7.8.3 的证明可知 E 是格序的. 由命题 7.8.5 (2) 得, RDP_0 在 E 中成立. 故由文献 [333] 中定理 3.2 知 $(E; \oplus, *, ^-, ^\sim, 0, 1)$ 是一个对偶伪 MV–代数 (在文献 [333] 中伪 MV–代数的定义与本节中对偶伪 MV–代数一致).

定理 7.8.6　设 $(M; \oplus, *, ^-, ^\sim, 0, 1)$ 是一个对偶伪 MV–代数, 那么 $(M; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪 MV–效应代数, 其中, + 是由 $\oplus$ 导出的部分和.

证明　首先由引理 7.8.3 可知 $(M; \leqslant, \oplus, \ominus, -, 0, 1)$ 是一个具有 (W) 条件的对偶 BL–代数, 其中, $\forall x, y \in M$, $y \ominus x \cong y * x^-$, $y - x \cong x^\sim * y$. 再由定理 7.8.2 可知 $(M; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪弱 MV–效应代数. 故只需证明 $(M; \leqslant, +, 0, 1)$ 满足 (PEA4).

$\forall a, b \in M$, $a \leqslant b$, 由文献 [71] 中命题 6.2 (2) 可得 $b \ominus (b - a) = b * (a^\sim * b)^- = b * (b^- \oplus a) = b \wedge a = a$. 因此, 由定理 7.8.2 (PEA4$'$) 的证明过程知 $\bar{a} = a$. 于是, $b = \bar{a} + x = a + x$. 再应用 (PEA2)(c), 存在 y 满足 $y + a = b$. 反之, 若 $a + x = b$. 由 (PEA3) 和 0$\leqslant x$ 可得 $a = a$+0$\leqslant a + x = b$.

所以, (PEA4) 在 $(M; \leqslant, +, 0, 1)$ 中成立, 即 $(M; \leqslant, +, 0, 1)$ 是一个具有 (Ex) 条件的伪 MV–效应代数.

综上所述, 通过限制全部运算到部分运算以及拓展部分运算到全部运算, 建立了伪 BL–代数和伪弱效应代数之间的关系. 同时, 给出了从一种代数结构到另一种代数结构的充分条件. 尤其是得到了对偶伪 BL–代数成为伪弱 MV–效应代数的充要条件. 由于每个伪 BL–代数都是非交换剩余格, 每个伪 MV–效应代数是伪效应代数, 因此本节的有关结果可以推广到非交换剩余格和伪效应代数中, 相关结果请

参见文献 [343]. 另外, 本节中虽然引入了具有 (W) 条件的伪 *BL*–代数的定义, 且给出了一些例子, 但是目前还不清楚是否存在不满足 (W) 条件的伪 *BL*–代数, 这是一个未解决的公开问题. 实际上, 文献 [76], [293] 中也有类似的公开问题: 是否存在 "not good" 的伪 *BL*–代数? 这一问题到目前为止还未得到完满解答.

图 7.20 及图 7.21 总结了文献 [336], [337] 以及本节中的主要结果.

注 7.8.5 (1) 在图 7.20 及图 7.21 中, "→" 表示蕴含, "↔" 表示范畴等价, "-→" 带 (Ex) 表示全和 $\oplus$ 存在.

(2) 由图 7.20 及图 7.21 可知, 弱 *MV*–效应代数可以称为 *BL*–效应代数, 而伪弱 *MV*–效应代数可以称为伪 *BL*–代数.

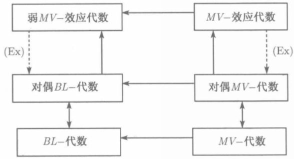


图 7.20 *BL*–代数和效应代数

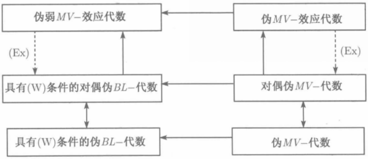


图 7.21 伪 *BL*–代数和伪效应代数

习 题 7

1. 给出定理 7.1.2、定理 7.1.3 及定理 7.3.16 的证明.

2. 研究 *psBCK*–代数的滤子理论, 包括滤子及其商结构、Boole 滤子、*MV*–滤子、*G*–滤子以及素滤子定理.

3. 基于 *psBCK*–代数、$FBIK^+$–代数建立具有完备性的逻辑形式系统.

4. 试建立基于伪 Hoop 的非可换模糊逻辑系统.

5. 深入研究 *MPE*–代数 (见定义 7.1.14) 的性质, 讨论 *MPE*–代数与 *BCI*–代数在结构上的不同之处.

6. 进一步研究图 7.17 中涉及的各种代数结构之间的关系, 深入探讨文献 [320] 中指出的公开问题. 同时, 探索和研究文献 [76], [293], [338] 中提出的公开问题.

7. 查阅国内外最新文献, 了解 **FBCK** 逻辑的最新研究成果, 探索将这些成果推广到 **FBIK**$^+$ 逻辑中.

8. 全面探索伪效应代数与非可换剩余格 (包括各种非可换模糊逻辑代数) 之间的关系.

9. 对本章讨论过的伪 Hoop、剩余 *BCC*–代数、蕴涵格的 (正规) 素滤子定理进行改进, 使其适用于更广泛的情形. 进一步, 探讨一般逻辑代数 (正规) 素滤子的内在特征, 给出一个 (正规) 素滤子定理成立的一般化判别条件.

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets. Information Control, 1965, 8: 338~353.

[2] Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9(4): 3~8.

[3] Zadeh L A. Responses to Elkan: Why the success of fuzzy logic is not paradoxical. IEEE Expert, 1994, 9(4): 43~46.

[4] Elkan C. Elkan's Reply: The paradoxical controversy over fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9(4): 47~49.

[5] Trillas E. Alsina C. Elkan's theoretical argument, reconsidered. International Journal of Approximate Reasoning, 2001, 26 (2): 145~152.

[6] Elkan C. Paradoxes of fuzzy logic, revisited. International Journal of Approximate Reasoning, 2001, 26 (2): 153~155.

[7] Trillas E. Alsina C. Comments to "Paradoxes of fuzzy logic, revisited", International Journal of Approximate Reasoning, 2001, 26(2): 157~159.

[8] 吴望名. 关于模糊逻辑的一场争论. 模糊系统与数学, 1995, 9(2): 1~10.

[9] 应明生. 模糊逻辑的紧致性. 科学通报, 1998, 43(4): 379~383.

[10] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京: 科学出版社, 2000.

[11] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理. 第二版. 北京: 科学出版社, 2006.

[12] Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning. IEEE Trans Fuzzy Sys, 1999, 7: 625~629.

[13] 李洪兴等. 四级倒立摆的变论域自适应模糊控制. 中国科学 (E 辑), 2002, 32(1): 65~75.

[14] 李洪兴. 模糊系统的概率表示. 中国科学 (E 辑), 2006, 36 (4): 373~397.

[15] Xu Y, Ruan D, Qin K, et al. Lattice-Valued Logic. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.

[16] 徐扬, 秦克云. 一阶格值逻辑系统 FM 的语法问题. 科学通报, 1997, 42(10): 1052~1055.

[17] 何华灿等. 泛逻辑学原理. 北京: 科学出版社, 2001.

[18] 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术. 第 2 版. 北京: 国防工业出版社, 1998.

[19] 裴道武. 关于模糊逻辑与模糊推理逻辑基础问题的十年研究综述. 工程数学学报, 2004, 21 (2): 249~258.

[20] Gabbay D M, Guenthner F. Handbook of Philosophical Logic. Volume 2. Second Edition. Kluwer Academic Publishers, 2001.

[21] Gabbay D M, Guenthner F. Handbook of Philosophical Logic. Volume 13. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 2005.

[22] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers. 1998.

[23] 庞彦军, 刘开弟, 刘军. 模糊数学中"取大取小"运算引发的问题. 系统工程理论与实践, 2001, 9: 98~100.

[24] Chang C C. Algebaic analysis of many-valued logics. Transactions of the American Mathatical Society, 1958, 88: 467~490.

[25] Chang C. C. A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms. Transactions of the American Mathatical Society, 1959, 93: 74∼90.

[26] Cignoli R, Esteva F, Godo L, et al., Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua. Soft Computing, 2000, 4: 106∼112.

[27] 裴道武, 王国俊. 形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的完备性及其应用. 中国科学 (E 辑), 2002, 32(1): 56∼64.

[28] 王国俊, 钱桂生, 党创寅. 命题演算系统 $\mathscr{L}^*$ 与谓词演算系统 K^* 中统一的近似推理理论. 中国科学 (E 辑) , 2004, 34(10): 1110∼1122.

[29] Wang G J. Formalized theory of general fuzzy reasoning. Information Sciences, 2004, 160: 251∼266.

[30] 裴道武. 关于形式系统 $\mathscr{L}^*$ 的强完备性. 工程数学学报, 2005, 22(1): 128∼132.

[31] 王国俊. MV–代数、BL–代数、R_0–代数与多值逻辑. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 1∼15.

[32] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学 (E 辑), 1999, 29(1): 43∼53.

[33] 王国俊, 宋庆燕. 一种新型的三 I 算法及其逻辑基础. 自然科学进展, 2003, 13(6): 575∼581.

[34] 裴道武, 傅丽. 模糊推理三 I 算法的逻辑基础. 模糊系统与数学, 2004, 18(3): 1∼10.

[35] 宋士吉, 冯纯伯, 吴从炘. 关于模糊推理的全蕴涵三 I 算法的约束度理论. 自然科学进展, 2000, 10(10): 884∼889.

[36] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法. 中国科学 (E 辑), 2002, 32: 230∼246.

[37] 侯健, 尤飞, 李洪兴. 由三 I 算法构造的一些模糊控制器及其响应能力. 自然科学进展, 2005, 15(1): 29∼37.

[38] 秦克云, 裴峥. 模糊推理的 α–三 I 算法. 模糊系统与数学, 2005, 19(3): 1∼5.

[39] 傅丽, 王国俊. 三 I 算法的统一形式. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2004, 32(3): 12∼17.

[40] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271∼288.

[41] Jenei S, Montagna F. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL. Studia Logica, 2002, 70: 183∼192.

[42] Pei D W. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138: 187∼195.

[43] Pei D W. Simplification and independence of axioms of fuzzy logic systems IMTL and NM. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152: 303∼320.

[44] Ying M S, Implications operators in fuzzy logic. IEEE Trans Fuzzy Sys, 2002, 10: 88∼91.

[45] 尤飞. 模糊蕴涵算子及其模糊系统的响应性能. 西安: 西北工业大学出版社, 2007.

[46] Klement E P, Navara M. Propositional Fuzzy Logics based on Frank t-norms: A comparison. in Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Knowledge, D.Dubois et al. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[47] 吴望名. 参数 Kleene 系统中的广义重言式. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 1∼7.

[48] 王国俊, 兰蓉. 系统 H_α 中的广义重言式理论. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2003, 31(2): 1∼11.

[49] Whalen T. Parameterized R-implications. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134: 231~281.

[50] Batyrshin I, kaynak O. Parametric classes of generalized conjunction and disjunction operations for fuzzy modeling, IEEE Transactions on fuzzy systems, 1999, 7(5): 586~596.

[51] Emami M R, Turksen I B. Goldenberg A A. A unified parameterized formulation of reasoning in fuzzy modeling and control. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 108: 59~81.

[52] Bubnicki Z. Uncertain Logics. Variables and Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

[53] 陈丹, 何华灿等. 基于连续可控 t 范数的模糊控制方法研究. 控制理论与应用, 2001, 18(5): 717.

[54] 张凤霞, 吕建新等. 基于含参量蕴涵算子的三 I 算法. 计算机工程与应用, 2007, 43(24): 85~87.

[55] Qian S, Kandel A, Schneider M. Parameterized fuzzy operators in fuzzy decision making. International Journal of intelligent systems, 2003, 18: 971~987.

[56] Rutkowski L, Cpalka K. Flexible neuro-fuzzy systems. IEEE Transactions on Neural Networks, 2003, 14 (3): 554~574.

[57] Abrusci V M, Ruet P. Non-commutative logic I: the multiplicative frequent. Annals Pure Appl Logic, 2000, 101: 29~64.

[58] Ruet P, Non-commutative logic II: sequent calculus and phase semantics. Math Struct Comput Sci, 2000, 10(2): 277~312.

[59] Abrusci V M. Towards a semantics of proofs for non-commutative logic: multiplicative and additives. Theoretical Computer Science, 2003, 294: 335~351.

[60] Ying M S. Phase sematics for a pure noncommutative linear proposition logic. J Comput Sci & Technol, 1999, 14 (2): 135~139.

[61] 李永明. 非可换线性逻辑及其 Quantale 语义. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2001, 29(2): 1~5.

[62] Lambek J, The mathematics of sentence structure. Amer Math Monthly, 1958, 65(3): 154~170.

[63] Vojtas P. Fuzzy logic programming. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 361~370.

[64] Ebrahim R. Fuzzy logic programming. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 215~230.

[65] Krajci S, Lencses R, Medina J, et al. Non-commutativity and expressive deductive logic databases, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag GmbH, 2002, 2424: 149~160.

[66] Casadio C. Non-commutative linear logic in linguistics. Grammars, 2001, 4: 167~185.

[67] Kawaguchi M F, Miyakoshi M. Composite fuzzy relational equations with non- commutative conjunctions, Information Sciences, 1998, 110: 113~125.

[68] Fodor J C, Keresztfalvi T. Nonstandard conjunctions and implications in fuzzy logic. Int J Approximate Reasoning, 1995, 12: 69~84.

[69] Batyrshin I, Kaynak O, Rudas I. Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(5): 678~683.

[70] Martinez J, Macias L, Esper A, et al. Towards more realistic (e.g., non-associative) and- and or-operations in fuzzy logic, Proceedings of the 2001 IEEE Systems, Man, and Cybernetics Conference (Tucson, Arizona, October 7~10), 2001, 4: 2187~2192.

[71] Flondor P, Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras. Soft Computing, 2001, 5: 355~371.

[72] Hájek P. Observations on non-commutative fuzzy logic. Soft Computing, 2003, 8: 38~43.

[73] Hájek P. Fuzzy logics with non-commutative conjunction. Journal of Logic and Computation, 2003, 13(4): 469~479.

[74] Jenei S, Montagna F. A proof of standard completeness for non-commutative monoidal t-norm logic. Neural Network World, 2003(5): 481~489.

[75] Leustean I. Non-commutative Lukasiewitcz propositional logic. Archive for Mathematical Logic, 2006, 45: 191~213.

[76] Georgescu G, Popescu A. Non-commutative fuzzy structures and pairs of weak negations. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 143: 129~155.

[77] diNola A, Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-BL-algebras: Part I, Multiple-Valued Logic, 2002, 8: 673~714.

[78] diNola A, Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-BL-algebras: Part II, Multiple-Valued Logic, 2002, 8: 717~750.

[79] Georgescu G, Popescu A. Non-dual fuzzy connections. Arch Math Logic, 2004, 43: 1009~1039.

[80] Popescu A. A general approach to fuzzy concepts. Math Log Quart, 2004, 50 (3): 1~17.

[81] Georgescu G, Popescu A. Non-commutative fuzzy Galois connections. Soft Comput, 2003, 7(7): 458~467.

[82] Eslami E, Khosravi H, Sadeghi F. Very and more or less in non-commutative fuzzy logic. Soft Computing, 2008, 12: 275~279.

[83] Ying M S. On standard models of fuzzy modal logics. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 26(3): 357~363.

[84] Ying M S. Linguistic quantifiers modeled by Sugeno integrals. Artificial Intelligence, 2006, 170: 581~606.

[85] 李洪兴. 不确定性系统的统一性. 工程数学学报, 2007, 24(1): 1~21.

[86] 惠小静, 王国俊. 经典推理模式的随机化研究及其应用. 中国科学 (E 辑), 2007, 37(6): 801~812.

[87] Coletti G, Scozzafava R. Conditional probability, fuzzy sets, and possibility: a unifying view. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 144: 227~249.

[88] 陈图云, 李慧玲. 直觉模糊命题逻辑公式的概率真度. 辽宁师范大学学报 (自然科学版), 2006, 29(4): 388~389.

[89] 吴洪博, 马巧云. 基于 L^* 系统的一种非单调推理系统. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2004, 32(4): 4~8.

[90] 张小红, 祝峰. 基于 Rough 集的逻辑系统 **RSL**(待发表).

[91] Mostowski A. On a generalization of quantifiers. Fundamenta Mathematicae, 1957, 44: 17~36.

[92] Barwise J, Cooper R. Generalized quantifiers and natural language. Linguistics and Philosophy, 1981, 4: 159~219.

[93] Keenan E L. Some properties of natural language quantifiers: Generalized quantifier theory. Linguistics and Philosophy, 2002, 25: 627~654.

[94] Lawry J. A framework for linguistic modeling. Artificial Intelligence, 2004, 155: 1~39.

[95] Zadeh L A. Fuzzy logic = computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1996, 4: 103~111.

[96] Lawry J. A methodology for computing with words. International Journal of Approximate Reasoning, 2001, 28: 51~58.

[97] Ying M S. A formal model of computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10: 640~652.

[98] Zadeh L A. PRUF-a meaning representation language for natural language. International Journal of Man-Machine Studies, 1978, 10: 395~460.

[99] Zadeh L A. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural language. Computers and Mathematics with Applications, 1983, 9: 149~184.

[100] Yager R R. Quantified propositions in a linguistic logic. International Journal of Man-Machine Studies, 1983, 19: 195~227.

[101] Yager R R. General multiple-objective decision functions and linguistically quantified statements. International Journal of Man-Machine Studies, 1984, 21: 389~400.

[102] Yager R R. Interpreting linguistically quantified propositions. International Journal of Intelligent Systems, 1994, 9: 541~569.

[103] Liu Y, Kerre E E. An overview of fuzzy quantifiers (I): Interpretations. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95: 1~21.

[104] Liu Y, Kerre E E. An overview of fuzzy quantifiers (II): Reasoning and applications. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 95: 135~146.

[105] Bosc P, Lietard L. Fuzzy integrals and database flexible querying // Proc of the Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1996: 100~106.

[106] Kacprzyk J, Ziolkowski A. Databases queries with linguistic quantifiers. IEEE Transctions on Systems, Man and Cybernetics, 1986, 16: 474~478.

[107] Kacprzyk J, Iwanski C. Inductive learning from incomplete and imprecise examples // Bouchon-Meunier B, Yager R R, Zadeh L A (Eds.). Uncertainty in Knowledge Bases, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 521, Berlin: Springer, 1991: 424~430.

[108] Kacprzyk J, Yager R R. Softer optimization and control models via fuzzy linguistic quantifiers. Information Sciences, 1984, 34: 157~178.

[109] Glöckner I, Fuzzy Quantifiers: A Computational Theory. Springer-Verlag, 2006.

[110] Wang S M, Zhao B. Prenex normal form in linguistic quantifiers modeled by Sugeno integrals. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159: 1719~1723.

[111] Licong C, Yongming L. Linguistic Quantifiers Based on Choquet Integrals, International Journal of Approximate keasoning, 2008, 48(2): 559~582.

[112] Béziau J Y. From paraconsistent logic to universal logic, SORITES, 2001, 12: 5~32.

[113] Béziau J Y, Alexandre C L. Handbook of the First World Congress and School on Universal Logic (UNILOG'05), 2005, Montreux-Switzerland (www.uni-log.org).

[114] Béziau J Y, He H, et al. Handbook of the Second World Congress and School on Universal Logic (UNILOG'07), 2007, Xi'an China (www.uni-log.cn).

[115] Béziau J Y. Logica Universalis. Towards a General Theory of Logic, Birkhäuser, 2006.

[116] 何华灿等. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学 (E 辑), 1996, 26: 72~78.

[117] 何华灿. 人工智能的基础理论: 泛逻辑// 中国人工智能进展 2001. 北京: 北京邮电大学出版社, 2001: 7~13.

[118] 何华灿. 论第二次逻辑学革命// 中国人工智能进展 2003. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003: 32~41.

[119] Blyth T S. Lattices and Ordered Algebraic Structures. New York: Springer-Verlag, 2005.

[120] 胡长流, 宋振明. 格论基础. 郑州: 河南大学出版社, 1990.

[121] 黄天民, 徐扬等. 格、序引论及其应用. 成都: 西南交通大学出版社, 1998.

[122] Smith D P. Meet-irreducible elements in implicative lattices. Proceedings of the American Mathematical Society, 1972, 34 (1): 57~62.

[123] 谢祥云. 序半群引论. 北京: 科学出版社, 2001.

[124] 现代应用数学手册编委会. 现代应用数学手册《离散数学卷》. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[125] Burris S, Sankappanavar H P. A Course in Universal Algebra (The Millennium Edition). http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/ualg.html.

[126] Chan M W, Shum K P. Homomorphisms of implicative semigroups. Semigroup Forum, 1993, 46: 7~15.

[127] Schweizer B, Sklar A. Associative functions and statistical triangle inequalities. Pub Math Debrecen, 1961, 8: 169~186.

[128] Schweizer B, Sklar A. Associative functions and abstract semigroups. Pub Math Debrecen, 1963, 10: 69~81.

[129] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces. New York: North-Holland, 1983.

[130] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[131] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 143: 5~26.

[132] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 411~438.

[133] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms. Position paper III: conti-nuous t-norms. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 439~454.

[134] Fodor J C. Contrapositive symmetry of fuzzy implications. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 69: 141~156.

[135] Kolesarova A. A note on Archimedean triangular norms. BUSEFAL, 1999, 80: 57~60.

[136] Pavelka J. On fuzzy logic (I), (II), (III), Z.für Mathematik Logic u Grundlagen d Mathematic, 1979, 25: 45~52, 119~134, 447~464.

[137] Ward M, Dilworth R P. Residuated Lattices. Transactions of the American Mathematical Society, 1939, 45(3): 335~354.

[138] Dilworth R P. Non-Commutative Residuated Lattices. Transactions of the American Mathematical Society, 1939, 46(3): 426~444.

[139] Hart J B, Rafter L, Tsinakis C. The strucuture of commutative residuated lattices. International Journal of Algebra and Computation, 2002, 12(4): 509~524.

[140] Block W J, VanAlten C J. The finite embedability property of residuated lattices, pocrims and BCK-algebras. Algebra Univers, 2002, 48: 253~271.

[141] Jipsen P, Tsinakis C. A survey of residuated lattices // Ordered Algebraic Sructures (J.Martinez, ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002: 19~56.

[142] Jipsen P. An overview of generalized basic logic algebras. Neural Network World, 2003, 13(5): 491~500.

[143] Blount K, Tsinakis C. The strucuture of residuated lattices. International Journal of Algebra and Computation, 2003, 13(4): 437~461.

[144] Belohlavek R. Some properties of residuated lattices. Czechoslovak Mathematical Journal, 2003, 53(128): 161~171.

[145] Galatos N, Jipsen P, Kowalski T, et al. Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics, Vol. 151 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Publisher: Elsevier Science, 2007.

[146] Ying M S. Fuzzifying topology based on complete residuated lattice-valued logic (I). Fuzzy Sets and Systems, 1993, 56(3): 337~373.

[147] Ying M S. Declarative semantics of programming in residuated lattice-valued logic. Science in China, Series E-Technological Sciences, 2000, 43(5): 481~494.

[148] Ying M S. Fuzzy topology based on residuated lattice-valued logic. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2001, 7(1): 89~102.

[149] Qiu D W. Automata theory based on complete residuated lattice-valued logic. Science in China, Series F: Information Sciences, 2001, 44(6): 419~429.

[150] Zhang X H, Jun Y B. The prime filter theorem of R_0-algebra and BL-algebra. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(5): 935～938.

[151] Zhang X H. On filters in MTL-algebras: Brief Report, Advances Systems Science and Applications, 2007, 7(1): 32～38.

[152] 姜波, 张小红. 剩余格及其弱素滤子定理. 宁波大学学报 (理工版), 2006, 19(Sup.): 79～83.

[153] Zhang X H. On non-commutative fuzzy logic structures. Proceedings of Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2006, 7(3): 1867～1871.

[154] 张小红. 非可换模糊逻辑系统 PL^* 及其完备性. 数学学报, 2007, 50(2): 421～442.

[155] 张小红. 基于左连续伪 t-模的非可换模糊逻辑系统 PUL^*. 数学进展, 2007, 36(3): 295～308.

[156] Wang Z D, Yu Y D. Pseudo-t-norms and implication operators on a complete Brouwerian lattice. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 132(1): 113～124.

[157] Wang Z D, Yu Y D. Pseudo-t-norms and implication operators: direct products and direct product decompositions. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139(3): 673～683.

[158] Wang Z D. Generating pseudo-t-norms and implication operators. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(3): 398～410.

[159] Hájek P. Basic fuzzy logic and BL-algebras. Soft Computing, 1998, 2: 124～128.

[160] Hájek P. Basic fuzzy logic and BL-algebras II. Soft Computing, 2003, 7: 179～183.

[161] Cignoli R, Esteva F, Godo L, et al. Basic fuzzy logic is the logic of continuous t-norms and their residua. Soft Computing, 2000, 4: 106～112.

[162] Cignoli R, Torrens A. Standard completeness of Hájek basic logic and decompositions of BL-chains. Soft Computing, 2005, 9: 862～868.

[163] Cintula P. Short note: on the redundancy of axiom (A3) in BL and MTL, 2005, 9(12): 942.

[164] 孟杰, 刘用麟. BCI-代数引论. 西安: 陕西科学技术出版社, 2001.

[165] Esteva F, Godo L, Hajek P, et al. Residuated fuzzy logic with an involutive negation. Arch Math Logic, 2000, 39: 103～124.

[166] Esteva F, Godo L, Montagna F. The ŁΠ and ŁΠ$_{1/2}$logics: two complete fuzzy systems joining Łukasiewicz and product logics. Arch Math Logic, 2001, 40: 39～67.

[167] Horcik R, Cintula P. Product Łukasiewicz logic. Arch Math Logic, 2004, 43: 477～503.

[168] Hanikova Z. Standard algebras for fuzzy propositional calculi. Fuzzy Stes and Systems, 2001, 124: 309～320.

[169] Clifford A H. Naturally ordered commutative semigroups. Amer J Math, 1954, 76: 631～646.

[170] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular norms as ordinal sums of semigroups in the sense of A H Clifford. Semigroup Forum, 2002, 65: 71～82.

[171] Mesiar R, Mesiarova A. Residual implications and left-continuous t-norms which are ordinal sums of semigroups. Fuzzy Stes and Systems, 2004, 143: 47～57.

[172] Cignoli R, Mundici D. Partial isomorphisms on totally ordered abelian groups and Hajek's completeness theorem for basic logic, Mult Valued Log, 2001, 6: 89~94.

[173] Cignoli R, IM.D'Ottaviano, Mundici D. Algebraic foundations of many-valued reasoning, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[174] Hájek P, Godo L, Esteva F. A complete many-valued logic with product conjunction. Arch Math Logic, 1996, 35: 191~208.

[175] Cignoli R, Torrens A. An algebraic analysis of product logic. Mult Valued Log, 2000, 5: 45~65.

[176] Wang S M, Wang B S, Wang G J. A triangular noem-based propositional fuzzy logic. Fuzzy Stes and Systems, 2003, 136(1): 55~70.

[177] 裴道武. 强正则剩余格值逻辑系统 $\mathscr{L}^N$ 及其完备性. 数学学报, 2002, 45(4): 745~752.

[178] 吴洪博. $\mathscr{L}^*$ 系统的一种改进系统 $\mathscr{L}_0^*$. 纯粹数学与应用数学, 2001, 17(1): 46~52.

[179] 吴洪博. 基础 R_0 代数与基础 $\mathscr{L}^*$ 系统. 数学进展, 2003, 32(5): 565~576.

[180] 王保社, 张小红. 关于形式系统 $\mathscr{L}^*$ 及 R_0 代数的若干结果. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2003, 31(3): 28~31.

[181] Wang S M, Wang B S, Pei D W. A Fuzzy logic for an ordinal sum of t-norm. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149: 297~307.

[182] Zhang X H, He H C, Xue Z A. Fuzzy logic system $\mathscr{L}^N$ and strong regular residuated lattice. Proceedings of the Third Asian Workshop on Foundations of Software, Northwest University Press, 2005: 279~286.

[183] Fodor J. Nilpotent minimum and related connectives for fuzzy logic. Proc FUZZ-IEEE'95, 1995: 2077~2082.

[184] Horcik R. Alternative proof of standard completeness theorem for MTL. Soft Computing, 2007, 11: 123~129.

[185] Esteva F, Gispert J, Godo G, et al. On the standard completeness of some axio-matic extensions of themonoidal t-norm logic. Studia Logica, 2002, 71(2): 199~226.

[186] Wang S M, Wang B S, Fang R. NMŁ a schematic extension of F Esteva and L Godo's logic MTL. Fuzzy Stes and Systems, 2005, 149: 285~295.

[187] Hájek P. Observations on the monoidal t-norm logic. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 132(1): 107~112.

[188] Horcik R. Standard completeness theorem for ΠMTL. Archive for Mathematical Logic 2005, 44(4): 413~424.

[189] Horcik R. Algebraic Properties of Fuzzy Logics. Ph D thesis, Czech Technical University in Prague, 2005.

[190] Fuchs L. Partially Ordered Algebraic Systems. Oxford: Pergamon Press, 1963.

[191] Horcik R. On the failure of standard completeness in ΠMTL for infinite theories. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 619~624.

[192] 张小红. 基于 t-模与伪 t-模的逻辑系统及其代数分析. 西安: 西北工业大学博士论文, 2005.

[193] 张小红, 何华灿, 徐扬. 基于 Schweizer-Sklar T–范数的模糊逻辑系统. 中国科学 (E 辑), 2005, 35 (12): 1314～1326. 英文版见: Zhang X H, He H C, Xu Y. A fuzzy logic system based on Schweizer-Sklar t-norm, Science in China, Series F: Information Sciences, 2006, 49(2): 175～188.

[194] Flaminio T, Marchioni E. T-norm-based logics with an independent involutive negation. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(24): 3125～3144.

[195] 张小红, 何华灿, 李伟华. 泛逻辑的基本形式演绎系统 UL 及其可靠性. 计算机科学, 2003, 30(11): 21～24.

[196] 张小红, 何华灿, 李伟华. 形式系统 UL 的弱完备性. 计算机科学, 2003, 30(12): 103～107.

[197] Yager R R, Generalized "AND/OR" operators for multivalued and fuzzy logic. Int Sym on multiple-valued logic (IEEE), 1980: 214～218.

[198] 陈永义. Fuzzy 算子探讨 (I). 模糊数学, 1982, 2: 1～10.

[199] 应明生. Fuzzy 算子的模糊度. 模糊数学, 1984, 4: 1～6.

[200] Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 341～356.

[201] 张文修, 吴伟志, 梁吉业等. 粗糙集理论及方法. 北京: 科学出版社, 2001.

[202] 王国胤. Rough 集理论与知识获取. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.

[203] 刘清. Rough 集与 Rough 推理. 北京: 科学出版社, 2003.

[204] 张文修, 姚一豫, 梁怡. 粗糙集与概念格. 西安: 西安交通大学出版社, 2006.

[205] 祝峰, 何华灿. 粗集的公理化. 计算机学报, 2000, 33(3): 330～333.

[206] Dudios D. Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191～209.

[207] 张文修, 梁怡, 吴伟志. 信息系统与知识发现. 北京: 科学出版社, 2003.

[208] Radzikowska A M, Kerre E E. A comparative study of fuzzy rough sets. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 126: 137～155.

[209] Mi J S, Zhang W X. An axiomatic characterization of a fuzzy generalization of rough sets. Information Sciences, 2004, 160: 235～249.

[210] Wu W Z, Leung Y, Mi J S. On characterizations of (I, T)-fuzzy rough approximation operators. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 154(1): 76～102.

[211] Iwinski T B. Algebraic approach to rough sets. Bulletin of the Polish Academy of Science and Mathematics, 1987, 35: 673～683.

[212] Comer S. An algebraic approach to the approximation of information. Fundamenta Informaticae, 1991, 492～502.

[213] Düntsch I. Winter M. Rough relation algebras revisited. Fundamenta Informaticae, 2006, 74: 283～300.

[214] Dütsch I. Rough sets and algebras of relations // Incomplete Information: Rough set analysis (Ed. Ewa Orlowska), Physica-Verlag, 1997: 95～108.

[215] Comer S. Perfect extensions of regular double stone algebras. Algebra Universalis, 1995, 34: 96～109.

[216] Düntsch I. A logic for rough sets. Theoretical Computer Siences, 1997, 179: 427～436.

[217] 薛占熬, 何华灿. 粗糙蕴涵. 计算机科学, 2003, 30(11): 18～20.

[218] Zhang X H, Ma Y C, Xue Z N, et al. Implication operators based on rough set model over Boolean algebras, 2007 IEEE International Conference on Granular Computing, 2007: 186～191.

[219] Banerjee M. Rough sets through algebraic logic. Fundamenta Informaticae, 1996, 28: 211～221.

[220] Banerjee M. Logic for rough truth. Fundamenta Informaticae, 2006, 71: 139～151.

[221] Dai J H. Logic for rough sets with rough double stone algebraic semantics // Slezak D et al. (Eds) RSFDGrc 2005, LNAI 3641, 2005,: 141～148.

[222] Zhang X H. Rough algebras and fuzzy logic algebras. Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2007: 213～216.

[223] 祝峰, 王飞跃. 关于覆盖广义粗集的一些结果. 模式识别与人工智能, 2002, 15(1): 6～13.

[224] Zhu W, Wang F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets. Information Sciences, 2003, 152: 217～230.

[225] 裴道武, 傅丽. 两类广义粗糙集模型. 模式识别与人工智能, 2004, 17(3): 281～285.

[226] 代建华. 利用分子格对粗糙集理论进行推广. 计算机学报, 2004, 27(10): 1436～1440.

[227] Qi G L, Liu W R. Rough operations on Boolean algebras. Information Sciences, 2005, 173: 49～63.

[228] Chen D G, Zhang W X, Yeung D, et al. Rough approximations on a complete compietely distributive lattice with application to generalized rough set. Information Science, 2006, 176: 1829～1848.

[229] Zhang X H, Yao G. Generalized rough set model on De Morgan algebras. 2007 IEEE International Conference on Granular Computing, 2007: 205～208.

[230] 姚刚, 张小红. 完备格上的广义 Rough 模型. 宁波大学学报 (理工版), 2007, 20(2): 197～201.

[231] Cattaneo G, Ciucci D. Heyting Wajsbreg algebras as an abstract environment linking fuzzy and rough sets // Alpigini J J, et al (eds): Proceeding of the 3rd International Conferences on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC 2002), LNAI 2475, 2002: 77～84.

[232] Cattaneo G, Ciucci D. Algebraic Structures for Rough Sets // Peters J F, et al (eds): Transactions on Rough Sets II, LNCS 3135, 2004: 208～252.

[233] 秦克云, 涂文彪. 粗糙集代数与格蕴涵代数. 西南交通大学学报, 2004, 39(6): 754～757.

[234] 代建华, 潘云鹤, 陈卫东. 基于分子格及其类拓扑子系统的粗近似. 计算机科学, 2004, 31(z2): 53～54.

[235] Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-MV algebras: a noncommutative extension of MV-algebras // The Proceedings of the Fourth International Symposium on Economic Informatics, Bucharest, 1999: 961~968.

[236] Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-MV algebras. Multiple Valued Logic, 2001, 6: 95~135.

[237] Rachunek J. A non-commutative generalization of MV-algebras. Czechoslovak Mathematical Journal, 2002, 52: 255~273.

[238] Ceterchi R. On Algebras with Implications, Categorically Equivalent to Pseudo-MV Algebras // The Proceedings of the Fourth International Symposium on Economic Informatics Bucharest, 1999: 912~916.

[239] Ceterchi R. Pseudo-Wajsberg Algebras. Multiple-Valued Logic, 2001, 6: 67~88.

[240] Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-BL algebras: a noncommutative extension of BL-algebras. Abstracts of the Fifth International Conference FSTA 2000, Slovakia, 2000: 90~92.

[241] Georgescu G, Leustean L. Some classes of pseudo-BL algebras. J Australian Math Soc, 2002, 73: 127~153.

[242] Kuhr J, Pseudo BL-algebras and DRl-monoids. Mathematica Bohemica, 2003, 128(2): 199~208.

[243] Hinaley J R. BCK and BCI logics, condensed detachment and the 2-property. Notre Dame J of Formal Logic, 1993, 24: 231~250.

[244] Prior A. Formal Logic. Second Edition. Oxford: Oxford University Press, 1962.

[245] Iséki K. An algebra related with a propositional calculus. Proc Japan Acad, 1966, 42: 26~29.

[246] Imai Y, Iséki K. On axiom systems of propositional calculi. XIV. Proc Japan Acad, 1966, 42: 19~22.

[247] Iséki K. Algebraic formulations of propositional calculi. Proc Japan Acad, 1965, 41: 803~807.

[248] Iséki K, Tanaka S. An introduction to the theory of BCK-algebras. Math Japonica, 1978, 23: 1~26.

[249] Meng J, Jun Y B. BCK-algebras. Kyung Moon Sa Co Seoul, Korea, 1994.

[250] Komori Y. The class of BCC-algebras is not a variety. Math Japonicae 1984, 29: 391~394.

[251] Komori Y. On Komori algebras. Bulletin of the Section of Logic (Poland), 2001, 30(2): 67~70.

[252] 叶瑞芬. *BZ*-代数// *BCI*, *BCK*-代数与计算机逻辑论文集. 上海: 上海交通大学出版社, 1991, 1: 21~24.

[253] 周德襄. GB 代数及其基本性质. 西南师范大学学报, 1987, 1: 23~26.

[254] Bunder M. BCK and related algebras and their corresponding logics. Journal of Non-classical Logic, 1983, II: 15~24.

[255] Dudek W A, Zhang X H. On ideals and congruence in BCC-algebras. Czechoslovak Math Journal, 1998, 48(123): 21~29.

[256] Zhang X H. *BCC*-algebra and integral pomonoid. J of Math Research & Exposition, 1999, 19(Supp.): 196~198.

[257] Zhang X H, Yue Z C, Hu W B. On fuzzy BCC-ideals. Scientiae Mathema-ticae Japonicae, 2001, 54(2): 349~353.

[258] 孟杰, 刘用麟. *BCI*–代数引论. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2001.

[259] 黄益生. *BCI*-Algebra (英文版). 北京: 科学出版社, 2006.

[260] Zhang X H, Wang Y Q, Dudek W A. T-ideals in BZ-algebras and T-type BZ-algebras, 2003, 34(11): 1559~1570.

[261] Zhang X H. Fuzzy BZ-ideals and fuzzy anti-grouped ideals. The Journal of Fuzzy Mathematics, 2003, 11(4): 915~932.

[262] 张小红, 王永全, 沈百英. 5 阶 BZ–代数. 华东理工大学学报, 2003, 29(1): 50~52.

[263] Halas R, Ort J. QBCC-algebras inherited from qosets. Mathematica Slovaca, 2003, 53(4): 331~340.

[264] Cintula P. Weakly implicative (fuzzy) logics I: basic properties. Arch Math Logic, 2006, 45: 673~704.

[265] 张小红. BIK^+–逻辑与非可换模糊逻辑. 模糊系统与数学, 2007, 21(6): 31~36.

[266] Zhang X H, Dudek W A. Fuzzy BIK^+-logic and Non-Commutative Fuzzy Logics. (待发表)

[267] 徐扬. 格蕴涵代数与 BCK 代数的关系. 模糊系统与数学, 1997, 11(1): 10~15.

[268] Iorgulescu A. Iséki algebras. Connection with BL-algebras, Soft Computing, 2004, 8: 449~463.

[269] Zhang X H, Li W H. On pseudo-BL algebras and BCC-algebras. Soft Computing, 2006, 10: 941~952.

[270] Hájek P. One more variety in fuzzy logic: quasihoops, Technical Report No.937, Institute of Computer Science Academy of Sciences, Czech Republic, 2005.

[271] Wang S M, Qin F, Wang M Y. Solutions to Cintula's open problems. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 2091~2099.

[272] Wang S M. A partially ordered algebra related with BCI-logic. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(3): 60~65.

[273] Iorgulescu A. Pseudo-Iséki algebras. Connection with pseudo-BL algebras, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2005, 11(3~4): 263~308.

[274] 张小红. GB 代数的同态定理. 西南师范大学学报, 1991, 16(2): 177~182.

[275] 叶瑞芬, 张小红. BZ–代数的理想及其同态定理. 华东理工大学学报, 1993, 19(6): 775~778.

[276] Zhang X H, Ye R F. BZ-algebra and Group. Journal of Mathematical and Physical Sciences, 1995, 29(5): 223~233.

[277] 叶瑞芬, 张小红. BZ–代数与 BZ1–代数的一些结果. 华东理工大学学报, 1995, 21(3): 353~358.

[278] 王永全, 韩良秀, 沈百英. 零对称 BZ- 代数. 华东理工大学学报, 1997, 23(6): 755~761.

[279] 张小红, 王永全. 零对称 BZ–代数的充要条件. 纯粹数学与应用数学, 2003, 19(3): 253~256.

[280] Zhang X H, Wei Z L. BCC-algebras and BCK-algebras. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 1995, 10(3): 29~31.

[281] Zhang X H, Jun Y B. The role of T(X) in the ideal theory of BCI-algebras. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 1997, 34(2): 199~204.

[282] Jun Y B, Zhang X H. Fuzzy setting of ideals in BZ-algebras. The Journal of Fuzzy Mathematics, 2005, 13(1): 149~158.

[283] Zhang X H, Jiang H, Bhatti S A. On P-ideals of a BCI-algebra. Punjab Univ J Math, 1994, XXVII: 121~128.

[284] Zhang X H, Bhatti S A. Every ideals is a subset of a proper P-ideals in BCI-algebra. Punjab Univ J Math, 1999, XXXII: 93~95.

[285] Dudek W A, Zhang X H, Wang Y Q. Ideals and atoms of BZ-algebras. Mathematica Slovaca (in print).

[286] Ferreirim I M A. On Varieties and Quasivarieties of Hoops and their Reducts, Thesis. University of Illinois at Chicago, 1992.

[287] Blok W J, Ferreirim I M A. On the structure of hoops. Algebra Universalis, 2000, 43: 233~257.

[288] Esteva F, Godo L, Hájek P, et al. Hoops and fuzzy logic. J Logic Computat, 2003, 13(4): 531~555.

[289] Georgescu G, Leustean L, Preoteasa V. Pseudo-hoops. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2005, 11(1~2): 153~184.

[290] Yang Y B, Zhang X H. Pseudo-hoops and non-commutative fuzzy structures // Proceedings of the International Conference on Machine Learning and Cybernetics 2008.

[291] Georgescu G, Iorgulescu A. Pseudo-BCK algebras: an extension of BCK algebras // Proceedings of DMTCS′01: combinatorics, computability and logic. London: Springer-Verlag, 2001: 97~114.

[292] Iorgulescu A. Classes of pseudo-BCK algebras-Part I. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2006, 12 (1~2): 71~130.

[293] Iorgulescu A. Classes of pseudo-BCK algebras-Part II. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2006, 12 (5~6): 575~629.

[294] Liu Y L, Liu S Y, Xu Y. Pseudo-BCK algebras and PD-posets. Soft Computing, 2006, 1: 91~101.

[295] 刘用麟. 若干逻辑代数系统结构的研究. 西安: 西安电子科技大学博士学位论文, 2005.

[296] Ciungu L C. Algebras on subintervals of pseudo-hoops. to appear.

[297] Dvurečenskij A. Aglianò-Montagna type decomposition of linear pseudo hoops and its applications. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 211: 851~861.

[298] 裴道武. MTL–代数的特征定理. 数学学报, 2007, 50 (6): 1201~1206.

[299] Kükr J. Pseudo-BCK-Algebras and Related Structures, thesis, Palacky University, 2007.

[300] 张小红, 薛占熬, 马盈仓. R_0 代数 (NM–代数) 的布尔 MP 滤子及布尔 MP 理想. 工程数学学报, 2005, 22(2): 287~294.

[301] Zhang X H, Li W H. On fuzzy logic algebraic system MTL. Advances Systems Science and Applications, 2005, 5(3): 475~483.

[302] Zhang X H, Qin K Y, Dudek W A. Ultra LI-ideals in lattice implication algebras and MTL-algebras. Czechoslovak Mathematical Journal, 2007, 57 (132): 591~605.

[303] Jun Y B, Xu Y, Zhang X H. On fuzzy filter of MTL-algebras. Information Sciences, 2005, 175 (1~2): 120~138.

[304] Zhang X H, Wang Y Q, Liu Y L. Fuzzy ultra filters and fuzzy G-filters of MTL-algebras. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 3613: 160~166.

[305] Zhang X H, Liu Y L. Quotient R_0-algebra via a fuzzy MP-filter // Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2005, 5: 2663~2667.

[306] 张小红, 刘三阳, 刘用麟. 伪 MTL–代数 (WPBL–代数) 的正规滤子. 西安电子科技大学学报, 2006, 33(5): 829~832.

[307] Zhang X H, Jun Y B, Doh M I. On fuzzy filters and fuzzy ideals of BL-algebras. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(3): 8~13.

[308] Zhang X H. The lattice of fuzzy MP-filter in R_0-algebras. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(5): 1~7.

[309] Wang Y Q, Zhang X H, Shao Z Q. Boolean filters and prime filters of residual lattices. Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD 2007), 2007, 1: 101~105.

[310] 张小红, 秦克云. 伪 MTL–代数与 BCC–代数的 Boole 滤子 (待发表).

[311] Turunen E. Boolean deductive systems of BL-algebras. Arch Math Logic, 2001, 40: 467~473.

[312] Turunen E. BL-algebras of basic fuzzy logic. Mathware & Soft Comp, 1999, 6: 49~61.

[313] 程国胜. R_0 代数的滤子与理想. 模糊系统与数学, 2001, 15(1): 58~61.

[314] Sessa S, Turunen E. Local BL-algebras. Multi-valued Logic, 2001, 6: 229~249.

[315] 张小红, 邵志清, 王永全. 强剩余 BCC–代数及其正规素滤子定理. 华东理工大学学报, 2008(待发表).

[316] Brzozowski J A. A characterization of De Morgan algebras. International Journal of Algebra and Computation, 2001, 11(5): 525~527.

[317] 罗从文. De Morgan 代数. 北京: 北京理工大学出版社, 2005.

[318] Wang G J, He Y Y. Intuitionistic fuzzy sets and L-fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110: 271~274.

[319] 韩诚, 许文艳, 吴恒洋. 非全序 R_0 代数的存在性及其构造. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2004, 32(1): 25~28.

[320] 张小红, 魏萍. DR_0 代数: 由 De Morgan 代数导出的正则剩余格. 数学进展, 2008(待发表).

[321] 魏萍, 张小红. 强 De Morgan 代数上的广义 R_0 t–模. 模糊系统与数学, 2007, 21(5): 33~38.

[322] 王国俊. 蕴涵格及其 Fuzzy 拓扑表现定理. 数学学报, 1999, 42(1): 133~140.

[323] 朱怡权, 牛冀平. 蕴涵格的滤子及同余关系. 数学研究, 2002, 35(2): 216~220.

[324] 苏忍锁, 蕴涵格. 弱 R_0–代数与正则剩余格. 宝鸡文理学院学报 (自然科学版), 2004, 24(2): 89~91.

[325] 罗清君, 王国俊. IL 型三 I 算法及其还原性. 陕西师范大学学报 (自然科学版), 2006, 34(3): 9~13.

[326] 张小红. 蕴涵格的一般滤子理论 (待发表).

[327] Kreinovich V. Towards more realistic (e.g., non-associative) "and"- and "or"-operations in fuzzy logic, 2004, Soft Computing, 8: 274~280.

[328] Dudek W A. A new characterization of ideals in BCC-algebras, Novi Sad Journal of Mathematics, 1999, 29(1): 139~145.

[329] Foulis D J, Bennett M K. Effect algebras and unsharp quantum logics. Found Phy, 1994, 24: 1325~1346.

[330] Dvurečenskij A. New Trends in Quantum Structures. Kluwer Academic Publ, Dordrecht, 2000.

[331] 尚云. 量子逻辑中有效代数与伪有效代数的研究. 西安: 陕西师范大学博士学位论文, 2005.

[332] 曲文波. 关于量子力学中效应代数上的收敛理论及不变量. 苏州科技学院学报 (自), 2004, 21(1): 38~41.

[333] Dvurečenskij A, Vetterlein T. Pseudo effect algebras: I. Basic properties. International J of Theoretical Physics, 2001, 40: 685~701.

[334] Dvurečenskij A, Vetterlein T. Non-commutative algebras and quantum structures. International Journal of Theoretical Physics, 2004, 43: 1599~1612.

[335] Ma Z H, Wu J D, Lu S J. Pseudo-effect algebras and pseudo-difference posets. International Journal of Theoretical Physics, 2004, 43(6): 1453~1460.

[336] Vetterlein T. BL-algebras and quantum structures. Mathematica Slovaca, 2004, 2: 127~141.

[337] Vetterlein T. BL-algebras and effect algebras. Soft Computing, 2005, 9(8): 557~564.

[338] Zhang X H, Fan X S. Pseudo-BL algebras and pseudo-effect algebras. Fuzzy sets and systems, 2008, 159: 95~16.

[339] Zhou X N, Li Q G, Wang G J. Residuated lattices and lattice effect algebras. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 904~914.

[340] Yun S, Li Y M, Chen M Y. Pseudo difference posets and pseudo Boolean D-posets. International J of Theoretical Physics, 2004, 43(12): 2447～2460.

[341] 樊雪双, 张小红. 弱 MV–有效代数的一个等价定义. 宁波大学学报 (理工版), 2007, 20(1): 62～66.

[342] 樊雪双. 有效代数及伪有效代数的若干研究. 宁波大学硕士学位论文, 2008.

[343] Zhang X H, Fan X S. Pseudo-involutive residuated lattices (non-commutative) and pseudo-effect algebras, 2008.

[344] Yetter D N. Quantales and (non-commutative) linear logic. The Journal of Symbolic Logic, 1990, 55(1): 41～64.

[345] Rachunek J. Prime spectra of non-commutative generalizations of MV-algebras. Algebra Universalis, 2002, 48: 151～169.